М.Абловиц, Х.Сигур

СОЛИТОНЫ И МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Книга известных американских ученых, отражающая состояние в быстроразвивающемся направлении математической физики. В ней систематически изложены основы метода, его приложения к различным задачам, обсуждаются перспективы развития. Авторы приводят большое число задач и упражнений и обширную библиографию (более 500 названий).

Для математиков и физиков различных специальностей, аспирантов и студентов университетов.

Содержание

Указатель

Предисловие редактора перевода

Выход в свет в русском переводе настоящей монографии — событие как для физиков-теоретиков, изучающих волны в нелинейных средах, так и для математиков, интересующихся аналитическими методами в теории уравнений с частными производными. Оба эти научные направления — параллельно и при взаимном влиянии — пережили за последние два десятилетия значительный подъем.

Этот подъем был стимулирован нуждами физической науки, в разных областях которой — физике плазмы, нелинейной оптике, физике ферромагнетиков — в начале шестидесятых годов стали систематически возникать проблемы взаимодействия волн большой амплитуды. Вскоре выяснилось, что, несмотря на различие физических ситуаций, эти задачи имеют с формальной точки зрения много общего как между собой, так и с классической задачей о нелинейных волнах на поверхности тяжелой жидкости. Опыт показал, что многие физические задачи о нелинейных волнах описываются сравнительно небольшим числом универсальных математических моделей. Две из них — уравнение Кортевега — де Фриза (КдФ) и так называемое уравнение «sin-Гордон» — были известны еще в прошлом веке. Уже тогда было установлено, что эти уравнения имеют замечательные локализованные точные решения — солитоны, упоминающиеся в заглавии настоящей книги. Для уравнения sin-Гордон, изучавшегося ранее в связи с его применениями в теории поверхностей постоянной отрицательной кривизны, был открыт способ «размножения» точных решений — преобразование Бэклунда. Один лишь шаг отделял математиков девятнадцатого века от важного математического открытия, которое было сделано только в 1967 г., когда Гарднер, Грин, Краскал и Миура обнаружили связь уравнений КдФ с линейным уравнением Шрёдингера на прямой и открыли метод точного решения некоторых нелинейных уравнений с частными производными, получивший в советской литературе название «метод обратной задачи рассеяния».

Воистину золотым веком для метода обратной задачи были семидесятые годы. В это время сложился своеобразный между-

народный клуб исследователей, занимавшихся усовершенствованием метода обратной задачи и применением его ко все новым и новым нелинейным уравнениям, имеющим применение в физике и прежде всего — в физике нелинейных волн. Приятно отметить, что одну из ведущих ролей в этом клубе сыграли отечественные исследователи. Сейчас известно несколько десятков таких уравнений (их несколько условно называют интегрируемыми), а литература по методам обратной задачи выросла настолько, что стала труднообозримой даже для узких специалистов. Появились и первые монографии. В 1980 г. в издательстве «Наука» вышла книга В. Е. Захарова, С. В. Манакова, С. П. Новикова и Л. П. Питаевского «Теория солитонов», ставшая уже библиографической редкостью. В 1983 г. в издательстве «Мир» вышел перевод книги Дж. Лэма (мл.) «Элементы теории солитонов», а в 1985 г. в том же издательстве — перевод книги Ф. Калоджеро и А. Дегаспериса «Спектральные преобразования и солитоны». Было опубликовано также несколько сборников переводных статей.

Это, однако, никак не уменьшает важности выхода в свет русского перевода книги М. Абловица и Х. Сигура, впервые опубликованной в серии «Исследования по прикладной математике» в 1981 г. в США. Дело в том, что ее авторы были и являются весьма продуктивными участниками развития метода обратной задачи и его приложений. В истории метода важной вехой было появление в 1974 г. статьи четырех молодых преподавателей высшего технического учебного заведения в штате Нью-Йорк, известного под названием «Кларксон-колледж». Кроме Абловица и Сигура среди этих четверых были еще Д. Кауп и А. Ньюэлл. В их статье был сформулирован один из вариантов метода обратной задачи, получивший название по первым буквам фамилий авторов «метода АКНС». С тех пор все четверо являются, пожалуй, самыми активными, хотя и неизменно дружественными, конкурентами советских исследователей в этой области. Начиная с 1973 г. Кларксон-колледж много раз был источником весьма волнующих и важных новостей. И поэтому книга, написанная двумя ведущими представителями сложившейся там научной школы, не может не привлечь внимания всех интересующихся теорией солитонов.

Эта книга, предлагаемая сейчас русскому читателю, не совсем обычна. Лишь первая глава ее, содержащая изложение базисных результатов метода обратной задачи, и весьма ценное приложение, посвященное применению метода Фурье к линейным уравнениям в сплошной среде, написаны по академическим стандартам, принятым в научной литературе. Большая же часть монографии написана в гораздо более непринужденной манере и во многом представляет собой размышления авторов о возмож-

ностях и перспективах точных аналитических методов в теории нелинейных волн. Многое вынесено в упражнения, выполнить которые далеко не просто. (Авторы сами говорят, что эти упражнения представляют собой скорее список нерешенных задач.)

Благодаря выбранному стилю изложения авторам удается коснуться широкого круга вопросов, почти не затронутых в упомянутых выше книгах. К их числу относятся описание предложенного Хиротой прямого метода вычисления солитонных решений нелинейных уравнений и развитого в работах Уолквиста и Эстабрука «метода псевдопотенциалов», еще ждущего своего настоящего понимания. Авторы излагают теорию уравнения Бенджамина — Оно, имеющего приложение к теории внутренних волн в океане, и касаются многомерных обобщений метода обратной задачи. В книге подробно описаны конечно-разностные аналоги интегрируемых дифференциальных уравнений, не нашедшие пока подробного изложения в советских обзорных статьях. Авторы останавливаются на весьма интересном вопросе о том, по какому критерию можно отличить интегрируемое при помощи метода обратной задачи уравнение от неинтегрируемого. Они предлагают для этого эмпирически нащупанный критерий, состоящий в том, что в тех частных случаях, когда уравнение с частными производными сводится к обыкновенному, последнее должно обладать «свойством Пенлеве», т. е. иметь неподвижные критические точки. Нужно отметить, однако, что этот критерий еще нуждается в обосновании.

Кроме чисто математического книга содержит довольно обширный физический материал, относящийся к гидродинамике и нелинейной оптике, вплоть до описания экспериментов по распространению и взаимодействию солитонов на поверхности жидкости. Авторы обсуждают свойства солитонов планетарного масштаба (солитонов Россби) и даже приводят фотографию красного пятна Юпитера, которое они рассматривают в качестве кандидата в такие солитоны. В последнее время появились весьма веские соображения в пользу этого утверждения. В книге подробно рассматривается фундаментальное для нелинейной оптики явление самоиндуцированной прозрачности, в теоретическое изучение которого авторы внесли немалый вклад. Разработанные здесь авторами методы, усовершенствованные в СССР, в недавнее время позволили построить теорию другого важного явления нелинейной оптики — суперфлуоресценции.

В целом книга представляет собой как бы мгновенную фотографию бурноразвивающейся области науки, находящейся на стыке математики и физики, причем фотографию, сделанную активными участниками этого развития. Это делает книгу очень живой и определяет ее ценность, которая сохранится еще долгое время, несмотря на то, что на некоторые положения, сфор-

мулированные в книге, мы уже сейчас смотрим по-другому. И здесь большая заслуга принадлежит также М. Абловицу и его коллегам. Оба автора бывали в Советском Союзе, участвовали в организованных у нас советско-американских и международных конференциях, с ними поддерживаются тесные научные и дружеские контакты, которые несомненно способствовали работе над переводом. Мы благодарны им за то содействие, которое они оказали при организации перевода книги.

С известными оговорками книгу можно рекомендовать для первоначального знакомства с предметом, хотя основной интерес она представляет для специалистов. Этому в немалой степени способствует содержащаяся в книге обширная библиография, в которой с неплохой степенью полноты представлены и отечественные работы. В русском издании библиография существенно дополнена.

В. Е. Захаров

Посвящается Кэрол и Инид

Пролог

Основная тема этой книги может быть сформулирована довольно просто: некоторые нелинейные задачи имеют удивительно простую скрытую структуру, и их решения можно получить при помощи методов линейной теории. Как правило, такие задачи формулируются в виде эволюционных уравнений, описывающих эволюцию некоторой величины (или набора величин) во времени при заданных начальных данных. Уравнения могут принимать различный вид: дифференциальные уравнения в частных производных, дифференциально-разностные уравнения (дискретное пространство, непрерывное время), уравнения в конечных разностях (время и пространство дискретны), интегро-дифференциальные уравнения и системы обыкновенных дифференциальных уравнений (конечного порядка). На самом деле удивительно, что можно найти общее решение этих уравнений, являющееся результатом эволюции произвольных начальных данных (принадлежащих подходящему классу), не делая никаких приближений, хотя задачи являются нелинейными. И вероятно, столь же удивительно то, что некоторые из этих точно решаемых задач естественно возникают в качестве моделей определенных физических явлений. Эти приложения способствовали возрастанию интереса к предмету.

В настоящее время есть несколько общепринятых точек зрения на эти точно решаемые задачи. Согласно одной из них, главной целью анализа является решение соответствующей задачи с начальными условиями. Это решение строится при помощи метода обратной задачи рассеяния (МОЗР), который подробно описан в гл. 1 и 2. Его можно рассматривать как обобщение метода преобразования Фурье, который обычно применяется для решения линейных задач.

Рассматриваемые задачи обладают чрезвычайно богатой внутренней структурой, и это позволяет рассматривать их с различных точек зрения, не обязательно связанных с МОЗР. Некоторые из них обсуждаются в гл. 3. Многие такие подходы более удобны, если нас интересуют частные решения, например солитоны, а не общее решение задачи с начальными условиями. Ряд физических приложений подробно обсуждается в гл. 4.

Ценность метода обратной задачи рассеяния состоит в том, что он позволяет исследовать нелинейную задачу по существу методами линейной теории. Но это преимущество, конечно, могут вполне оценить только те, кто уже знаком с линейной теорией и ее результатами. Поскольку линейная теория играет фундаментальную роль, мы добавили приложение, посвященное линейным задачам и их решениям. Они очень полезны для сравнения с решениями соответствующих нелинейных задач, которые являются предметом этой книги.

Прежде чем приступать к изложению, хотелось бы высказать здесь наши пожелания о порядке чтения материала. Приложение содержит предварительные сведения, иногда вовсе нетривиальные. Именно с него следует начать чтение тем, кто не знаком с методом преобразования Фурье. Мы добавили некоторое количество весьма простых упражнений в конце приложения.

Глава 1 является фундаментальной. Остальные главы основаны на материале этой главы, и мы на нее постоянно ссылаемся. Главу 1 мы рекомендуем прочесть целиком.

После освоения гл. 1 имеется много вариантов. Главы 2, 3 и 4 зависят от главы 1, но практически независимы друг от друга. Их можно читать в любом порядке. Разделы внутри каждой главы также можно считать независимыми. Это позволяет читателю сравнительно быстро разобраться с заинтересовавшей его частной проблемой.

Наконец, несколько слов об упражнениях. Они имеют широкий диапазон по трудности: от восстановления пропущенных шагов в доказательстве до исследовательских задач, которые, насколько нам известно, до сих пор не решены. Формулировки задач обычно подсказывают читателю, какие из этих проблем пока остаются открытыми.

Глава I. Обратная задача рассеяния на бесконечном интервале

1.1. Введение. В 1965 г. Забужский и Краскал [523] обнаружили, что решение уравнения Кортевега — де Фриза (КдФ), представляющее собой уединенную волну, обладает свойством, которое не было известно прежде: а именно, такое решение «упруго» взаимодействует с другим таким же решением. Они назвали эти решения *солитонами*. Вскоре после этого открытия Гарднер и др. (1967) [172, 173] стали первооткрывателями нового метода математической физики. Точнее говоря, они изобрели метод решения уравнения КдФ, использующий идеи прямой и обратной задачи рассеяния. Лакс (1968) [318] существенно обобщил их идеи, а Захаров и Шабат (1971) [544] показали, что этот метод приложим и к другому уравнению, важному для физических приложений, — нелинейному уравнению Шрёдингера. Используя эти идеи, Абловиц, Кауп, Ньюэлл и Сигур (1973—1974) [11, 12] разработали метод, позволяющий найти существенно более широкий класс нелинейных эволюционных уравнений, которые можно решать, воспользовавшись прямой и обратной задачей рассеяния. Они назвали эту процедуру «преобразованием обратной задачи рассеяния» [1]). (Ниже будет употребляться выражение «метод обратной задачи рассеяния» (МОЗР).)

Настоящая монография посвящена солитонам и МОЗР. Многочисленные достижения в этой области привлекли к себе внимание многих математиков, физиков и инженеров. Мы надеемся, что, собрав наиболее важные идеи этой теории и изложив их в одной книге, мы принесем пользу и начинающим, и «профессионалам». Основные трудности при этом связаны с чрезвычайно интенсивным развитием теории, продолжающимся и по сей день.

Имеется несколько обзоров (см., например, [452, 381, 382, 3, 344] и сборников статей (см., например, [396, 380, 332]), отно-

---

[1]) В оригинале «The Inverse Transform Method». Авторы используют этот термин на протяжении всей монографии. Выражение «метод обратной задачи рассеяния» было предложено в работе Захарова и Шабата [546] (1974) и является общепризнанным в советской и значительной части зарубежной литературы. — *Прим. ред.*

сящихся к предмету. Во время написания настоящей книги не было ни одной монографии по теории солитонов и МОЗР, хотя мы не сомневаемся, что ситуация скоро изменится [1]).

Изучение уединенных волн началось с наблюдений Дж. Скотта Рассела [437, 438], сделанных более века назад. Рассел впервые наблюдал уединенную волну во время верховой прогулки вдоль узкого судоходного канала. Когда баржа, за которой он следил, остановилась, Рассел отметил, что

> «вперед побежало большое одиночное возвышение — округлый, гладкий и ясно выраженный водяной холм, который продолжал свой путь вдоль канала, нисколько не меняя своей формы и не снижая скорости... Его высота постепенно уменьшалась, и через одну или две мили погони я потерял его из виду в изгибах канала. Так в августе 1834 г. мне впервые посчастливилось наблюдать это необычное и красивое явление»... [437]

Это наблюдение вдохновило Рассела начать систематическое экспериментальное исследование поверхностных волн на воде. Он разделил все поверхностные волны на два типа: «большие простые волны трансляции» (которые в дальнейшем стали называть уединенными волнами) и все остальные волны, которые «принадлежат ко *второму, или колебательному, типу* волн». Последние не являются волнами «первого типа» [437] Очевидно, что он рассматривал уединенные волны как имеющие первостепенную важность и сконцентрировал на них свое внимание. Среди множества его результатов мы хотели бы отметить следующие:

1. На мелкой воде *могут* распространяться длинные уединенные волны неизменной формы. Это, несомненно, наиболее важный его результат.

2. Скорость распространения уединенной волны по каналу постоянной глубины дается формулой

$$v = \sqrt{g\,(h + \eta)},$$

где η «является высотой гребня волны над поверхностью спокойной жидкости, h — глубина спокойной жидкости и g — ускорение свободного падения» [438]. Если учесть, с какой точностью мог Рассел проводить свои измерения, этот результат является замечательным.

Рассел обнаружил, что до сих пор не существует математической теории, объясняющей уединенную волну, но отметил, что

> «Не следует думать, что после открытия ее существования не будут предприняты попытки привести этот факт в соответствие с существующей теорией, иначе говоря, показать, что ее следовало ожидать исходя из известных уравнений движения жидкости. Другими словами, теперь следует

---

[1]) Во время корректуры этой монографии вышли из печати книги Захарова, Манакова, Новикова, Питаевского [539] и Лэма [313].

математически предсказать уже совершившееся открытие, т. е. дать априорную демонстрацию апостериори». (Рассел (1844) [438]).

По-видимому, Рассел с особой подозрительностью относился к Эйри, который в своей книге «Приливы и волны» [37] опубликовал теорию длинных волн малой, но конечной амплитуды. Эта теория, кратко изложенная в монографии Лэмба [314, §§ 175, 187], утверждает: «Когда возвышение η не мало по сравнению со средней глубиной h, волны даже в канале постоянной глубины и прямоугольного сечения не могут распространяться вдоль без изменения своего вида». Таким образом, заключал Эйри, уединенные волны неизменной формы не существуют! Он также нашел приближенную формулу для скорости волн

$$v = \sqrt{gh}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\eta}{h}\right),$$

которая согласуется с формулой Рассела в первом порядке по η/h. Отсюда Эйри делал следующий вывод: «Из этих [т. е. проделанных Расселом] экспериментов мы вправе заключить, что теория [предложенная Эйри] полностью подтверждена». Рассел охарактеризовал заключение Эйри как «полностью противоположное тому, которое следовало бы сделать на данном основании».

Эта полемика продолжалась на протяжении следующих пятидесяти лет, пока она не была окончательно разрешена Кортевегом и де Фризом [28]. Они вывели уравнение (ныне известное как уравнение Кортевега — де Фриза, или уравнение КдФ), которое описывает поведение волн умеренной амплитуды на поверхности неглубокой жидкости. Это уравнение имеет решение в виде стационарно распространяющихся волн, в том числе солитонов.

Буссинеск [75, 76] также получил нелинейное эволюционное уравнение, описывающее подобные волны, и нашел для него солитонное решение. Такое решение получил также Рэлей (1876) [426]. После этих ранних работ уравнение Кортевега — де Фриза не находило, как отмечал Миура [381], новых приложений вплоть до 1960 г., когда Гарднер и Морикава [174], изучая магнитогидродинамические волны в бесстолкновительной плазме, снова не вывели это уравнение [1]).

Новые исследования по уравнению КдФ были стимулированы физической проблемой, известной как проблема Ферми, Паста, Улама (1955) [153]. В 1914 г. Дебай [134] предположил, что конечность теплопроводности решетки из ангармонических осцилляторов объясняется нелинейностью системы. Это побу-

---

[1]) Солитоны в бесстолкновительной плазме были ранее открыты и систематически изучены Р. З. Сагдеевым в 1956, 1958 гг. — *Прим. ред.*

дило Ферми, Паста и Улама предпринять численное изучение одномерной ангармонической цепочки осцилляторов. Они предполагали, что из-за нелинейности релаксация любого гладкого начального возмущения быстро приведет к равнораспределению энергии по степеням свободы системы.

Эти авторы рассматривали цепочки частиц одинаковой массы, каждая из которых соединена с ближайшими соседями нелинейными пружинами, сила натяжения которых зависит от растяжения по закону $F(\Delta) = -K(\Delta + \alpha\Delta^2)$. Уравнения движения имеют вид

$$\frac{m}{K} y_{i,tt} = (y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i) + \alpha\left[(y_{i+1} - y_i)^2 - (y_i - y_{i-1})^2\right], \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad y_0 = y_N = 0, \tag{1.1.1}$$

а типичное начальное условие $y_i(0) = \sin i\pi/N$, $y^{(0)}_{i,t} = 0$ (обычно выбиралось $N = 64$). Здесь y_i означает отклонение i-й частицы от равновесия.

Процитируем Ферми, Паста и Улама [153].

«В результате наших вычислений обнаружились явления, которые с самого начала удивили нас. Вместо последовательного непрерывного потока энергии от первой моды к высшим .. происходил энергообмен лишь между несколькими низшими модами... Почти не наблюдалось тенденции к равнораспределению энергии по степеням свободы за данное время. Иначе говоря, в системе определенно не было перемешивания».

Для того чтобы понять это явление, Краскал и Забужский (1963) [300] рассмотрели непрерывную модель. Полагая расстояние между пружинами h, $t' = \omega t$ ($\omega = \sqrt{K/m}$, $x' = x/h$, причем $x = ih$, и разлагая $y_{i\pm1}$ в ряд Тейлора, приводим уравнение (1.1.1) к виду (штрихи у t и x опускаем)

$$y_{tt} = y_{xx} + \varepsilon y_x y_{xx} + \frac{h^2}{12} y_{xxxx} + O(\varepsilon h^2, h^4), \tag{1.1.2}$$

где $\varepsilon = 2\alpha h$. Дальнейшая редукция возможна, если мы ищем асимптотические решения (простые волны) вида

$$y \sim \varphi(X, T), \quad X = x - t, \quad T = \frac{\varepsilon t}{2},$$

тогда (1.1.2) дает

$$\varphi_{XT} + \varphi_X\varphi_{XX} + \delta^2\varphi_{XXXX} + O\left(h^2, \frac{h^4}{\varepsilon}\right) = 0, \tag{1.1.3}$$

где $\delta^2 = h^2/12\varepsilon$. Положив $u = \varphi_X$, получим, что уравнение (1.1.3) сводится к уравнению, открытому в 1895 г. Кортевегом и де Фризом [291]:

$$u_T + uu_X + \delta^2 u_{XXX} = 0. \tag{1.1.4}$$

Краскал и Забужский решали на ЭВМ уравнение (1.1.4) с синусоидальными начальными условиями. При малом δ^2 крутизна

«горба» начального условия возрастала, пока не становился важным член с третьей производной. На этой стадии решение развивается в специфическую осцилляторную структуру. Возникают осцилляции, взаимодействующие между собой вполне определенным и довольно неожиданным способом, который мы обсудим ниже. Именно попытки понять природу этих осцилляций привели к современному пониманию свойств решений уравнения КдФ. (Интересно отметить, что к исследованию уравнения (1.1.4) при малых δ^2 вновь обратились в 1979 г. Лакс и Левермор [321].)

Далее мы будем работать с уравнением КдФ, записанным в следующей форме:

$$K(u) = u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \qquad (1.1.5)$$

Уравнение (1.1.5) эквивалентно (1.1.4) (отметим, что перед каждым из трех членов уравнения можно подходящим изменением масштаба независимых и зависимых переменных поставить произвольные постоянные коэффициенты).

Краскалу и Забужскому был известен давно обнаруженный факт, что КдФ обладает частным решением в виде уединенной волны неизменной формы

$$u = 2k^2/\mathrm{ch}^2\,[k\,(x - 4k^2t - x_0)], \qquad (1.1.6)$$

где k и x_0 являются константами. Отметим, что скорость солитона $4k^2$ пропорциональна его амплитуде $2k^2$. Что было неизвестно предыдущим исследователям, так это удивительный факт упругости взаимодействия солитонов. Пытаясь понять природу обсуждавшихся колебаний, Забужский и Краскал обнаружили следующее. Пусть при $t = 0$ заданы две волны вида (1.1.6), находящиеся на достаточно большом расстоянии друг от друга, причем меньшая из них находится справа. Через некоторое время волны встречаются и начинают взаимодействовать (большая поглощает меньшую). Затем большая волна вновь отделяется от меньшей и постепенно (асимптотически) восстанавливает свою первоначальную форму, а следовательно, и скорость. Весь эффект взаимодействия сведется только к сдвигу фаз, в результате которого центры волн будут несколько сдвинуты по сравнению с тем, какими они были бы при свободном движении (см. рис. 1.1).

Поскольку имеется аналогия с частицами, Забужский и Краскал назвали такие волны *солитонами*. Следуя им, мы будем называть солитонами любые локализованные нелинейные волны, которые взаимодействуют с произвольными локальными возмущениями и всегда восстанавливают асимптотически свою точную первоначальную форму (с возможным сдвигом фазы). Для локализованных волн, взаимодействующих неупругим образом, мы

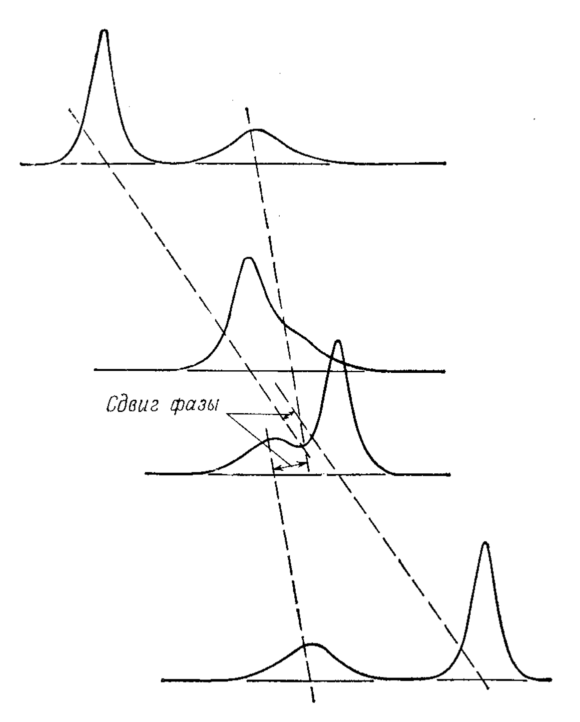


Рис. 1.1. Типичная картина взаимодействия двух солитонов в последовательные моменты времени.

сохраним термин «уединенная волна». Следует отметить, что в литературе существует много разных определений того, что является и что не является солитоном. Нашим целям адекватно данное выше определение.

Попытки понять причину возникновения осцилляций при численном решении уравнения (1.1.4) привели к обсуждению вопроса об «обратимых» ударных волнах. На фронте ударной волны происходит скачок характеристик среды; вопрос о скачках тесно связан с вопросом о законах сохранения. (Закон сохранения — это уравнение вида $\partial T/\partial t + \partial F/\partial x = 0$, где T называют плотностью, а F — потоком по аналогии с потоком жидкости.) Первоначально у уравнения (1.1.4) было обнаружено четыре закона сохранения. Миура [381] открыл еще несколько законов сохранения, и были высказаны предположения, что их имеется бесконечно много.

Изучая эти законы сохранения и законы сохранения, связанные с еще одним совершенно новым эволюционным уравнением (его обычно называют модифицированным уравнением Корте-

вега — де Фриза, или мКдФ),

(1.1.7) $$M(v) = v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0,$$

Миура (1968) [379] обнаружил следующее преобразование. Если v — решение (1.1.7), то

(1.1.8) $$u = -(v^2 + v_x)$$

является решением (1.1.5). Точнее,

(1.1.9) $$K(u) = -\left(2v + \frac{\partial}{\partial x}\right) M(v).$$

Преобразование однозначно лишь в одну сторону, поскольку в правой части (1.1.9) имеется оператор дифференцирования.

Именно преобразование (1.1.9) привело к другим важным результатам для уравнения КдФ. Первоначально это преобразование было основой для доказательства наличия бесконечной серии законов сохранения для КдФ (Миура, Гарднер и Краскал (1968) [383]). Основная идея была следующая. Поскольку уравнение КдФ является инвариантным относительно преобразований Галилея, в частности вида

(1.1.10a) $$x' = x + \frac{6}{\varepsilon^2} t, \quad t' = t, \qquad u(x, t) = u'(x', t') - \frac{1}{\varepsilon^2},$$

то, полагая

(1.1.10b) $$v(x, t) = -\varepsilon w(x', t') + \frac{1}{\varepsilon},$$

преобразуем уравнение мКдФ к виду

(1.1.10c) $$w_{t'} + \frac{\partial}{\partial x'}(3w^2 + 3\varepsilon^2 w^3 + w_{x'x'}) = 0.$$

Ясно, что $\int_{-\infty}^{\infty} w\,dx'$ является сохраняющейся величиной для (1.1.10c). Преобразование Миуры (1.1.8), (1.1.10a, b) дает

(1.1.10d) $$u' = 2w + \varepsilon w_{x'} - \varepsilon^2 w^2.$$

Считая $\varepsilon \ll 1$, мы можем рекуррентным образом разрешить (1.1.10d) относительно w, т. е.

(1.1.10e) $$w = w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \ldots = \frac{u'}{2} - \frac{\varepsilon}{4} u'_{x'} + \frac{\varepsilon^2}{4}\left(\frac{u'_{x'x'}}{2} + u'^2\right) + \ldots .$$

Таким образом, (1.1.10e) позволяет найти бесконечный набор законов сохранения. Ниже в разд. 1.6 мы дадим другое

доказательство того факта, что КдФ, мКдФ и др. обладают бесконечным набором сохраняющихся величин (или плотностей). Более того, будет показано, что законы сохранения с четными номерами являются нетривиальными (т. е. T не является полной производной по x).

Однако самым важным результатом усилий по изучению уравнения КдФ было открытие нового метода математической физики — метода обратной задачи рассеяния (МОЗР). Он также появился благодаря преобразованию (1.1.8). Заметим, что (1.1.8) можно рассматривать как уравнение Рикатти относительно v; хорошо известное преобразование $v = \Psi_x/\Psi$ линеаризует (1.1.8), давая

$$\Psi_{xx} + u\Psi = 0.$$

Так как уравнение КдФ является галилеевски инвариантным, то для большей общности Миура, Гарднер и Краскал (1968) [383] рассмотрели уравнение

$$\Psi_{xx} + (\lambda + u)\Psi = 0. \tag{1.1.11}$$

Оказалось, что это уравнение дает неявную линеаризацию уравнения КдФ. Уравнение (1.1.11) само весьма немаловажно, поскольку является по существу стационарным уравнением Шрёдингера.

Гарднер, Грин, Краскал и Миура (1967) [172], (1974) [173] первыми открыли метод решения КдФ, использующий (1.1.11). Хотя мы отклонимся от их первоначальной процедуры, в идейном плане изложение будет, конечно, сходным. Мы постулируем, что с уравнением (1.1.11) ассоциировано некоторое эволюционное уравнение

$$\Psi_t = A\Psi + B\Psi_x, \tag{1.1.12}$$

где A, B — скалярные функции, не зависящие от Ψ (отметим, что это наиболее общий вид линейного уравнения первого порядка по времени). Если u подчиняется уравнению КдФ (1.1.5) и если мы выбираем

$$A = u_x, \qquad B = 4\lambda - 2u, \tag{1.1.13}$$

то легко показать, что собственные значения в (1.1.11) не зависят от времени, т. е. $\lambda_t = 0$. Читатель может проверить, налагая условие совместности $\Psi_{txx} = \Psi_{xxt}$, что

$$[K(u) + \lambda_t]\Psi = 0. \tag{1.1.14}$$

Теперь если $K(u) = 0$, то $\lambda_t = 0$. В разд. 1.2 мы дадим дедуктивную процедуру нахождения A, B. Мы покажем, что существует бесконечно много уравнений, связанных таким же образом с (1.1.11), но с другими A, B.

В последующих разделах мы обсудим, как результаты (1.1.11)—(1.1.14) можно использовать при восстановлении потенциала $u(x, t)$ по заданному $u(x, t=0)$. Применяемый для этого метод довольно сложен и подходит для многих физически интересных эволюционных уравнений. Полученные результаты приложимы к разным физическим задачам, как будет показано в гл. 4. Применяемые математические методы также весьма разнообразны; они относятся и к классическому анализу, и к дифференциальной геометрии, и к алгебре, и алгебраической геометрии (см. также гл. 3).

1.2. Задача рассеяния для оператора второго порядка и связанные с ней интегрируемые уравнения в частных производных. Метод обратной задачи рассеяния (МОЗР), как отмечалось в разд. 1.1, был развит Гарднером, Грином, Краскалом и Миурой [172, 173] применительно к уравнению Кортевега — де Фриза (КдФ) и его аналогам более высокого порядка. В то время и даже несколько позднее не было ясно, применим ли этот метод к другим важным в физических приложениях нелинейным эволюционным уравнениям. Захаров и Шабат (1971) [544] показали, что применимость МОЗР к уравнению КдФ не была случайной удачей. Используя прием, впервые предложенный Лаксом (1968) [318], они показали, что нелинейное уравнение Шрёдингера

(1.2.1) $$iq_t = q_{xx} + \varkappa q^2 q^*, \quad \varkappa > 0,$$

связано с задачей рассеяния для некоторого линейного оператора. Используя идею прямой и обратной задачи рассеяния, они смогли решить уравнение (1.2.1) для заданных начальных данных $q(x, 0)$, достаточно быстро убывающих при $|x| \to \infty$. Вскоре Вадати (1972) [492], используя эти идеи, предложил метод решения модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза (мКдФ)

(1.2.2) $$q_t + 6q^2 q_x + q_{xxx} = 0,$$

а Абловиц, Кауп, Ньюэлл и Сигур (1973) [10] проделали то же самое для уравнения sin-Гордон

(1.2.3) $$u_{xt} = \sin u.$$

Уже эти результаты показали мощность и многосторонность МОЗР для решения некоторых нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, интересных с точки зрения физических приложений.

Затем Абловиц, Кауп, Ньюэлл и Сигур [11, 12] предложили схему, которая по подходящей заданной задаче рассеяния позволяла найти нелинейные эволюционные уравнения, решаемые МОЗР. Например, можно показать, что уравнения КдФ, мКдФ,

sin-Гордон и нелинейное уравнение Шрёдингера связаны с одной общей задачей рассеяния.

Мы начнем с краткого рассмотрения идей, лежащих в основе работы Лакса [318]. Рассмотрим два оператора L, M, причем для оператора L поставлена спектральная задача, а оператор M определяет эволюцию собственной функции по времени:

(1.2.4a) $$Lv = \lambda v,$$

(1.2.4b) $$v_t = Mv.$$

С уравнением КдФ связана задача рассеяния для уравнения Шрёдингера (1.1.11). Таким образом, в этом случае $L = \partial_x^2 + u(x, t)$.

Вычисляя производную по времени от (1.2.4a) и предполагая $\lambda_t = 0$, мы получим $L_t v + L v_t = \lambda v_t$. Подстановка (1.2.4b) дает условие, которое необходимо для совместности (1.2.4a, b):

(1.2.4c) $$L_t + [L, M] = 0,$$

где $[L, M] = LM - ML$ (коммутатор L и M). Уравнение (1.2.4c) содержит нелинейное эволюционное уравнение, если L и M *правильно* выбраны. Лакс [318] указал, как по заданному L построить такой оператор M, чтобы уравнение (1.2.4c) было нетривиальным.

С этим методом связаны следующие трудности: во-первых, нужно «угадать» подходящий оператор L и затем найти такой оператор M, чтобы удовлетворить (1.2.4). Во-вторых, часто очень неудобно работать с дифференциальными операторами (например, в случае уравнения sin-Гордон (1.2.3)). Другую схему, которую предложили Абловиц, Кауп, Ньюэлл и Сигур [12], можно сформулировать следующим образом. Рассмотрим два линейных уравнения:

(1.2.5a) $$\mathbf{v}_x = X\mathbf{v},$$

(1.2.5b) $$\mathbf{v}_t = T\mathbf{v},$$

где $\mathbf{v}$ есть n-мерный вектор, а X, T являются $n \times n$-матрицами. Применим к (1.2.5) перекрестное дифференцирование (т. е. $\partial/\partial t$ к (1.2.5a) и $\partial/\partial x$ к (1.2.5b)) и приравняем правые части. Это дает

(1.2.6) $$X_t - T_x + [X, T] = 0,$$

что эквивалентно (1.2.4c). Оказывается, что для заданного X имеется простая дедуктивная процедура для нахождения T, причем такая, что (1.2.6) превращается в нелинейное эволюционное уравнение. Для того чтобы уравнение (1.2.6) было нетривиальным, оператор X должен зависеть от некого параметра ζ, играющего роль собственного значения, причем $\zeta_t = 0$. Более того,

полное решение ассоциированного нелинейного эволюционного уравнения на бесконечном интервале можно найти лишь в том случае, когда соответствующая задача рассеяния может быть эффективно решена аналитически. (Хотя в настоящее время известно немало нелинейных эволюционных уравнений, удовлетворяющих (1.2.6), но теория прямой и обратной задачи рассеяния для многих операторов (1.2.5a) пока что недостаточно развита.)

В качестве примера рассмотрим задачу на собственные значения, представляющую собой модификацию задачи рассеяния Захарова — Шабата [544]:

(1.2.7a)
$$v_{1x} = -i\zeta v_1 + q v_2,$$
$$v_{2x} = i\zeta v_2 + r v_1,$$

а наиболее общая временна́я зависимость, содержащая первые производные по t, имеет вид

(1.2.7b)
$$v_{1t} = A v_1 + B v_2,$$
$$v_{2t} = C v_1 + D v_2,$$

где A, B, C, D — скалярные функции, не зависящие от $\mathbf{v}$. Соотношения (1.2.7a, b) играют ту же роль, что и (1.2.5a, b), при этом X и T даются правыми частями (1.2.7a, b) соответственно. Отметим, что если бы в правой части (1.2.7) были производные по x, то их можно было бы исключить, воспользовавшись (1.2.7a). Кроме того, когда $r = -1$, (1.2.7a) можно привести к шрёдингеровой задаче рассеяния

$$v_{2xx} + (\zeta^2 + q) v_2 = 0$$

(в этом случае ζ^2 играет роль параметра λ в (1.2.4a)).

Интересно отметить, что в случае $r = -1$ или $r = \pm q^*$ (или $r = \pm q$, если q вещественно) из указанного формализма вытекают нелинейные эволюционные уравнения, важные для физических приложений. Кроме того, для $r = -1$, т. е. когда мы имеем уравнение Шрёдингера, вопрос об обратной задаче рассеяния был рассмотрен многими авторами. Обзор работ, касающихся задачи рассеяния на бесконечной прямой, можно найти в работах Фаддеева [152] или недавней работе Дейфта и Трубовица [136]. Систему (1.2.7a) иногда называют системой дифференциальных уравнений Дирака (отметим, что обратная задача рассеяния для некоторого специального случая системы (1.2.7a) была рассмотрена Гасымовым и Левитаном (1966) [179]).

Далее в этом разделе мы опишем простой алгоритм, позволяющий находить нелинейные эволюционные уравнения вида (1.2.6) для описанных систем. В последующих разделах мы рассмотрим вывод уравнений прямой и обратной задачи рассеяния, а также системы более высокого порядка.

Совместность (1.2.7a) и (1.2.7b) означает, что должны выполняться некоторые условия на $A, \ldots, D$. Требуя $(v_{ix})_t = (v_{it})_x$ (т. е. равенства смешанных производных (1.2.7a) и (1.2.7b)) и предполагая независимость собственных значений от времени ($\partial\zeta/\partial t = 0$), мы без труда обнаружим, что функции $A, \ldots, D$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$A_x = qC - rB,$$
$$B_x + 2i\zeta B = q_t - (A - D)\, q,$$
$$C_x + 2i\zeta C = r_t + (A - D)\, r,$$
$$(-D)_x = qC - rB.$$

Без потери общности в дальнейшем мы будем считать $A = -D$. Таким образом,

(1.2.8a) $$A_x = qC - rB,$$

(1.2.8b) $$B_x + 2i\zeta B = q_t - 2Aq,$$

(1.2.8c) $$C_x - 2i\zeta C = r_t + 2Ar.$$

Теперь нам надо решить систему уравнений (1.2.8) относительно A, B, C. Это гарантирует совместность (1.2.7a, b). Систему (1.2.8) можно решать, если выполнено некоторое условие, которое на самом деле является эволюционным уравнением. Известно несколько методов получения этого уравнения. Опишем процедуру, связанную с разложением в ряд. В разд. 1.5 выведено (с использованием операторного метода) общее эволюционное уравнение. Отправной точкой другого подхода, предложенного Захаровым и Шабатом, является линейное интегральное уравнение. Этот подход мы обсудим позже в разд. 3.6.

Поскольку собственное значение ζ является свободным параметром (он может быть малым), мы попытаемся отыскать точное решение уравнения (1.2.8), являющееся конечным степенным рядом по ζ. Простейшее разложение, приводящее к интересным нелинейным уравнениям, имеет вид

(1.2.9) $$A = A_2\zeta^2 + A_1\zeta + A_0,$$
$$B = B_2\zeta^2 + B_1\zeta + B_0,$$
$$C = C_2\zeta^2 + C_1\zeta + C_0.$$

Подставим (1.2.9) в (1.2.8) и приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях ζ. Коэффициенты при ζ^3 [см. (1.2.8b) и (1.2.8c)] немедленно дают равенства $B_2 = C_2 = 0$. Для ζ^2 из (1.2.8a) следует $A_2 = a_2 = \text{const}$, а из (1.2.8b, c) получаем $B_1 = ia_2 q$, $C_1 = ia_2 r$ соответственно. Коэффициенты при ζ приводят к следующим соотношениям. Из (1.2.8a) имеем $A_1 = a_1 = \text{const}$. Для

простоты положим $a_1 = 0$ (если $a_1 \neq 0$, то получится более общее эволюционное уравнение). Тогда (1.2.8b) дает $B_0 = -a_2 q_x/2$; (1.2.8c) дает $C_0 = a_2 r_x/2$. И наконец, коэффициенты при ζ^0 дают $A_0 = a_2 qr/2 + a_0$, снова $a_0 = \text{const}$ и мы положим $a_0 = 0$. Тогда (1.2.8b) и (1.2.8c) в порядке ζ^0 дают уравнения

$$-\frac{1}{2} a_2 q_{xx} = q_t - a_2 q^2 r, \tag{1.2.10a}$$

$$\frac{1}{2} a_2 r_{xx} = r_t + a_2 q r^2. \tag{1.2.10b}$$

Это пара связанных нелинейных эволюционных уравнений, которые напоминают нелинейное уравнение Шрёдингера. Действительно, нелинейное уравнение Шрёдингера получится, если мы положим $r = \mp q^*$. При этом уравнения (1.2.10a) и (1.2.10b) будут совместными тогда и только тогда, когда $a_2 = i\alpha$, α вещественно. Если мы положим $\alpha = 2$, то получим уравнение

$$iq_t = q_{xx} \pm 2q^2 q^*. \tag{1.2.11}$$

При положительном знаке в этом уравнении могут быть найдены солитонные решения, если же знак отрицателен, то не существует солитонных решений, быстро убывающих на ∞ (поскольку оператор (1.2.7a) в последнем случае является эрмитовым).

Итак, если мы выбрали задачу на собственные значения для оператора (1.2.7a) и связанную с ней временну́ю зависимость (1.2.7b), тогда условием их совместности являются (1.2.8). В этом примере мы берем разложение (1.2.9) и, подставляя его в (1.2.8), дедуктивно и систематически выводим, что при $r = \mp q^*$

$$\begin{aligned} A &= +2i\zeta^2 \pm iqq^*, \\ B &= 2q\zeta + iq_x, \\ C &= \mp 2q^*\zeta \pm iq^*_x. \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

Эти функции удовлетворяют (1.2.8) тогда, когда $q(x, t)$ удовлетворяет нелинейному уравнению Шрёдингера (1.2.11).

Такую процедуру можно выполнить для любого полинома по ζ. Мы приведем результаты в наиболее важных случаях. Заинтересовавшийся читатель может сам их проверить, используя описанные выше идеи. В случае полиномов третьей степени по ζ мы имеем

$$A = a_3\zeta^3 + a_2\zeta^2 + \frac{1}{2}(a_3 qr + a_1)\zeta + \frac{1}{2} a_2 qr - \\ - \frac{ia_3}{4}(qr_x - rq_x) + a_0,$$

(1.2.13)
$$B = ia_3q\zeta^2 + \left(ia_2q - \frac{1}{2}a_3q_x\right)\zeta + ia_1q + \frac{i}{2}a_3q^2r - \frac{1}{2}a_2q_x - \frac{i}{4}a_3q_{xx},$$
$$C = ia_3r\zeta^2 + \left(ia_2r + \frac{1}{2}a_3r_x\right)\zeta + ia_1r + \frac{i}{2}a_3r^2q + \frac{1}{2}a_2r_x - \frac{i}{4}a_3r_{xx},$$

и эволюционные уравнения имеют вид

(1.2.14a)
$$q_t + \frac{i}{4}a_3(q_{xxx} - 6qrq_x) + \frac{1}{2}a_2(q_{xx} - 2q^2r) - ia_1q_x - 2a_0q = 0,$$

(1.2.14b)
$$r_t + \frac{i}{4}a_3(r_{xxx} - 6rqr_x) - \frac{1}{2}a_2(r_{xx} - 2r^2q) - ia_1r_x + 2a_0r = 0.$$

Эволюционные уравнения, интересные с физической точки зрения, возникают как частные случаи. Возьмем $a_0 = a_1 = 0$, $a_3 = -4i$ и $r = -1$, в результате получим

(1.2.15)
$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} \quad (\text{КдФ}).$$

Если $r = \mp q$, то

(1.2.16)
$$q_t \pm 6q^2q_x + q_{xxx} = 0 \quad (\text{мКдФ}).$$

Отметим, что если взять $a_0 = a_1 = a_3 = 0$, $a_2 = -2i$, и $r = \mp q^*$, мы получим (1.2.11).

Тем же способом, которым мы получили эволюционные уравнения, соответствующие разложению A, B, C по положительным степеням ζ, можно также найти уравнения, соответствующие разложению по обратным степеням ζ (или по положительным и отрицательным). Например, полагая

$$A = a(x, t)/\zeta, \quad B = b(x, t)/\zeta, \quad C = c(x, t)/\zeta,$$

получаем

(1.2.17)
$$a_x = \frac{1}{2}(qr)_t, \quad q_{xt} = -4iaq, \quad r_{xt} = -4iar.$$

В частных случаях

(1.2.18)
$$a = \frac{i}{4}\cos u, \quad b = c = \frac{i}{4}\sin u, \quad q = -r = -u_x/2,$$
$$u_{xt} = \sin u \quad (\text{уравнение sin-Гордон}),$$

и

(1.2.19)
$$a = i/4\,\text{ch}\,u, \quad b = -c = i/4\,\text{sh}\,u, \quad q = r = \frac{u_x}{2},$$
$$u_{xt} = \text{sh}\,u, \quad (\text{уравнение sh-Гордон}).$$

Перечисленные выше уравнения представляют собой всего лишь несколько примеров, полученных при помощи процедуры разложения.

Для $r = -1$ имеется другой подход, использующий задачу рассеяния для оператора Шрёдингера и подходящую ассоциированную с ним временну́ю зависимость, а именно:

(1.2.20a) $$v_{xx} + (\lambda + q) v = 0,$$

(1.2.20b) $$v_t = Av + Bv_x.$$

Вышеописанная процедура сводится в данном случае к вычислению производной по времени от (1.2.20a), второй производной по координате от (1.2.20b) и исключению v_{txx} из полученных равенств. Приравнивая нулю коэффициенты при v, v_x, получим условия совместности

(1.2.21a) $$A_{xx} - 2B_x(\lambda + q) - Bq_x = -q_t,$$

(1.2.21b) $$B_{xx} + 2A_x = 0,$$

аналогичные (1.2.8). Разлагая A и B по степеням λ (при $r = -1$ в (1.2.7a) $\lambda = \zeta^2$), получаем нелинейные эволюционные уравнения. Например, представляя A и B в виде

$$A = A_1\lambda + A_0, \quad B = B_1\lambda + B_0$$

и приравнивая нулю коэффициенты при степенях λ, имеем

$$B_1 = b_1 = \text{const}, \qquad A_1 = a_1 = \text{const},$$
$$B_0 = -\frac{b_1}{2} q, \qquad A_0 = \frac{b_1}{4} q_x + a_0 \quad (a_0 = \text{const});$$

дополнительное ограничение представляет собой нелинейное эволюционное уравнение. Положив $b_1 = 4$, $a_1 = 0 = a_0$, получим уравнение КдФ

(1.2.22) $$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0,$$

причем временна́я зависимость собственной функции имеет вид

(1.2.23) $$v_t = q_x v + (4\lambda - 2q) v_x.$$

Найдя λv из (1.2.20a), мы можем переписать (1.2.23) в другой форме:

(1.2.24a) $$v_t + 4v_{xxx} + 6qv_x + 3q_x v = 0,$$

или

(1.2.24b) $$v_t + v_{xxx} + 3(q - \lambda) v_x = 0.$$

Такая форма зависимости собственных функций от времени является типичной в подходе Лакса [318].

Другие нелинейные эволюционные уравнения получаются из разложений, отличных от вышеописанных. Эта процедура приводит к тем же результатам, что и подход Лакса (1.2.4), и является чисто алгебраической по своей природе.

Интересное видоизменение этого подхода недавно предложили Кауп и Ньюэлл [266] и Вадати, Коно, Итикава [493]. Если мы заменим (1.2.7) на

$$\begin{aligned} v_{1x} &= -i\zeta v_1 + \zeta q v_2, \\ v_{2x} &= i\zeta v_2 + \zeta r v_1 \end{aligned} \tag{1.2.25a}$$

и

$$\begin{aligned} v_{1t} &= A v_1 + B v_2, \\ v_{2t} &= C v_1 - A v_2, \end{aligned} \tag{1.2.25b}$$

тогда вместо условия совместности (1.2.8) нужно потребовать, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{aligned} A_x &= \zeta (qC - rB), \\ B_x + 2i\zeta B &= \zeta (q_t - 2qA), \\ C_x - 2i\zeta C &= \zeta (r_t + 2rA). \end{aligned} \tag{1.2.26}$$

Как и раньше, конечные разложения A, B, C по степеням ζ приводят к множеству нелинейных эволюционных уравнений, связанных с (1.2.25). В качестве примера, взяв $r = -1$, $q = u - 1$,

$$\begin{aligned} A &= -i4u^{-1/2}\zeta^3 - u^{-3/2}u_x\zeta^2, \\ B &= 4u^{-1/2}(u-1)\zeta^3 + 2iu^{-3/2}u_x\zeta^2 - (u^{-3/2}u_x)_x\zeta, \\ C &= -4u^{-1/2}\zeta^3, \end{aligned}$$

мы получим уравнение Дима (Краскал [298])

$$u_t = 2(u^{-1/2})_{xxx}. \tag{1.2.27}$$

1.3. Вывод линейного интегрального уравнения и обратная задача рассеяния на бесконечном интервале. В этом разделе мы изучим прямую и обратную задачу рассеяния для системы (1.2.7а). Мы попытаемся проиллюстрировать основные идеи, по возможности избегая засилья точных математических формулировок и теорем. В самом деле, даже в классическом случае задачи рассеяния для оператора Шрёдингера строгая теория весьма громоздка (см., например, [33, 152, 398, 136]), а для задачи рассеяния (1.2.7) возникают новые трудности.

Прежде всего мы предположим, что q и r достаточно быстро стремятся к нулю при $|x| \to \infty$. Отметим, что это предложение очень важно, поскольку теория рассеяния с другими граничными условиями приводит к совершенно другим результатам. Быстрое

убывание позволяет определить собственные функции φ, $\bar{\varphi}$, ψ, $\bar{\psi}$ со следующими граничными условиями при $\zeta = \xi$ ($\zeta = \xi + i\eta$ — собственное значение):

$$\left.\begin{aligned} \varphi &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} \\ \bar{\varphi} &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} \end{aligned}\right\} \text{ при } x \to -\infty \tag{1.3.1}$$

$$\left.\begin{aligned} \psi &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} \\ \bar{\psi} &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} \end{aligned}\right\} \text{ при } x \to +\infty.$$

(Отметим, что $\bar{\varphi}$ не является комплексным сопряжением φ; мы будем пользоваться обозначением φ^* для комплексного сопряжения.) Это решение определено в фиксированный момент времени (скажем, при $t = 0$), и вся развиваемая в этом разделе теория рассеяния (прямая и обратная) относится к этому фиксированному моменту времени. В следующем разделе мы покажем, как получить зависящие от времени волновые функции, удовлетворяющие одновременно уравнениям (1.2.7a, b), из этих не зависящих от времени функций. Далее в этом разделе мы будем опускать временну́ю зависимость в обозначениях. Теперь, если $u(x, \xi)$ ($u(x, \xi)$ — это 2×1 вектор-столбец с компонентами $u_i(x, \xi)$, $i = 1, 2$) и $v(x, \xi)$ являются решениями (1.2.7a), мы имеем

$$\frac{d}{dx} W(u, v) = 0, \tag{1.3.2a}$$

где $W(u, v)$ — вронскиан u и v:

$$W(u, v) = u_1 v_2 - v_1 u_2. \tag{1.3.2b}$$

Из (1.3.1) мы видим, что $W(\varphi, \bar{\varphi}) = -1$ и $W(\psi, \bar{\psi}) = 1$. Решения ψ, $\bar{\psi}$ являются линейно независимыми; таким образом, мы можем написать

$$\varphi = a(\xi)\bar{\psi} + b(\xi)\psi, \tag{1.3.3a}$$

$$\bar{\varphi} = -\bar{a}(\xi)\psi + \bar{b}(\xi)\bar{\psi}. \tag{1.3.3b}$$

(Знак минус здесь выбран для удобства.) Мы также отметим, что матрица рассеяния определяется обычно следующим образом:

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & -\bar{a} \end{pmatrix}. \tag{1.3.3c}$$

Используя (1.3.3) и $W(\varphi, \bar{\varphi}) = -1$, мы получим

$$a(\xi)\bar{a}(\xi) + b(\xi)\bar{b}(\xi) = 1. \tag{1.3.4}$$

Далее мы установим аналитические свойства данных рассеяния (как функций комплексной переменной ζ). Если q, $r \in L_1$ (т. е. являются абсолютно интегрируемыми), то функции $e^{i\zeta x}\varphi$, $e^{-i\xi x}\psi$ являются аналитическими в верхней полуплоскости ($\eta > 0$), а $e^{-i\zeta x}\bar{\varphi}$, $e^{i\zeta x}\bar{\psi}$ — аналитическими в нижней полуплоскости ($\eta < 0$). Это немедленно приводит к тому, что функция $a = W(\varphi, \psi) = \varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1$ является аналитической в верхней полуплоскости, а $\bar{a} = W(\bar{\varphi}, \bar{\psi})$ — в нижней полуплоскости. Функции $b = -W(\varphi, \bar{\psi})$, $\bar{b} = W(\bar{\varphi}, \psi)$, вообще говоря, не обладают аналитическими свойствами. Для установления свойств аналитичности задачу рассеяния обычно сводят к интегральному уравнению. Например, в случае (1.2.7a) функция φ удовлетворяет уравнению

$$\varphi_1(x, \zeta)e^{i\zeta x} = 1 + \int_{-\infty}^{x} dy \int_{-\infty}^{y} dz\, q(y)\, r(z)\, e^{2i\zeta(y-z)}\varphi_1(z, \zeta), \tag{1.3.5a}$$

или

$$\varphi_1(x, \zeta)e^{i\zeta x} = 1 + \int_{-\infty}^{x} M(x, y, \zeta)\,\varphi_1(y, \zeta)\,e^{i\zeta y}\,dy, \tag{1.3.5b}$$

$$\varphi_2(x, \zeta)e^{i\zeta x} = \int_{-\infty}^{x} e^{2i\zeta(x-y)} r(y)\,\varphi_1(y, \zeta)\,e^{i\zeta y}\,dy, \tag{1.3.5c}$$

где

$$M(x, y, \zeta) = r(y)\int_{y}^{x} e^{2i\zeta(z-y)} q(z)\,dz. \tag{1.3.5d}$$

Если q, r убывают достаточно быстро при $|x| \to \infty$, так что q, $r \in L_1$, то существуют интегралы

$$R_0(x) \equiv \int_{-\infty}^{x} |r(y)|\,dy, \qquad Q_0(x) \equiv \int_{-\infty}^{x} |q(y)|\,dy,$$

и можно показать, что ряд Неймана для рассматриваемого интегрального уравнения типа Вольтерры абсолютно сходится в верхней полуплоскости ($\eta > 0$). Точнее, из (1.3.5a) следует, что

$$|\varphi_1(x, \zeta)e^{i\zeta x}| \leqslant 1 + \int_{-\infty}^{x} dy \int_{-\infty}^{y} dz\, |q(y)|\,|r(z)| + \tag{1.3.6}$$

$$+ \int_{-\infty}^{x} dy \int_{-\infty}^{y} dz \int_{-\infty}^{z} dy_1 \int_{-\infty}^{y_1} dz_1\, |q(y)|\,|r(z)\, q(y_1)|\,|r(z_1)|,$$

поэтому простая оценка дает

(1.3.7) $$|\varphi_1(x,\zeta)e^{i\zeta x}| \leqslant 1 + Q_0(x)R_0(x) + \frac{1}{(2!)^2}Q_0^2(x)R_0^2(x) + \\ + \frac{1}{(3!)^2}Q_0^3(x)R_0^3(x) + \ldots = I_0\left(2\sqrt{Q_0(x)R_0(x)}\right),$$

и видна абсолютная сходимость ряда Неймана для интегрального уравнения (1.3.5) при $\eta > 0$. Отсюда немедленно следует, что $\varphi_j e^{i\zeta x}$ является ограниченной функцией при $\eta > 0$. Аналитичность функции $e^{i\zeta x}\varphi_j(x,\zeta)$ устанавливается повторением описанной процедуры, но для интегрального уравнения, полученного дифференцированием (1.3.5) по ζ.

Простое требование $q, r \in L_1$ не обеспечивает аналитичности данных рассеяния на вещественной оси ($\eta = 0$); для этого на r, q следует наложить более жесткие условия. Воспользовавшись теми же соображениями, можно показать, что если

$$|r(x)| \leqslant Ce^{-2K|x|}, \qquad |q(x)| \leqslant Ce^{-2K|x|},$$

где C, K $(K > 0)$ — константы, то $e^{i\zeta x}\varphi(x,\zeta)$, $e^{-i\zeta x}\psi(x,\zeta)$ и $a(\zeta)$ являются аналитическими при всех $\eta > -K$, а $e^{-i\zeta x}\bar{\varphi}(x,\zeta)$, $e^{i\zeta x}\bar{\psi}(x,\zeta)$ и $\bar{a}(\zeta)$ — аналитическими при всех $\eta < K$. Кроме того, $b(\zeta)$ и $\bar{b}(\zeta)$ являются аналитическими в полосе $K > \eta > > -K$.

Если же r, q убывают быстрее любой экспоненты при $|x| \to \to \infty$, то обсуждавшиеся выше функции являются целыми функциями ζ. Это легко понять в очень частном случае, когда функции r, q имеют финитный носитель, так как тогда (1.3.5) представляют собой интегральные уравнения Вольтерры на конечном интервале. Такие уравнения всегда имеют решения в виде абсолютного сходящегося ряда Неймана (см., например, [424]).

Возвращаясь к (1.3.5) и (1.2.7a), мы можем вычислить асимптотические разложения при больших ζ. Для этого проинтегрируем по частям (1.3.5) и найдем (ζ лежит в верхней полуплоскости)

(1.3.8a) $$\varphi_1 e^{i\zeta x} = 1 - \frac{1}{2i\zeta}\int_{-\infty}^{x} r(y)q(y)\,dy + O(\zeta^{-2}),$$

(1.3.8b) $$\varphi_2 e^{i\zeta x} = -\frac{1}{2i\zeta}r(x) + O(\zeta^{-2})$$

(выражения (1.3.8) мы могли бы найти иначе, используя метод ВКБ для (1.2.7a)). Аналогично получаются разложения для других собственных функций. Для $\psi(\zeta)$ (ζ лежит в верхней

полуплоскости)

$$\psi_1 e^{-i\zeta x} = \frac{1}{2i\zeta} q(x) + O(\zeta^{-2}),$$

(1.3.9)

$$\psi_2 e^{-i\zeta x} = 1 - \frac{1}{2i\zeta} \int_x^\infty r(y) q(y)\, dy + O(\zeta^{-2}),$$

а для $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$ (ζ лежит в нижней полуплоскости)

$$\bar{\varphi}_1 e^{-i\zeta x} = -\frac{1}{2i\zeta} q(x) + O(\zeta^{-2}),$$

(1.3.10)

$$\bar{\varphi}_2 e^{-i\zeta x} = -1 - \frac{1}{2i\zeta} \int_{-\infty}^x q(y) r(y)\, dy + O(\zeta^{-2}),$$

$$\bar{\psi}_1 e^{i\zeta x} = 1 + \frac{1}{2i\zeta} \int_x^\infty q(y) r(y)\, dy + O(\zeta^{-2}),$$

(1.3.11)

$$\bar{\psi}_2 e^{i\zeta x} = -\frac{1}{2i\zeta} r(x) + O(\zeta^{-2}).$$

Таким образом, в соответствующих полуплоскостях мы имеем при $|\zeta| \to \infty$

(1.3.12a) $$a(\zeta) = 1 - \frac{1}{2i\zeta} \int_{-\infty}^\infty q(y) r(y)\, dy + O(\zeta^{-2}),$$

(1.3.12b) $$\bar{a}(\zeta) = 1 + \frac{1}{2i\zeta} \int_{-\infty}^\infty q(y) r(y)\, dy + O(\zeta^{-2}).$$

Если r, q не слишком «малы» (условия малости мы уточним ниже в этом разделе), то оператор (1.2.7a) может обладать дискретными собственными значениями (связанными состояниями). Они возникают, когда функция $a(\zeta)$ имеет нули в верхней полуплоскости ($\eta > 0$) или когда $\bar{a}(\zeta)$ имеет нули в нижней полуплоскости ($\eta < 0$). Нули функции $a(\zeta)$ мы будем обозначать ζ_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, где N — число связанных состояний. При $\zeta = \zeta_k$ функция φ пропорциональна ψ (напомним, что $a = W(\varphi, \psi)$):

(1.3.13a) $$\varphi = C_k \psi.$$

Аналогично, когда $\bar{a}$ имеет нули в нижней полуплоскости в точках $\zeta = \bar{\zeta}_k$, $k = 1, \ldots, \bar{N}$, мы также имеем связанное состояние, и

(1.3.13b) $$\bar{\varphi} = \bar{C}_k \bar{\psi}.$$

Выше отмечалось, что если r, q убывают достаточно быстро при $|x| \to \infty$, то a, b, $\bar{a}$, $\bar{b}$ являются целыми функциями. В этом случае мы можем продолжить b, $\bar{b}$ и получить $C_k = b(\zeta_k)$, $\bar{C}_k = \bar{b}(\bar{\zeta}_k)$. Итак, для удобства здесь мы будем предполагать, что r, q убывают достаточно быстро, точнее

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^n \left\{ \begin{vmatrix} q(x) \\ r(x) \end{vmatrix} \right\} dx < \infty$$

для всех n. В этом случае $a(\zeta)$, $\bar{a}(\zeta)$ являются аналитическими функциями в верхней и нижней полуплоскостях соответственно и на вещественной оси. Это гарантирует нам, что $a(\zeta)$ имеет только конечное число нулей при $\operatorname{Im}\zeta \geqslant 0$ (так как $a(\zeta)$ является аналитической функцией при $\operatorname{Im}\zeta \geqslant 0$, $a(\zeta) \to 1$ при $|\zeta| \to \infty$, нули $a(\zeta)$ изолированы и лежат в ограниченной области).

Задача на собственные значения (1.2.7а) и (1.3.1) отличается от соответствующей задачи для оператора Шрёдингера в следующих отношениях: (i) нули $a(\zeta)$ (т. е. собственные значения) не обязательно лежат на мнимой оси; (ii) $a(\zeta)$ может иметь кратные нули; (iii) $a(\zeta)$ может принимать нулевые значения на вещественной оси $\operatorname{Im}\zeta = 0$, однако эти точки не являются собственными значениями, так как соответствующая собственная функция не является квадратично интегрируемой (см., например, [12]).

Важные с физической точки зрения случаи возникают, когда r пропорционально q^* или q. В случае когда $r = \pm q^*$, из (1.2.7а) следуют соотношения симметрии

$$\bar{\psi}(x,\zeta) = \begin{pmatrix} \psi_2^*(x,\zeta^*) \\ \pm\psi_1^*(x,\zeta^*) \end{pmatrix}, \quad \bar{\varphi}(x,\zeta) = \begin{pmatrix} \mp\varphi_2^*(x,\zeta^*) \\ -\varphi_1^*(x,\zeta^*) \end{pmatrix}, \tag{1.3.14a}$$

из которых следует, что

$$\bar{a}(\zeta) = a^*(\zeta^*), \qquad \bar{b}(\zeta) = \mp b^*(\zeta^*) \tag{1.3.14b}$$

и соответственно

$$\bar{N} = N, \quad \bar{\zeta}_k - \zeta_k^*, \quad \bar{C}_k = \mp C_k^*. \tag{1.3.14c}$$

Совершенно аналогично, в случае $r = \pm q$ мы имеем

$$\bar{\psi}(x,\zeta) = \begin{pmatrix} \psi_2(x,-\zeta) \\ \pm\psi_1(x,-\zeta) \end{pmatrix}, \quad \bar{\varphi}(x,\zeta) = \begin{pmatrix} \mp\varphi_2(x,-\zeta) \\ -\varphi_1(x,-\zeta) \end{pmatrix}, \tag{1.3.15a}$$

что приводит к равенствам

(1.3.15b) $\bar{a}=a(-\zeta), \qquad \bar{b}(\zeta)=\mp b(-\zeta)$

и, следовательно,

(1.3.15c) $N=\bar{N}, \quad \bar{\zeta}_k=-\zeta_k, \qquad \bar{C}_k=\mp C_k.$

Если же $r=\pm q$ и q вещественно, то имеют место обе описанные выше симметрии. Поэтому, если ζ_k является собственным значением, то и $-\zeta_k^*$ также обязано быть собственным значением. Таким образом, собственные значения либо лежат на мнимой оси, либо расположены симметрично относительно ее. Описанные соотношения приводят к важным следствиям для мКдФ, нелинейного уравнения Шрёдингера и уравнения sin-Гордон.

Отметим два обстоятельства. (i) При $r=+q^*$ задача на собственные значения (1.2.7a) является эрмитовой. В рассматриваемом случае ($q\to 0$ достаточно быстро при $|x|\to\infty$) собственные значения отсутствуют при $\operatorname{Im}\zeta>0$. (ii) Нетрудно дать оценку, гарантирующую отсутствие собственных значений при $r=-q^*$. Поскольку $a=W(\varphi,\psi)$, мы имеем

(1.3.16a) $$a(\zeta)=\lim_{x\to\infty}\varphi_1(x,\zeta)\,e^{i\zeta x},$$

и из (1.3.5a)

(1.3.16b) $$|a(\zeta)-1|\leqslant 1+\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{y}dz\,|q(y)|\,|r(x)|\,|\varphi_1(z,\zeta)\,e^{i\zeta z}|-1.$$

Используя (1.3.7), получим

(1.3.16c) $$|a(\zeta)-1|\leqslant I_0\left(2\sqrt{Q_0(\infty)R_0(\infty)}\right)-1$$

($I_0(x)\geqslant 1$, если $x\geqslant 0$). Таким образом, если

(1.3.16d) $$I_0\left(2\sqrt{Q_0(\infty)R_0(\infty)}\right)\leqslant 2$$

или

(1.3.16e) $$Q_0(\infty)R_0(\infty)<0{,}817,$$

то в задаче (1.2.7a) отсутствуют связанные состояния (если $r=-q^*$, то $Q_0=R_0$).

Проведенный анализ обычно называют прямой задачей рассеяния. Далее мы будем изучать обратную задачу рассеяния.

Мы будем выводить формулы обратной задачи рассеяния, предполагая, что данные рассеяния $(a,\bar{a},b,\bar{b})$ являются целыми функциями. Достаточно предположить, что q, r убывают быстрее любой экспоненты при $|x|\to\infty$. Это весьма ограничительное предположение можно отбросить, но при этом предложенный здесь простой вывод придется несколько модифицировать.

Вначале мы примем следующие интегральные представления для функций ψ, $\bar{\psi}$:

(1.3.17a) $$\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x} + \int_x^\infty K(x, s) e^{i\zeta s} ds,$$

(1.3.17b) $$\bar{\psi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\zeta x} + \int_x^\infty \bar{K}(x, s) \bar{e}^{i\zeta s} ds,$$

где $\zeta = \xi + i\eta$, $\eta \geqslant 0$ и K, $\bar{K}$ являются двухкомпонентными векторами, т. е. $K(x, s) = \begin{pmatrix} K_1(x, s) \\ K_2(x, s) \end{pmatrix}$. Интегральный член, содержащий K, $\bar{K}$, определяет отличие асимптотик при $x = \infty$ от истинной собственной функции. Чтобы удовлетворить граничным условиям, естественно считать ядро K треугольным, т. е. $K(x, s) = 0$ при $x > s$. Наиболее важным звеном этой конструкции является независимость ядер K, $\bar{K}$ от ζ. Этот факт отмечался Гельфандом и Левитаном (1955) [182] в их оригинальной работе.

Для того чтобы обосновать существование таких представлений, достаточно подставить (1.3.17) в (1.2.7a). Например, из (1.3.17a) получаем

(1.3.18a) $$\int_x^\infty e^{i\zeta s} [(\partial_x - \partial_s) K_1(x, s) - q(x) K_2(x, s)] ds - \\ - [q(x) + 2K_1(x, x)] e^{i\zeta x} + \lim_{s\to\infty} [K_1(x, s) e^{i\zeta s}] = 0,$$

(1.3.18b) $$\int_x^\infty e^{i\zeta s} [(\partial_x + \partial_s) K_2(x, s) - r(x) K_1(x, s)] ds - \\ - \lim_{s\to\infty} [K_2(x, s) e^{i\zeta s}] = 0.$$

Таким образом, необходимо и достаточно удовлетворить уравнениям

(1.3.19) $$\begin{gathered} (\partial_x - \partial_s) K_1(x, s) - q(x) K_2(x, s) = 0, \\ (\partial_x + \partial_s) K_2(x, s) - r(x) K_1(x, s) = 0 \end{gathered}$$

с учетом следующих граничных условий:

(1.3.20) $$\begin{gathered} K_1(x, x) = -\frac{1}{2} q(x), \\ \lim_{s\to\infty} K(x, s) = 0. \end{gathered}$$

Существует решение уравнений (1.3.19), удовлетворяющее граничным условиям (1.3.20). Для того чтобы это увидеть, введем новые координаты

$$\mu = \frac{1}{2}(x+s), \qquad \nu = \frac{1}{2}(x-s).$$

Переходя к этим координатам, из (1.3.19, 20) получаем

$$\begin{gathered}\partial_\nu K_1(\mu, \nu) - q(\mu+\nu) K_2(\mu, \nu) = 0,\\ \partial_\mu K_2(\mu, \nu) - r(\mu+\nu) K_1(\mu, \nu) = 0,\\ K_1(\mu, 0) = -\frac{1}{2} q(\mu),\\ \lim_{\mu\to\nu} K(\mu, \nu) = 0\end{gathered}$$

$\left(\text{нетрудно проверить, что } K_2(\mu, 0) = \frac{1}{2}\int_\mu^\infty r(\mu')\, q(\mu')\, d\mu'\right)$. Опираясь на теорию характеристик, можно показать, что решение рассматриваемой задачи (задачи Гурса) существует и единственно. Аналогично можно показать существование и единственность $\bar{K}$.

Теперь мы выведем линейные интегральные уравнения (уравнение Гельфанда — Левитана — Марченко) обратной задачи рассеяния. Рассмотрим точки ζ, принадлежащие контуру C, который начинается в $-\infty + i0^+$, проходит *над всеми* нулями $a(\zeta)$ и оканчивается в $+\infty + i0^+$. Мы предположим функции q и r достаточно быстро убывающими; это позволяет продолжить (1.3.3a) в верхнюю полуплоскость и затем переписать его в виде

$$\frac{\varphi(x, \zeta)}{a(\zeta)} = \bar{\psi}(x, \zeta) + \frac{b(\zeta)}{a(\zeta)} \psi(x, \zeta). \tag{1.3.21}$$

Подставляя (1.3.17) в (1.3.21), находим

$$\frac{\varphi}{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\zeta x} + \int_x^\infty \bar{K}(x, s) e^{-i\zeta s} ds + \frac{b}{a}(\zeta)\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x} + \int_x^\infty K(x, s)\, e^{i\zeta s} ds\right). \tag{1.3.22}$$

Умножим это уравнение на $(1/2\pi) e^{i\zeta y} d\zeta$ и проинтегрируем по контуру C при $y > x$. Воспользовавшись представлением δ-функции Дирака $\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_C e^{i\zeta x} d\zeta$ и изменив порядок интег-

рирования, получим

$$(1.3.23a)\qquad I=\bar{K}(x,\ y)+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}F(x+y)+\int\limits_x^\infty K(x,\ s)\,F(s+y)\,ds,$$

где

$$(1.3.23b)\qquad F(x)\equiv\frac{1}{2\pi}\int\limits_C\frac{b}{a}(\zeta)\,e^{i\zeta x}\,d\zeta,$$

$$(1.3.23c)\qquad I\equiv\frac{1}{2\pi}\int\limits_C\frac{\varphi(x,\ \zeta)}{a(\zeta)}\,e^{i\zeta y}\,d\zeta.$$

Интеграл $I=0$, так как функция $\varphi e^{i\zeta x}$ является аналитической в верхней полуплоскости, $y>x$ и контур C проходит выше всех нулей $a(\zeta)$. В результате имеем

$$(1.3.24)\qquad \bar{K}(x,\ y)+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}F(x+y)+\int\limits_x^\infty K(x,\ s)\,F(s+y)\,ds=0.$$

Произведя такие же преобразования над аналитическим продолжением соотношения (1.3.3b) в нижнюю полуплоскость, получим

$$(1.3.25a)\qquad K(x,\ y)-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\bar{F}(x+y)-\int\limits_x^\infty \bar{K}(x,\ s)\,\bar{F}(s+y)\,ds=0,$$

где

$$(1.3.25b)\qquad \bar{F}(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\bar{C}}\frac{\bar{b}}{\bar{a}}\,e^{-i\zeta x}\,d\zeta$$

и $\bar{C}$ — такой же контур, как C, но обходящий все нули $\bar{a}(\zeta)$ снизу. Частный случай этих формул получается в предположении, что $a(\zeta)$ имеет изолированные простые нули (случай кратных нулей получается как предел при слиянии простых нулей) и не обращается в нуль на вещественной оси ($\zeta=\xi$, $\eta=0$). Интегрирование по контуру в (1.3.23b) и (1.3.25b) дает

$$(1.3.26a)\qquad F(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{b}{a}(\xi)\,e^{i\xi x}\,d\xi-i\sum_{j=1}^{N}C_je^{i\zeta_jx},$$

$$(1.3.26b)\qquad \bar{F}(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{b}}{\bar{a}}(\xi)\,e^{-i\xi x}\,d\xi+i\sum_{j=1}^{N}\bar{C}_je^{-i\zeta_jx},$$

где

$$C_j=\frac{b(\zeta_j)}{a'(\zeta_j)},\qquad \bar{C}_j=\frac{\bar{b}(\bar{\zeta}_j)}{\bar{a}'(\zeta_j)}.$$

В случае более медленного убывания, когда функции a, $\bar{a}$, b, $\bar{b}$ не могут быть аналитически продолжены, формулы (1.3.26a, b) все равно имеют место, а нормировочные константы C_j, $\bar{C}_j$ находятся как коэффициенты пропорциональности собственных функций $\varphi_j = \varphi(x, \zeta_j)$, ψ_j. Например, $\varphi_j = \tilde{C}_j \psi_j$ и $C_j = \tilde{C}_j / a'_j$ и т. д. (Отметим небольшое изменение обозначений по сравнению с 1.3.13.) Интегральные уравнения (1.3.24, 25) удобно записать в виде одного матричного уравнения, полагая

$$(1.3.27a) \qquad \mathscr{K} = \begin{pmatrix} \bar{K}_1 & K_1 \\ \bar{K}_2 & K_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{F} = \begin{pmatrix} 0 & -\bar{F} \\ F & 0 \end{pmatrix},$$

при этом имеем

$$(1.3.27b) \qquad \mathscr{K}(x, y) + \mathscr{F}(x, y) + \int_0^\infty \mathscr{K}(x, s) \mathscr{F}(s + y)\, ds = 0.$$

Как уже отмечалось выше, в частном (но важном с точки зрения физических приложений) случае $r = \pm q^*$ имеются различные соотношения симметрии. Воспользовавшись (1.3.14, 15), получим

$$(1.3.28a) \qquad \bar{F}(x) = \mp F^*(x),$$

$$(1.3.28b) \qquad K(x, y) = \begin{pmatrix} K_2^*(x, y) \\ \pm K_1^*(x, y) \end{pmatrix}.$$

Интегральные уравнения (1.3.27b) с учетом этих условий симметрии приводятся к виду

(1.3.29a)

$$K_1(x, y) \mp F^*(x + y) \pm \int_x^\infty \int_x^\infty K_1(x, z) F(z + s) F^*(s + y)\, ds\, dz = 0.$$

(Когда $r = \mp q$, q вещественно, то $F(x)$, $K(x, z)$ также вещественны.) Наконец, используя (1.3.20), мы получим потенциал

$$1.3.29b) \qquad q(x) = -2K_1(x, x).$$

Потенциал $r(x)$ определяется по формуле

$$r(x) = -2\bar{K}_2(x, x),$$

которая получается тем же способом, что и (1.3.29b) (см. (1.3.18) и т. д.).

Вопрос о существовании и единственности решений линейных интегральных уравнений (1.3.24) обычно решается при помощи альтернативы Фредгольма [424]. Например, ограничение $r =$

$= -q^*$ является достаточным для того, чтобы гарантировать существование и единственность решения уравнения (1.3.24).

Для доказательства рассмотрим однородные уравнения, соответствующие (1.3.24) ($y > x$):

$$h_1(y) + \int_x^\infty h_2(s) F(s+y)\, ds = 0, \tag{1.3.30a}$$

$$h_2(y) - \int_x^\infty h_1(s) \overline{F}(s+y)\, ds = 0. \tag{1.3.30b}$$

Предположим, что $h(y) = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ является решением уравнения (1.3.30), тождественно равным нулю при $y < x$. Для того чтобы воспользоваться альтернативой Фредгольма, достаточно показать, что $h(y) \equiv 0$. Умножим (1.3.30) на (h_1^*, h_2^*), проинтегрируем по y и воспользуемся равенством

$$\int_x^\infty |h_j(y)|^2\, dy = \int_{-\infty}^\infty |h_j(y)|^2\, dy.$$

В результате получим

$$\int_{-\infty}^\infty \left\{ |h_1|^2 + |h_2|^2 + \int_{-\infty}^\infty [h_2(s) h_1^*(y) F(s+y) - h_1(s) h_2^*(y) \overline{F}(s+y)]\, ds \right\} dy = 0. \tag{1.3.30c}$$

Если $r = -q^*$, то условия симметрии (1.3.28) позволяют переписать последнее уравнение в виде

$$\int_{-\infty}^\infty \left\{ |h_1|^2 + |h_2|^2 + 2i \operatorname{Im} \int_{-\infty}^\infty h_1^*(y) h_2(s) F(s+y)\, ds \right\} dy = 0.$$

Из равенства нулю вещественной и мнимой частей следует, что $h(y) \equiv 0$, поэтому решение уравнения (1.3.24) существует и единственно.

Если же $r(x) = q^*(x)$, то задача является самосопряженной, спектр лежит на вещественной оси и $\overline{F}(s+y) = -F^*(s+y)$. В этом случае (1.3.30) сводится к

$$\int_{-\infty}^\infty \left\{ |h_1|^2 + |h_2|^2 + 2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^\infty h_1^*(y) h_2(s) F(s+y)\, ds \right\} dy = 0. \tag{1.3.30d}$$

Поскольку $r = +q^*$, то $|a|^2 - |b|^2 = 1$ на вещественной оси, и, следовательно, $|a(\zeta)| > 0$. Более того, задача является самосопряженной, поэтому $|a(\zeta)| > 0$, $\eta \geqslant 0$. Это означает отсутствие дискретных собственных значений, и, следовательно,

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (b/a)(\xi)\, e^{i\xi z}\, d\xi.$$

Преобразование Фурье

$$\hat{h}_j(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} h_j(y)\, e^{i\xi y}\, dy$$

удовлетворяет тождеству Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h_j|^2\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{h}_j|^2\, d\xi.$$

Воспользовавшись этим тождеством и поменяв порядок интегрирования в (1.3.30d), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ |\hat{h}_1(-\xi)|^2 + |\hat{h}_2^*(\xi)|^2 + 2\mathrm{Re}\left[\frac{b}{a}(\xi)\, \hat{h}_1(-\xi)\, \hat{h}_2^*(\xi)\right]\right\} d\xi = 0.$$

Поскольку $|(b/a)(\xi)| < 1$, имеем

$$\left|2\mathrm{Re}\left[\frac{b}{a}(\xi)\hat{h}_1(-\xi)\, \hat{h}_2^*(\xi)\right]\right| < 2\,|\hat{h}_1(-\xi)|\,|\hat{h}_2^*(\xi)| \leqslant$$
$$\leqslant |\hat{h}_1(-\xi)|^2 + |\hat{h}_2^*(\xi)|^2.$$

Поэтому обязано выполняться равенство $h \equiv 0$, и решение интегрального уравнения (1.3.24) существует и единственно.

Следует отметить, что до сих пор не предпринято полное и строгое изучение обратной задачи, связанной с оператором (1.2.7a). Поэтому не найдена явная характеризация класса данных рассеяния, приводящих к «хорошим» потенциалам. (Формулы и анализ, проведенный в этом разделе, показывают, что если $r = \pm q^*$ и q удовлетворяет неравенствам $\int_{-\infty}^{\infty} x^n |q|\, dx < \infty$ при всех n, то обратную задачу можно решить, и такие потенциалы связаны с аналитическим поведением данных рассеяния в подходящих полуплоскостях.)

Отметим теперь, что уравнения обратной задачи ((1.3.24) и далее) можно вывести, используя классическую задачу Римана — Гильберта. Мы уже показали, что функции $\varphi e^{i\zeta x}$, $\psi e^{-i\xi x}$, $a(\zeta)$ аналитичны в верхней полуплоскости, а $\bar{\psi} e^{i\zeta x}$, $\bar{\varphi} e^{-i\zeta x}$, $\bar{a}(\zeta)$ — в нижней. При этом разложения (1.3.3) можно преобразовать к

виду, который по существу представляет собой задачу Римана — Гильберта. Например, (1.3.3а) означает, что

$$\frac{\varphi e^{i\zeta x}}{a} = \bar{\psi} e^{i\zeta x} + \frac{b}{a}\psi e^{i\zeta x}. \tag{1.3.31}$$

Поэтому если $a(\zeta)$ не имеет нулей в верхней полуплоскости, то (1.3.31) можно трактовать как утверждение о разности $(b/a)\psi e^{i\zeta x}$ на вещественной оси между двумя аналитическими (в своих полуплоскостях) функциями $\varphi e^{i\zeta x}/a$ и $\bar{\psi} e^{-i\zeta x}$. Таким образом осуществляется связь с задачей Римана — Гильберта о восстановлении кусочно-аналитической функции по ее скачкам. Независимо от того, имеет или нет функция $a(\zeta)$ нули в верхней полуплоскости, обычный подход к решению этой задачи приводит к линейным интегральным уравнениям на собственные функции. Подействуем на (1.3.31) проекционным оператором $P_+ = {}^1/_2(1 + iH)$, где H является преобразованием Гильберта

$$H(U(\xi)) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(\xi')/(\xi' - \xi)\, d\xi'.$$

Заметим, что

$$P_+\left(\frac{\varphi}{a} e^{i\zeta x}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \sum_k \tilde{C}_k \frac{\psi_k e^{i\zeta_k x}}{\xi - \zeta_k},$$

$$P_+(\bar{\psi} e^{i\xi x}) = \bar{\psi}(\xi) e^{i\xi x} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

Вклад $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ возникает из-за части контура в окрестности ∞, другой вклад порождается нулями функции $a(\zeta)$. Итак, мы имеем линейное сингулярное интегральное уравнение

$$\bar{\psi}(\xi) e^{i\xi x} = -P_+\left(\frac{b}{a}(\xi)\psi(x, \xi) e^{i\xi x}\right) + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \sum \frac{\tilde{C}_k \psi_k e^{i\zeta_k x}}{\xi - \zeta_k}, \tag{1.3.32}$$

связывающее функции ψ, $\bar{\psi}$. Второе уравнение можно вывести из (1.3.3b); при этом получится замкнутая система для ψ, $\bar{\psi}$, из которой в принципе по данным рассеяния можно найти потенциалы. Так как глобальные результаты довольно трудно извлекать из этой системы, мы обычно будем обращаться к представлению Гельфанда — Левитана — Марченко. Умножив (1.3.32) на $e^{i\xi y}$ $(y > x)$ и произведя преобразование Фурье, прямым вычислением убеждаемся, что уравнение (1.3.32) сводится к

(1.3.24a). Наиболее важно то, что, зная аналитические свойства собственных функций, легко вывести уравнения обратной задачи.

Приведем в завершение этого раздела результаты по обратной задаче рассеяния для оператора Шрёдингера:

(1.3.33) $$v_{xx} + (\lambda + q) v = 0.$$

Мы опускаем вывод уравнений обратной задачи, так как он аналогичен вышеописанному. Строгую теорию можно найти в работах Фаддеева [152] и Дейфта, Трубовица [136]. Для $\lambda = k^2$ мы определим собственные функции φ, ψ, $\bar{\psi}$, имеющие следующее асимптотическое поведение:

(1.3.34a) $$\varphi \sim e^{-ikx}, \quad x \to -\infty,$$

(1.3.34b) $$\psi \sim e^{ikx}, \quad \bar{\psi} \sim e^{-ikx}, \quad x \to +\infty.$$

Функции ψ и $\bar{\psi}$ при $k \neq 0$ линейно независимы, поэтому можно написать разложение

(1.3.35a) $$\varphi = a(k)\bar{\psi} + b(k)\psi.$$

Обычно определяют коэффициент отражения $\rho(k) \equiv b(k)/a(k)$ и коэффициент прохождения $\tau(k) \equiv 1/a(k)$. Название «коэффициент отражения» здесь используется по аналогии с квантовомеханической задачей о рассеянии на потенциале. Разделив (1.3.35a) на $a(k)$, получим

(1.3.35b) $$\tau\varphi = \bar{\psi} + \rho\psi,$$

где $\bar{\psi}$ обозначает волну, падающую справа $\sim e^{-ikx}$ при $x \to \infty$ и т. д. Собственными значениями служат такие числа $\lambda_n = -\varkappa_n^2$, для которых функции $\varphi_n = \varphi(x, \varkappa_n)$ и ψ_n убывают при $|x| \to \infty$; они связаны соотношением

(1.3.36a) $$\varphi_n = \tilde{C}_n \psi_n.$$

Нормировочные коэффициенты C_n мы будем определять формулой

(1.3.36b) $$C_n = \frac{\tilde{C}_n}{a'(i\varkappa_n)}$$

($a(k)$ можно аналитически продолжить в верхнюю полуплоскость.) Собственные значения можно найти как решения уравнения $a(i\varkappa) = 0$.

Этой информации достаточно для решения обратной задачи рассеяния, т. е. для восстановления потенциала q. Вычислим

вначале функцию

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(k)e^{ikx}\,dk-i\sum_{1}^{N}C_n e^{-\varkappa_n x}. \tag{1.3.37a}$$

(В разд. 1.4 мы покажем, что $-iC_n$ можно заменить положительными величинами c_n^2.) Затем решим интегральное уравнение

$$K(x, y)+F(x+y)+\int_{x}^{\infty}K(x, z)F(z+y)\,dz=0 \tag{1.3.37b}$$

и определим $K(x, y)$. Потенциал q восстанавливается по формуле

$$q(x)=2\frac{d}{dx}K(x, x). \tag{1.3.37c}$$

Уравнение (1.3.37) в случае оператора Шрёдингера аналогично уравнению (1.3.27) для задачи (1.2.7a).

В следующем разделе мы покажем, что данные рассеяния $S(k)$ ($\rho(k)$ — коэффициент отражения, $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ — дискретные собственные значения, $\{C_i\}_{i=1}^n$ — нормировочные коэффициенты) имеют простую зависимость от времени, если потенциал подчиняется одному из нелинейных эволюционных уравнений, обсуждавшихся в разд. 1.1. Кроме того, связанные состояния приводят к солитонным решениям. При $\rho(k)=0$ интегральное уравнение имеет вырожденное ядро, и можно найти $K(x, y)$ в замкнутой форме (см., например, [270], а также разд. 1.4).

В заключение из педагогических соображений стоит отметить, что для некоторых потенциалов данные рассеяния (коэффициент отражения и т. д.) можно вычислить в замкнутой форме. Например, для

$$q(x)=Q\delta(x), \tag{1.3.38}$$

решая (1.3.33), получим

$$\begin{aligned} a(k)&=\frac{2ik+Q}{2ik}, & b(k)&=-\frac{Q}{2ik},\\ \rho(k)&=\frac{Q}{2ik+Q}, & \tau(k)&=\frac{2ik}{2ik+Q}. \end{aligned} \tag{1.3.39a}$$

Если $Q>0$, то $a(k_1)=0$ в некоторой точке k_1 верхней полуплоскости. Поэтому имеется собственное значение $\lambda_1=-\varkappa_1^2$, и нормировочная константа C_1 определяется формулами

$$\varkappa_1=\frac{Q}{2}, \qquad C_1=\frac{iQ}{2}=\operatorname{res}\rho(i\varkappa_1). \tag{1.3.39b}$$

Если $Q<0$, то дискретный спектр отсутствует.

Прямоугольная яма также является примером потенциала, для которого легко вычислить данные рассеяния.

В дополнение к рассмотренным здесь уравнениям и результатам по обратным задачам имеется большое число других вопросов, интересовавших исследователей. Например, Захаров и Шабат (1972) [545] изучали нелинейное уравнение Шрёдингера с ненулевыми условиями на бесконечности (граничные условия приводят к появлению так называемого солитона огибающей, темнового импульса; см. также [200]). Проблема поиска решений с периодическими граничными условиями также изучалась многими авторами (см. разд. 2.3); задача на полуоси использовалась в работах [25] и [388]. В литературе можно встретить много других задач, связанных с оператором второго порядка (см., например, [242, 266]).

1.4. Зависимость от времени и частные решения. В предыдущем разделе мы вывели уравнения обратной задачи для обобщенной задачи рассеяния Захарова — Шабата и задачи рассеяния для оператора Шрёдингера. Точнее говоря, имея данные рассеяния

$$\mathbf{S}(\zeta)=\left\{\{\zeta_j\}_{j=1}^N, \quad \{C_j\}_{j=1}^N, \quad \frac{b}{a}(\zeta)\right\}$$

(т. е. дискретные собственные значения, нормировочные константы и коэффициент отражения), мы можем составить и в принципе решить линейные интегральные уравнения обратной задачи рассеяния, что позволяет восстановить рассеивающий потенциал (см. (1.3.29b), (1.3.37c)). Это можно сделать для *любого момента времени* t, так что t входит как параметр. Поскольку нас интересует решение нелинейного эволюционного уравнения, то мы будем действовать следующим образом. Пусть при $t=0$ заданы начальные условия одной из систем, обсуждавшихся в разд. 1.2. Затем мы решим прямую задачу рассеяния (например, (1.2.7a)) и отобразим эти начальные потенциалы в данные рассеяния $S(\zeta;\ t=0)$ (т. е. при $t=0$ мы вычислим собственные функции и по ним найдем данные рассеяния). В этом разделе мы покажем, как можно получить данные рассеяния $S(\zeta,\ t)$ в любой момент времени $t>0$. Восстановив по этим данным потенциал, мы получим решения нелинейного эволюционного уравнения в любой момент времени t.

Мы начнем с построения *совместного* решения уравнений (1.2.7a) и (1.2.7b). В разд. 1.2 было показано, что требование q, $r\to 0$ при $|x|\to\infty$ дает широкий класс уравнений, обладающих тем свойством, что $A\to A_-(\zeta)$, $D\to -A_-(\zeta)$, B, $C\to 0$ при $|x|\to$ $\to\infty$. Зависящие от времени собственные функции определяют-

ся следующим способом:

$$\varphi^{(t)} = \varphi e^{A_- t}, \quad \psi^{(t)} = \psi e^{-A_- t},$$
(1.4.1)
$$\bar{\varphi}^{(t)} = \varphi e^{-A_- t}, \quad \bar{\psi}^{(t)} = \bar{\psi} e^{A_- t'},$$

где φ, $\bar{\varphi}$, ψ, $\bar{\psi}$ удовлетворяют (1.2.7а) с зафиксированными граничными условиями (1.3.1). Следует отметить, что уравнение временной эволюции (1.2.7b) не удовлетворяется при зафиксированных граничных условиях. Поэтому $\varphi \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\zeta x}$ и т. д. не могут удовлетворять (1.2.7b). Например, временна́я эволюция

(1.4.2)
$$\frac{\partial \varphi^{(t)}}{\partial t} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \varphi^{(t)}$$

показывает, что φ удовлетворяет

(1.4.3)
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} A - A_-(\zeta) & B \\ C & D + A_-(\zeta) \end{pmatrix} \varphi.$$

Если мы воспользуемся соотношением

(1.4.4)
$$\varphi = a\bar{\psi} + b\psi \underset{x\to\infty}{\sim} a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\zeta x} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x},$$

то при $x \to \infty$ получим

(1.4.5)
$$\begin{pmatrix} a_t & e^{-i\zeta x} \\ b_t & e^{i\zeta x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2A_-(\zeta)\, b e^{i\zeta x} \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

(1.4.6a)
$$b(\zeta, t) = b(\zeta, 0)\, e^{-2A_-(\zeta)\, t},$$

(1.4.6b)
$$a(\zeta, t) = a(\zeta, 0).$$

Из (1.4.6b) следует, что собственные значения ζ_k не зависят от времени. Аналогичным образом, воспользовавшись определением нормировочных констант $C_j(t)$ $(\varphi(\zeta_j) = \tilde{C}_j \psi(\zeta_j),\ C_j = \tilde{C}_j / a_j')$, мы найдем

(1.4.7)
$$C_j(t) = C_{j,0} e^{-2A_-(\zeta_j)\, t}, \quad j = 1, 2, \ldots, N,$$

где $C_{j,0} \equiv C_j(t = 0)$. В том случае, когда данные рассеяния могут быть продолжены в верхнюю полуплоскость, из соотношения $C_j = b_j / a_j'$ немедленно получаем

$$C_j(t) = \frac{b_j(\zeta, t)}{a_j'(\zeta, t)} = \frac{b_j(\zeta, 0)}{a_j'(\zeta, 0)} e^{-2A_-(\zeta_j)\, t} = C_{j,0} e^{-2A_-(\zeta_j)\, t}.$$

Совершенно аналогично получается зависимость данных рассеяния $\bar{S}(\zeta_j; t)$ от времени (при выводе следует воспользоваться соотношением $\bar{\varphi} = -\bar{a}\psi + \bar{b}\bar{\psi}$):

$$\begin{aligned} &\bar{b}(\zeta, t) = \bar{b}(\zeta, 0)\, e^{2A_-(\zeta)t}, \\ (1.4.8) \qquad &\bar{a}(\zeta, t) = \bar{a}(\zeta, 0), \\ &\bar{C}_j(t) = \bar{C}_{j,0} e^{2A_-(\bar{\zeta}_j)t}. \end{aligned}$$

Это позволяет установить зависимость от времени ядер интегральных уравнений обратной задачи $F(x, t)$ и $\bar{F}(x, t)$:

$$(1.4.9a) \qquad F(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b}{a}(\zeta, 0)\, e^{i\xi x - 2A_-(\xi)t}\, d\xi - i\sum_{j=1}^{N} C_{j,0} e^{i\zeta_j x - 2A_-(\zeta_j)t},$$

$$(1.4.9b) \qquad \bar{F}(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{b}}{\bar{a}}(\zeta, 0)\, e^{-i\xi x + 2A_-(\xi)t}\, d\xi - i\sum_{j=1}^{\bar{N}} \bar{C}_{j,0} e^{-i\bar{\zeta}_j x + 2A_-(\bar{\zeta}_j)t}.$$

Формулы (1.4.9) играют роль решений соответствующей линейной задачи методом Фурье. Решение нелинейного эволюционного уравнения находится по формуле (1.3.24). Следует отметить, что интегральные уравнения упрощаются при $x \to \infty$. Например, из (1.3.24), предположив для удобства, что $r = \pm q^*$, получим $K_1(x, y) \sim \pm F^*(x, +y)$.

Поэтому из (1.3.29b) следует, что

$$q(x; t) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^*(\zeta, 0)\, e^{-2i\xi x - 2A_-^*(\xi)t}\, d\xi.$$

Отметим, что ζ_j лежат в верхней полуплоскости и поэтому вклад связанных состояний экспоненциально мал при $x \to \infty$. Таким образом, при $x \to \infty$ задача свелась к линейной, и ее решение можно представить в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(k)\, e^{i(kx - \omega(k)t)}\, dk.$$

Здесь

$$\omega(\xi) = -2iA_-^*\left(-\frac{\xi}{2}\right).$$

Когда $r = \mp q^*$, функция $A_-(\xi)$ является чисто мнимой, и

$$\omega(\xi) = 2iA_-\left(-\frac{\xi}{2}\right).$$

Так, например, в случае нелинейного уравнения Шрёдингера (1.2.11) из (1.2.12) имеем $A_-(\zeta) = \lim_{|x|\to\infty} A(\zeta) = 2i\zeta^2$, и поэтому $\omega(\xi) = -\xi^2$ (что соответствует дисперсионному соотношению для линеаризованного уравнения — уравнения Шрёдингера).

Перед тем как перейти к описанию частных решений, мы для примера приведем зависимость от времени данных рассеяния для уравнения КдФ (1.2.23). Аналогичные рассуждения для оператора Шрёдингера приводят к следующей зависимости данных рассеяния (определенных в (1.3.35)) от времени:

$$\begin{aligned} &a(k, t) = a(k, 0), \\ &b(k, t) = b(k, 0)\, e^{8ik^3t}, \qquad (1.4.10) \\ &C_n(t) = C_{n,0} e^{8\varkappa_n^3 t}, \qquad n = 1, \ldots, N. \end{aligned}$$

Дискретные собственные значения являются нулями функции $a(k, t)$ в верхней полуплоскости и поэтому не зависят от времени. Коэффициент отражения $\rho(k, t) = b(k, t)/a(k, t)$ зависит от времени очевидным образом. Отметим, в частности, что зависимость от времени коэффициента отражения в случае уравнения КдФ такова, что $d\rho/dt = -8i\omega(k)\rho$ (при этом равенство $\omega(k) = -k^3$ совпадает с дисперсионным уравнением линеаризованного уравнения КдФ ($q_t + q_{xxx} = 0$)).

В случае оператора Шрёдингера можно показать (см., например, [136]), что дискретные собственные значения, т. е. нули функции $a(k)$, являются простыми и лежат только на мнимой оси. Более того, нетрудно показать, что нормировочные константы, входящие в (1.2.37), положительны. Поэтому мы будем записывать

$$-iC_n = c_n^2. \qquad (1.4.11)$$

Положительность нормировочных коэффициентов можно установить следующим образом. Будем предполагать, что все функции аналитически продолжаются в верхнюю полуплоскость. Затем для собственного значения $k_n = i\varkappa_n$ при $x \to +\infty$ имеем

$$\begin{aligned} &\varphi(k_n) \equiv \varphi_n = \tilde{C}_n \psi_n \sim \tilde{C}_n e^{-\varkappa_n x}, \\ &\frac{d}{dk}\varphi(\varkappa_n) \sim a'(\varkappa_n)\, \bar{\psi}_n \sim a'(\varkappa_n)\, e^{k_n x}, \qquad (1.4.12) \end{aligned}$$

где коэффициент $\tilde{C}_n$ с необходимостью является вещественным.

Но при всех x справедливо равенство

(1.4.13) $$\frac{d}{dx}(\varphi_k\varphi_x - \varphi\varphi_{xk}) = -2\varkappa_n\varphi^2.$$

Подставив асимптотику (1.4.12) в левую часть (1.4.13), получим

(1.4.14) $$a'(\varkappa_n) = -i\left(\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_n^2\,dx}{\widetilde{C}_n}\right);$$

таким образом,

(1.4.15) $$-iC_n = \frac{-i\widetilde{C}_n}{a'(\varkappa_n)} = \frac{\widetilde{C}_n^2}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_n^2\,dx} = c_n^2$$

(обычно $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_n^2\,dx$ нормируется на единицу). Итак, конечную сумму в ядре уравнения Гельфанда — Левитана (1.3.37) можно представить в виде

(1.4.16) $$F_D(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2(t)\,e^{-\varkappa_i x},$$

где $c_n(t) = c_n(0)\,e^{4\varkappa_n^3 t}$.

Получив зависимость данных рассеяния от времени, мы можем теперь обсудить решение нелинейных эволюционных уравнений и их свойства. В этом разделе мы обсудим многосолитонные решения, а в разд. 1.7 будет рассмотрена асимптотика задачи Коши, отвечающая непрерывному спектру.

Вначале мы вернемся к задаче на собственные значения для оператора Захарова — Шабата (1.2.7а). Когда $r = q^*$, собственные значения отсутствуют. В этом случае задача на собственные значения является самосопряженной, т. е. задача рассеяния такова, что $LV = \zeta V$, $L^H = (L^A)^* = L$, где L^H — эрмитово сопряженный к L оператор, L^A сопряжен с L. Если q, r убывают достаточно быстро, то собственные значения должны быть непременно вещественными и по этой причине отсутствуют. Остановимся поэтому на случае $r = -q^*$. Здесь нам следует воспользоваться уравнением (1.3.29). Выберем $F(x)$ таким, чтобы $(b/a)(t = 0) = 0$ (отсутствует рассеяние) и $N = 1$. Имеется одно дискретное собственное значение. Тогда (опуская для удобства зависимость от времени)

(1.4.17) $$F(x) = -ice^{i\zeta x},\quad \zeta = \xi + i\eta,\quad \eta > 0.$$

Подставив (1.4.17) в (1.3.29), получим

$$K_1(x,\ y)=ic^*e^{-i\zeta^*(x+y)}-\tag{1.4.18}$$

$$-\int\limits_{-x}^{\infty}\int\limits_{x}^{\infty}K_1(x,\ z)\,|c|^2e^{i\zeta z}e^{is(\zeta-\zeta^*)}e^{-i\zeta^* y}\,ds\,dy.$$

Определим $\widehat{K}_1(x)=\int\limits_x^\infty K_1(x,\ z)\,e^{i\zeta z}\,dz$. Умножим (1.4.18) на $e^{i\zeta y}$ и проинтегрируем от x до ∞. Это приводит к уравнению для $\widehat{K}_1(x)$, решение которого имеет вид

$$\widehat{K}_1(x)=-\frac{c^*e^{i(\zeta-2\zeta^*)x}}{(\zeta-\zeta^*)\left[1-|c|^2e^{2i(\zeta-\zeta^*)x}/(\zeta-\zeta^*)^2\right]}.\tag{1.4.19}$$

Из (1.4.18) теперь следует, что

$$K_1(x,\ y)=ic^*e^{i\zeta^*(x+y)}\left[1-\frac{|c|^2}{(\zeta-\zeta^*)^2}e^{2i(\zeta-\zeta^*)x}\right]^{-1}.\tag{1.4.20a}$$

Таким образом, потенциал $q(x)$ имеет вид

$$q(x)=-2K_1(x,\ x)=-\frac{2ic^*e^{-2i\xi x}}{e^{2\eta x}+\left(\frac{|c|^2}{4\eta^2}\right)e^{-2\eta x}}.\tag{1.4.20b}$$

Полагая $|c|^2/4\eta^2=e^{4\varphi}$, получим

$$q(x)=-i\frac{c^*}{|c|}2\eta e^{-2i\xi x}/\mathrm{ch}\,(2\eta x-2\varphi).\tag{1.4.20c}$$

Эта формула дает солитонное решение любого эволюционного уравнения с $r=-q^*$, разумеется при учете обсуждавшихся выше условий $A\to A_-(\zeta)$ и т. д., которые приводят к определенной зависимости $c=c(t)$ от времени:

$$c=c_0e^{-2A_-(\zeta)t}.\tag{1.4.21}$$

Таким образом, $q(x,\ t)$ имеет вид

$$q(x,\ t)=2\eta e^{-i\xi x}e^{2i\,\mathrm{Im}\,A_-(\zeta)t}\times\tag{1.4.22}$$

$$\times e^{-i(\psi_0+\pi/2)}/\mathrm{ch}\,[2\eta x+2\,\mathrm{Re}\,A_-(\zeta)t-x_0],$$

где $c_0\equiv|c_0|e^{i\psi_0}$, $x_0\equiv\ln|c_0|/2\eta$. В случае нелинейного уравнения Шрёдингера (1.2.11) $A_-(\xi)=2i\zeta^2$ и

$$q(x,\ t)=2\eta e^{-2i\xi x}e^{4i(\xi^2-\eta^2)t-i(\psi_0+\pi/2)}/\mathrm{ch}\,(2\eta x-8\xi\eta t-x_0)\tag{1.4.23}$$

(см. рис. 4.16). Отметим, что скорость солитона равна 4ξ, а амплитуда 2η.

Следует отметить, что в общем случае (когда между q, r нет никакой связи) в решении за конечное время может возникнуть особенность. Пусть у нас имеется одно собственное значение ζ в верхней полуплоскости и одно $(\bar{\zeta})$ — в нижней. Аналогом (1.4.17) будет

$$F(z,\ t) = -ice^{i\zeta z},\qquad \bar{F}(z,\ t) = i\bar{c}e^{-i\bar{\zeta}z},$$

причем зависимость c от времени дается формулой (1.4.21), а $\bar{c} = \bar{c}_0 e^{2A_-(\bar{\zeta})t}$. Мы еще раз решим интегральное уравнение с вырожденным ядром и получим

$$\begin{aligned} q(x,\ t) &= \frac{2i\bar{c}_0 e^{2A_-(\bar{\zeta})t - 2i\bar{\zeta}x}}{D(x,\ t)}, \\ r(x,\ t) &= \frac{-2ic_0 e^{-2A_-(\zeta)t + 2i\zeta x}}{D(x,\ t)}, \\ D(x,\ t) &= 1 - \frac{c_0\bar{c}_0}{(\zeta - \bar{\zeta})^2} e^{2(A_-(\bar{\zeta}) - A_-(\zeta))t + 2i(\zeta - \bar{\zeta})x}. \end{aligned} \tag{1.4.24}$$

Можно легко проверить, что функция $D(x,\ t)$, не имевшая нулей при $t = 0$, может обратиться в нуль в некоторый конечный момент времени $t = T < \infty$. Мы будем называть такие решения взрывающимися солитонами. Теперь понятно, почему столько внимания мы уделили случаю $r = \pm q^*$.

Приведенная здесь схема применима и в более общем случае, когда имеется N различных собственных значений (двукратные собственные значения можно получить как предел слияния двух простых). Интегральное уравнение в этом случае также имеет вырожденное ядро и может быть решено в замкнутой форме (т. е. решение можно выразить через определители некоторых матриц, см., например, Захаров, Шабат [544] или Вадати [495]). Следует также отметить, что Хирота предложил другой метод, позволяющий строить N-солитонные решения. Метод Хироты применяется непосредственно к нелинейному уравнению и не использует обозначений обратной задачи рассеяния. Этот метод мы обсудим в разд. 3.3, там же будут получены N-солитонные решения для уравнения КдФ.

Бывает так, что для двух или более различных собственных значений величины $\operatorname{Re} A_-(\zeta)/\eta$ совпадают (иначе говоря, солитоны (1.4.22) имеют одинаковые скорости). В этом случае многосолитонное решение будет представлять собой связанное состояние с периодической зависимостью от времени. Для нелинейного уравнения Шрёдингера $\operatorname{Re} A_-(\zeta)/\eta \sim \xi$, поэтому дискретные собственные значения, имеющие одинаковые веществен-

ные части, отвечают связанным многосолитонным решениям[1]) (обсуждение этого вопроса имеется в работе Захарова и Шабата [544]). Другой пример периодических во времени связанных состояний дает уравнение sin-Гордон. Для этого уравнения в разд. 1.2 было получено, что $A_-(\zeta) = i/4\zeta$. Поэтому $\operatorname{Re} A_-(\zeta) = \eta/(4(\xi^2+\eta^2))$, и собственные значения, отвечающие связанным солитонным решениям, должны лежать на окружности $\xi^2+\eta^2 = \text{const}$. Когда имеется лишь одно собственное значение, то оно должно лежать на мнимой оси $\xi = 0$ (из вещественности q и условия $q = -r$ следует, что собственные решения лежат либо на мнимой оси, либо образуют пары, симметричные относительно мнимой оси: ζ, $-\zeta^*$, см. разд. 1.3). Следовательно,

$$\operatorname{Re} A_-(\zeta) = \frac{1}{4\eta}, \quad \operatorname{Im} A_-(\zeta) = 0 \quad \left(\psi_0 = \frac{\pi}{2}\right).$$

Из (1.4.22) следует, что

$$\frac{u_x}{2} = -q(x, t) = 2\eta/\operatorname{ch}\left(2\eta x + \frac{1}{2\eta}t + x_0\right),$$

и решение уравнения sin-Гордон, отвечающее простому кинку, имеет вид

$$u = 4 \operatorname{arctg} \exp\left(2\eta x + \frac{1}{2\eta}t + x_0\right).$$

В лабораторной системе координат $x = (X+T)/2$, $t = (X-T)/2$ уравнение sin-Гордон переписывается в виде

$$u_{XX} - u_{TT} = \sin u \tag{1.4.25}$$

и однокинковое решение представляется формулой

$$u(X, T) = 4 \operatorname{arctg} \exp\left(\left(\eta + \frac{1}{4\eta}\right)(X - X_0) + \left(\eta - \frac{1}{4\eta}\right)T\right). \tag{1.4.26}$$

Аналогичным образом можно вычислить решение, отвечающее двум собственным значениям. Не вдаваясь в детали вычисления, мы приведем результаты, относящиеся к этому случаю. Пусть заданы два собственных значения $\zeta = \xi + i\eta$ и $-\zeta^*$, тогда реше-

---

[1]) Отметим, что энергия связи этих состояний равна нулю. Нетрудно проверить, что почти любое малое возмущение нарушает равенство скоростей солитонов и, следовательно, связанность состояний. Поэтому нет серьезных оснований называть такие состояния связанными. Пример настоящего связанного состояния солитонов дает бризерное решение уравнения sin-Гордон (см. ниже). Здесь уже имеется дефект массы из-за наличия взаимодействия, и малые возмущения не разрушают связи.— *Прим. перев.*

ние имеет вид

(1.4.27)
$$u(X, T) = 4\operatorname{arctg}\left[\frac{\eta}{\xi}\cos\left(\frac{\xi}{2}(\nu(T - T_0) - (4 - \nu)X)\right)\Big/\operatorname{ch}\left(\frac{\eta}{2}(\nu(X - X_0) - (4 - \nu)T)\right)\right],$$

где $\nu = 2 + 1/(2|\zeta|^2)$. Если $\xi^2 + \eta^2 = |\zeta|^2 = 1/4$, то $\nu = 4$, и мы получим решение, которое обычно называют «бризером»,

(1.4.28)
$$u(X, T) = 4\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega^2}\sin(\omega(T - \tilde{T}_0))\right)\Big/\operatorname{ch}(\sqrt{1-\omega^2}(X - X_0)),$$

где $\omega = 2\xi$, $\xi^2 + \eta^2 = 1/4$ (рис. 1.3). Типичное кинк-антикинковое

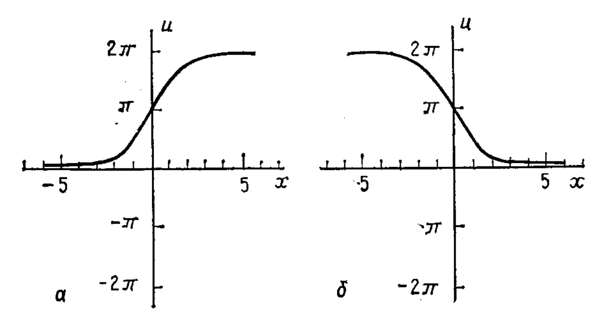


Рис. 1.2. (*а*) Кинк ($\eta = +1/2$); (*б*) антикинк ($\eta = 1/2$).

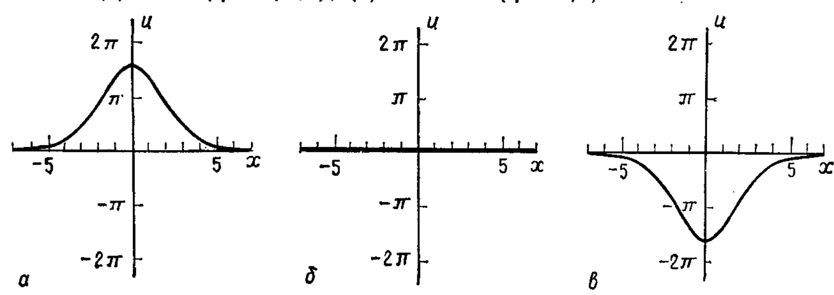


Рис. 1.3. Характерный вид бризера (1.4.28): (*а*) $\omega(T - \tilde{T}_0) = \pi/2$; (*б*) $\omega(T - \tilde{T}_0) = \pi$; (*в*) $\omega(T - T_0) = 3\pi/2$

решение при $\eta_1 = \frac{1}{2}((1 - v)/(1 + v))^{1/2}$, $\eta_2 = \frac{1}{2}((1 + v)/(1 - v))^{1/2}$ ($\zeta_j = i\eta_j$, $j = 1, 2$) имеет вид

(1.4.29)
$$u(X, T) = 4\operatorname{arctg}\left(-\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{vT}{\sqrt{1-v^2}}\right)}{v\operatorname{ch}\left(\frac{X - X_0}{\sqrt{1-v^2}}\right)}\right)$$

((1.4.29) можно получить из (1.4.28), положив $v = i\sqrt{\omega^2/(1-\omega^2)}$ и $T_0 = \pi$). Решение, отвечающее двойному собственному значению, можно получить, переходя к пределу $v \to 0$:

(1.4.30) $$u(X, T) = 4\,\mathrm{arctg}\,(-T/\mathrm{ch}\,(X - X_0))$$

(рис. 1.4). На спектральном языке (1.4.29) представляет собой решение, отвечающее двум собственным значениям η_1, η_2, расположенным по разные стороны от точки $\eta = 1/2$. Они сливаются в двойной нуль $\eta_1 = \eta_2 = 1/2$ (этому соответствует решение

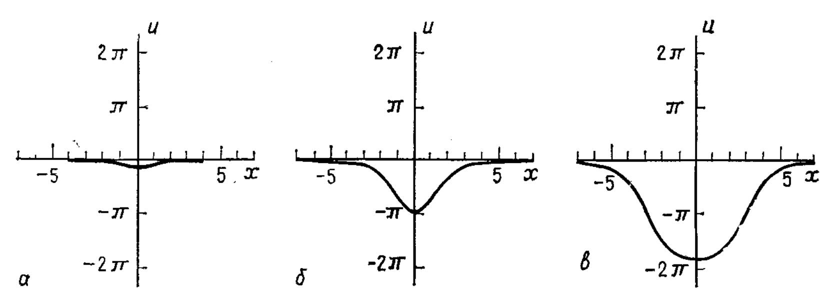


Рис. 1.4. Типичное двухполюсное решение (1.4.30): (*а*) $T = 0.1$; (*б*) $T = 1.0$; (*в*) $T = 10.0$.

(1.4.30)) и затем расщепляются в пару собственных значений ζ, $-\zeta^*$ (этому случаю отвечает решение (1.4.28)). Функционал энергии

(1.4.31a) $$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}(u_T^2 + u_X^2) + 1 - \cos u\right) dx$$

в случае кинка — антикинка, двигающихся в лабораторной системе координат со скоростью v (1.4.29), принимает значение

(1.4.31b) $$E = \frac{2E_0}{\sqrt{1 - v^2}},$$

а в случае бризера (1.4.28), осциллирующего в лабораторной системе координат с частотой ω, имеем

(1.4.31c) $$E = 2E_0\sqrt{1 - \omega^2},$$

где E_0 — энергия кинка (1.4.26) с $v = 0$.

В этом месте, вероятно, следует еще раз подчеркнуть, что круг задач, обладающих такими солитонными решениями, весьма ограничен. Часто хорошей проверкой на интегрируемость заданного уравнения при помощи МОЗР является изучение взаимодействия двух уединенных волн. Если они взаимодействуют

неупруго, то обычно полагают, что уравнение не может быть решено методом обратной задачи рассеяния. Например, Абловиц, Краскал и Ладик [15] изучали уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} + F(u) = 0$$

для различных функций $F(u)$, а именно:

$$F_1(u) = \sin u + \lambda \sin 2u,$$

$$F_2(u) = \begin{cases} \pi/4, & 2\pi n < u < (2n+1)\pi, \\ 0, & u = \pi n, \\ -\pi/4, & (2n+1)\pi < u < 2(n+1)\pi, \end{cases}$$

$$F_3(u) = -u + \frac{u^3}{\pi^2}.$$

Каждое из этих уравнений имеет частное решение в виде уединенной волны. Но только в случае $F_1(u)$ с $\lambda = 0$ (т. е. уравнения sin-Гордон) уединенные волны взаимодействуют упруго. Хотя при больших относительных скоростях казалось, что взаимодействие ($\lambda \neq 0$) является упругим, тем не менее при малых относительных скоростях взаимодействие становилось очень существенным. При достаточно малых относительных скоростях уединенные волны в результате взаимодействия образовывали связанные состояния — квазибризеры.

Многие авторы численно изучали такие задачи (ранние работы сделали Забужский и Краскал [523], Хардин и Тапперт [198]. Обзор по этим работам можно найти у Элбека [146]. К этому направлению относятся также работы Кудрявцева [303] и Маханькова [344]).

По сравнению с обобщенной задачей для оператора Захарова — Шабата многосолитонные решения для оператора Шрёдингера существенно менее разнообразны. В этом случае отсутствуют связанные многосолитонные решения, так как оператор является самосопряженным.

Далее мы получим N-солитонные решения для уравнения КдФ. Мы будем следовать работе [172]. Для этого рассмотрим (1.3.37b), положив коэффициент отражения $\rho(k)$ равным нулю. Воспользовавшись (1.4.16), мы получим, что $K(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$K(x, y) + \sum_{m=1}^{N} c_m^2 e^{-\varkappa_m (x+y)} + \sum_{m=1}^{N} c_m^2 e^{-\varkappa_m y} \times \int_x^{\infty} e^{-\varkappa_m z} K(x, z)\, dz = 0. \tag{1.4.32}$$

Представим $K(x, y)$ в виде

(1.4.33) $$K(x, y) = -\sum_{m=1}^{N} c_m \psi_m(x) e^{-\varkappa_m y}.$$

Подставляя (1.4.33) в (1.4.32), производя интегрирование и приравнивая нулю коэффициенты при $e^{-\varkappa_m y}$, получим

(1.4.34a) $$\psi_m(x) + \sum_{m=1}^{N} c_m c_n \psi_n(x) \frac{e^{-(\varkappa_n+\varkappa_m)x}}{(\varkappa_n + \varkappa_m)} = c_m e^{-\varkappa_n x}.$$

Пусть E, ψ — вектор-столбцы с элементами $c_m e^{-\varkappa_m x}$ и ψ_m соответственно, а C является $N \times N$-матрицей с элементами

$$c_{mn} = \frac{c_m c_n e^{-(\varkappa_m+\varkappa_n)x}}{\varkappa_n + \varkappa_m}.$$

Перепишем уравнение (1.4.34a) в матричной форме

(1.4.34b) $$(I + C)\psi = E$$

(I — единичная $N \times N$-матрица). Мы можем быть уверены в том, что уравнение (1.4.34b) имеет решение ψ, поскольку матрица C является положительно определенной, т. е.

$$P^T C P = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} P_m c_m c_n P_n \frac{e^{-(\varkappa_m+\varkappa_n)x}}{(\varkappa_m + \varkappa_n)} = \int_x^\infty \left(\sum_{m=1}^{N} P_m c_m e^{-\varkappa_m z} \right)^2 dz \geqslant \geqslant 0.$$

Решая уравнение (1.4.34b) по правилу Крамера, получим

(1.4.35a) $$\psi_n(x) = \Delta^{-1} \sum_{m=1}^{N} c_m e^{-\varkappa_m x} Q_{m,n},$$

где $\Delta = \det(I + C)$, а Q_{nm} обозначают алгебраические дополнения элементов матрицы $(I + C)$. Для Δ существует представление

(1.4.35b) $$\Delta = \sum_{m=1}^{N} \left(\delta_{nm} + c_m c_n \frac{\exp(-(\varkappa_m + \varkappa_n) x)}{(\varkappa_m + \varkappa_n)} \right) Q_{mn}.$$

Из (1.4.33) следует, что на характеристике $x = y$ функция $K(x, y)$ имеет вид

(1.4.36) $$K(x, x) = -\Delta^{-1} \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} c_m c_n e^{-(\varkappa_m+\varkappa_n)x} Q_{nm}.$$

Из того факта, что производная определителя является суммой определителей матриц, у которых продифференцирован один из столбцов, имеем

$$\frac{d\Delta}{dx} = -\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} c_m c_n e^{-(\varkappa_m+\varkappa_n)\,x} Q_{mn}.$$

Таким образом, окончательный результат имеет вид

$$K(x,\ x) = \Delta^{-1}\frac{d}{dx}\Delta, \tag{1.4.37}$$

и, следовательно, потенциал

$$q(x) = 2\frac{d^2}{dx^2}\ln\Delta. \tag{1.4.38}$$

Такая форма представления потенциала была обнаружена многими исследователями (см., например, [270, 525, 211, 495]). Отметим, что такое представление справедливо и для более широкого круга задач, даже включающих вклады от непрерывного спектра [433]. Автомодельные решения также могут быть представлены в этой форме [22]. Кроме того, при некоторых дополнительных предположениях аналогичную форму можно придать решениям нелинейного уравнения Шрёдингера (см., например, Захаров, Шабат [544]).

Структура N-солитонного решения весьма проста; этот факт лежит в основании других, более прямых подходов, позволяющих строить частные решения, которые будут описаны в гл. 3 (см. метод Хироты в разд. 3.3). Но следует отметить, что эти методы в отличие от МОЗР не позволяют решать задачу с произвольными начальными данными.

Обсудим теперь сдвиги фаз солитонов уравнения КдФ в двухсолитонном решении. Мы видели, что нормировочные константы в этом случае имеют следующую зависимость от времени:

$$c_m^2(t) = c_{m,\,0}^2 e^{8\varkappa_m^3 t} \tag{1.4.39}$$

(напомним, что $\lambda_m = -\varkappa_m^2 < 0$ являются собственными значениями). Из этого решения непосредственным вычислением получаем

$$\Delta = \det(I + C) = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_1+\eta_2+A_{12}}, \tag{1.4.40}$$

где

$$\eta_m = -2\varkappa_m(x - 4\varkappa_m^2 t) + \eta_{m,\,0},$$

$$\eta_{m,\,0} = \ln c_{m,\,0}^2,$$

$$e^{A_{12}} = \left(\frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{\varkappa_1 + \varkappa_2}\right)^2$$

(отметим, что здесь определение η отличается от данного в предыдущем разделе). Теперь сдвинемся вдоль траектории $\eta_1 = \text{const}$, предполагая для определенности, что $\varkappa_1 > \varkappa_2$. Тогда при $t \to -\infty$ $\eta_2 \to -\infty$, и мы имеем

$$\Delta \sim 1 + e^{\eta_1}, \tag{1.4.41}$$

а при $t \to +\infty$ $\eta_2 \to +\infty$ и

$$\Delta \sim (1 + e^{\eta_1 + A_{12}}) e^{\eta_2}. \tag{1.4.42}$$

Из (1.4.38) следует теперь, что вблизи характеристики $\eta_1 = \text{const}$ решение $q(x, t)$ при $t \to \pm\infty$ представляется в виде

$$q(x, t) \sim 2\varkappa_1^2/\text{ch}^2(\eta_1 + \varphi_\pm), \tag{1.4.43a}$$

$\varphi_+ = A_{12}$, $\psi_- = 0$, фиксировано, $t \to \pm\infty$. Таким образом, взаимодействие не изменяет скорости и амплитуды солитона. Сдвиг фазы — это все, что происходит в результате взаимодействия. Из полученной формулы следует, что траектория солитона сдвигается на A_{12}, или, точнее,

$$\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = \ln\left(\frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{\varkappa_1 + \varkappa_2}\right)^2. \tag{1.4.43b}$$

Вообще для уравнения КдФ с каждым собственным значением $\lambda_p = -\varkappa_p^2$; $\varkappa_1 > \varkappa_2 > \ldots > \varkappa_N > 0$ связан солитон, стремящийся при $t \to \pm\infty$ асимптотически к

$$q \sim 2\varkappa_p/\text{ch}^2(\eta_p + \varphi_\pm).$$

Сдвиг фазы $\Delta\varphi$ солитона дается формулой

$$\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = \sum_{m=p+1}^{N} \ln\left(\frac{\varkappa_p - \varkappa_m}{\varkappa_p + \varkappa_m}\right)^2 - \sum_{m=1}^{p-1} \ln\left(\frac{\varkappa_m - \varkappa_p}{\varkappa_m + \varkappa_p}\right)^2. \tag{1.4.44}$$

Теперь совершенно очевидно, что общий сдвиг фазы есть сумма всех сдвигов, как если бы солитон p парно провзаимодействовал с каждым солитоном по отдельности (см. [525, 495, 474]). В общем случае вопрос о взаимодействии солитонов с решениями, отвечающими непрерывному спектру, изучался в работе [13].

В последней работе для общего сдвига фазы p-го солитона, возникающего в результате взаимодействия с другими солитонами и непрерывным спектром, получена формула

$$\varphi_+ - \varphi_- = \ln\left\{\left(\frac{c_p^+ c_p^-}{2\varkappa_p}\right)^2 \prod_{m=1}^{p-1} \left(\frac{\varkappa_m - \varkappa_p}{\varkappa_m + \varkappa_p}\right)^4\right\}. \tag{1.4.45}$$

В (1.4.45) c_p^+ обозначают „правые", а c_p^- — „левые" нормировочные коэффициенты; имеется в виду, что собственная функция определена следующим образом:

$$\psi_{xx} + (u(x, 0) - \varkappa_p^2)\psi = 0,$$

(1.4.46)
$$\psi \sim \begin{cases} c_p^+ e^{-\varkappa_p x}, & x \to +\infty, \\ c_p^- e^{\varkappa_p x}, & x \to -\infty, \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 \, dx = 1.$$

Когда отсутствует непрерывный спектр, сдвиг (1.4.45) сводится к N-солитонной формуле, так как в случае чистого N-солитонного решения мы имеем

(1.4.47)
$$(c_p^+)^2 (c_p^-)^2 = (2\varkappa_p)^2 \prod_{m \neq p}^{N} \left(\frac{\varkappa_p + \varkappa_m}{\varkappa_p - \varkappa_m}\right)^2.$$

Если имеется только одно собственное значение и непрерывный спектр, то

(1.4.48)
$$\varphi_+ - \varphi_- = \ln\left(\frac{c_1^+ c_1^-}{2\varkappa_1}\right)^2.$$

Эта формула была найдена Абловицем и Сигуром [26].

1.5. Общий эволюционный оператор. В этом разделе мы найдем общий класс нелинейных эволюционных уравнений, связанных с обобщенной задачей рассеяния Захарова — Шабата. Оказывается, что при некоторых условиях удается установить общие соотношения, позволяющие непосредственно описать класс интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений. Эти соотношения зависят от закона дисперсии линеаризованной задачи и от некоторого интегро-дифференциального оператора. При выводе мы будем основываться на работе Абловица, Каупа, Ньюэлла и Сигура [12].

1.5.a. Вывод общих эволюционных уравнений. Мы будем работать с уравнениями (1.2.7), (1.2.8) и с собственными функциями φ, $\bar{\varphi}$, имеющими граничные условия (1.3.1). Умножив первое и второе уравнения (1.2.7a) (с заменой v на φ) соответственно на φ_1 и φ_2, мы обнаружим, что квадраты собственных функций удовлетворяют соотношениям

(1.5.1)
$$\begin{aligned} (\varphi_1^2)_x + 2i\zeta\varphi_1^2 &= 2q\varphi_1\varphi_2, \\ (\varphi_2^2)_x - 2i\zeta\varphi_2^2 &= 2r\varphi_1\varphi_2, \\ (\varphi_1\varphi_2)_x &= q\varphi_2^2 + r\varphi_1^2. \end{aligned}$$

Сравнивая, обнаруживаем, что квадраты собственных функций удовлетворяют однородной части (1.2.8), т. е.

(1.5.2) $$A_x = qC - rB, \quad B_x + 2i\zeta B = -2Aq, \quad C_x - 2i\zeta C = 2Ar.$$

Таким образом, одно из решений однородной системы (1.2.8) имеет вид

(1.5.3a) $$\begin{pmatrix} \varphi_1\varphi_2 \\ -\varphi_1^2 \\ \varphi_2^2 \end{pmatrix}.$$

Оставшиеся два решения находятся аналогично и имеют вид

(1.5.3b) $$\begin{pmatrix} \bar\varphi_1\bar\varphi_2 \\ -\bar\varphi_1^2 \\ \bar\varphi_2^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\varphi_1\bar\varphi_2 + \varphi_2\bar\varphi_1) \\ -\varphi_1\bar\varphi_1 \\ \varphi_2\bar\varphi_2 \end{pmatrix}.$$

Когда известны все решения однородного уравнения, то можно найти (методом вариации постоянной) общее решение неоднородных уравнений (1.2.8) (где q_t, r_t являются неоднородными членами). По причинам, которые были описаны в разд. 1.2, мы возьмем граничное условие для A, B, C в виде

(1.5.4) $$A \to A_-(\zeta), \quad B, C \to 0 \text{ при } |x| \to \infty.$$

Можно было бы наложить более общие граничные условия, но здесь мы выберем именно эти, поскольку все эволюционные уравнения, выведенные в разд. 1.2 (при условии r, $q \to 0$ при $|x| \to \infty$), удовлетворяют (1.5.4). Здесь мы изложим центральные идеи построения, лежащие в основании многих обобщений.

Так как мы потребовали выполнения (1.5.4) при $x = \pm\infty$, то система (1.2.8) не будет иметь решения, если не выполнены некоторые условия «ортогональности». Здесь мы только сформулируем результаты, а позже в этом же разделе приведем их вывод. С учетом того, что r, $q \to 0$ при $|x| \to \infty$, должны выполняться следующие условия ортогональности:

(1.5.5) $$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\begin{pmatrix} r \\ -q \end{pmatrix}_t + 2A_-(\zeta) \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix} \right] \cdot \Phi_i \, dx = 0 \qquad i = 1, 2,$$

где

(1.5.6) $$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \varphi_1^2 \\ \varphi_2^2 \end{pmatrix}, \qquad \Phi_2 = \begin{pmatrix} \bar\varphi_1^2 \\ \bar\varphi_2^2 \end{pmatrix}$$

и $\mathbf{u} \cdot \Phi_1 \equiv r\varphi_1^2 + q\varphi_2^2$ при $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}$ и т. д. Условия ортогональности (1.5.5) определяют эволюционное уравнение. Чтобы это

показать, выведем вначале эволюционное уравнение для Φ_1 (для Φ_2 анализ проводится аналогично). Из (1.5.1) мы имеем

(1.5.7) $$\varphi_1\varphi_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (q\varphi_2^2 + r\varphi_1^2)\, dx.$$

Отсюда

(1.5.8) $$(\varphi_1^2)_x = -2i\zeta\varphi_1^2 + 2qI_-(q\varphi_2^2 + r\varphi_1^2),$$ $$(\varphi_2^2)_x = 2i\zeta\varphi_2^2 + 2rI_-(q\varphi_2^2 + r\varphi_1^2),$$

где введено обозначение

(1.5.9) $$I_- \equiv \int_{-\infty}^{x} dy.$$

Систему (1.5.8) можно переписать как операторное соотношение

(1.5.10) $$\zeta\begin{pmatrix}\varphi_1^2\\ \varphi_2^2\end{pmatrix} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix}-\partial_x + 2qI_-r & 2qI_-q\\ -2rI_-r & \partial_x - 2rIq\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1^2\\ \varphi_2^2\end{pmatrix},$$

или просто

(1.5.11) $$\zeta\Phi_i = \mathscr{L}\Phi_i, \qquad i = 1,\ 2$$

((1.5.11) верно также и для Φ_2), где

(1.5.12) $$\mathscr{L} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix}-\partial_x + 2qI_-r & 2qI_-q\\ -2rI_-r & \partial_x - 2rI_-q\end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathscr{L}$ — интегро-дифференциальный оператор, действующий на Φ. Если $A_-(\zeta)$ — аналитическая функция, то

(1.5.13) $$A_-(\zeta)\,\Phi_i = A_-(\mathscr{L})\,\Phi_i$$

внутри радиуса сходимости. В этом случае условия ортогональности (1.5.5) немедленно дают

(1.5.14) $$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\begin{pmatrix}r\\ -q\end{pmatrix}_t \cdot \Phi_i + 2\begin{pmatrix}r\\ q\end{pmatrix} A_-(\mathscr{L}) \cdot \Phi_i\right] dx = 0, \quad i = 1,\ 2.$$

Теперь задача состоит в том, чтобы заменить оператор $A_-(\mathscr{L})$, действующий на Φ_i, сопряженным оператором, который действует на вектор $(r, q)^T$ (T обозначает транспонирование).

Для этого определим скалярное произведение обычным образом: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\, dx$. Оператор $\mathscr{L}^A$, сопряженный к $\mathscr{L}$

(это не эрмитово сопряжение), определяется соотношением $\langle \mathscr{L}^A \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathscr{L}\mathbf{v} \rangle$. Типичными примерами служат: (i) сопряженным к ∂_x является $-\partial_x$ (при убывающих граничных условиях для $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$); (ii) для квадратной матрицы $M = [m_{ij}]$ сопряженной является транспонированная матрица $M^A = [m_{ji}^A]$. Найдем оператор, являющийся сопряженным к скалярному оператору $\hat{L} = \alpha(x) I_- \beta(x)$. Действуя по определению и изменяя порядок интегрирования, получим

$$\langle u, \alpha I_- \beta v \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx u(x) \alpha(x) \int_{-\infty}^{x} dy \, \beta(y) v(y) = $$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy \beta(y) v(y) \int_{y}^{\infty} dx \alpha(x) u(x).$$

Отсюда видно, что

$$\hat{L}^A = \beta I_+ \alpha = \beta(x) \int_{x}^{\infty} dy \cdot \alpha(y).$$

Используя этот результат и (1.5.14), получим

$$\text{(1.5.15a)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \left[\begin{pmatrix} r \\ -q \end{pmatrix} + 2A_-(\mathscr{L}^A) \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix} \right] \cdot \Phi_i \, dx = 0, \qquad i = 1, 2,$$

где

$$\text{(1.5.15b)} \qquad \mathscr{L}^A = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} \partial_x + 2rI_+q & -2rI_+r \\ 2qI_+q & -\partial_x - 2qI_+r \end{pmatrix}$$

и $A_-(\mathscr{L}^A)$ действует только на $\begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}$. Таким образом, достаточными условиями разрешимости (1.2.8) с граничными условиями $A \to A_-(\zeta)$, B, $C \to 0$ при $|x| \to \infty$ являются уравнения

$$\text{(1.5.16a)} \qquad \begin{pmatrix} r \\ -q \end{pmatrix}_t + 2A_-(\mathscr{L}^A) \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix} = 0,$$

или в матричной форме

$$\text{(1.5.16b)} \qquad \sigma_3 \mathbf{u}_t + 2A_-(\mathscr{L}^A) \mathbf{u} = 0,$$

где

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}.$$

Итак, мы пока что лишь показали, что условия (1.5.16) являются достаточными для выполнения условий ортогональности

(1.5.5). Они являются также и необходимыми, так что (1.5.16) представляет собой наиболее общую систему эволюционных уравнений, интегрируемую посредством представления (1.2.7) при следующих условиях: (i) $q \to 0$, $A \to A_-(\zeta)$, $B \to 0$, $C \to 0$ при $|x| \to \infty$; (ii) $r = \pm q^*$; (iii) $A_-(\zeta)$ — целая функция. Это утверждение вытекает из того факта, что любое эволюционное уравнение имеет решения с произвольно малой нормой $\int |q|\,dx$. Если интеграл $\int |q|\,dx$ достаточно мал, то из (1.3.16) следует отсутствие связанных состояний. Кауп [258] показал, что при отсутствии связанных состояний функции Φ_1, Φ_2 образуют полный набор. Поэтому из (1.5.15) следует уравнение (1.5.16), которое является наиболее общим эволюционным уравнением, что и утверждалось. Аналогичное рассуждение применимо в случае, когда функция $A_-(\zeta)$ является отношением целых функций, но при этом эволюционные уравнения содержат дополнительные связи (см. [12]).

Важно, что $A_-(\zeta)$ можно связать с дисперсионным соотношением соответствующей *линеаризованной* задачи. В пределе $x \to \infty$, $I_+ \to 0$ $\left(\text{напомним, что } I_+ = \int_x^\infty dy\right)$ и

$$\mathcal{L}^A \sim \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & -\partial_x \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в этом пределе мы получаем распадающуюся систему

$$\begin{aligned} r_t + 2A_-\left(\frac{1}{2i}\partial_x\right) r &= 0, \\ -q_t + 2A_-\left(\frac{1}{2i}\partial_x\right) q &= 0. \end{aligned} \tag{1.5.17}$$

Система (1.5.17) является линейной, и ее можно решить при помощи преобразования Фурье. Волновое решение $q = \exp(i(kx - \omega_q(k)t))$, $r = \exp(i(kx - \omega_r(k)t))$ приводит к условиям

$$A_-(\zeta) = \frac{1}{2i}\omega_q(-2\zeta) = -\frac{1}{2i}\omega_r(2\zeta). \tag{1.5.18}$$

а) Это означает, что установлена связь между $A_-(\zeta)$ и дисперсионным соотношением соответствующей *линеаризованной* задачи (1.5.17). Таким образом, общее эволюционное уравнение (1.5.16) выражается через дисперсионное соотношение линеаризованного уравнения и оператор $\mathcal{L}^A$ (см. (1.5.15)).

b) Существует требование, которое необходимо наложить на вид линеаризованной системы уравнений (на r, q), чтобы ее можно было решить посредством МОЗР.

С учетом этих результатов общее эволюционное уравнение (1.5.16) принимает вид

$$\sigma_3 \mathbf{u}_t - i\omega(-2\mathscr{L}^A)\,\mathbf{u} = 0, \tag{1.5.19}$$

где $\omega(k)$ определяется из линеаризованной задачи. Примером является нелинейное уравнение Шрёдингера $iq_t = q_{xx} \pm 2q^2q^*$, линеаризация которого имеет вид $iq_t = q_{xx}$. Полагая $q = \exp(ikx - i\omega t)$, мы найдем $\omega(k) = -k^2$. Из (1.5.19) следует

$$\begin{pmatrix} r \\ -q \end{pmatrix}_t = -4i(\mathscr{L}^A)^2 \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix} = -2\mathscr{L}^A \begin{pmatrix} r_x \\ -q_x \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} r_{xx} - 2r^2q \\ q_{xx} - 2q^2r \end{pmatrix}. \tag{1.5.20}$$

Когда $r = \pm q^*$, эта система совпадает с нелинейным уравнением Шрёдингера (1.2.11).

Вывод соотношения (1.5.19) требует условия r, $q \to 0$ при $|x| \to \infty$. Мы не можем просто положить $r = -1$, чтобы получить аналогичный результат для оператора Шрёдингера (1.2.20). В этом случае общее эволюционное уравнение, которое нашли Абловиц, Кауп, Ньюэлл и Сигур [12, приложение 3], имеет вид

$$q_t = \gamma(\mathscr{L}_s)\, q_x = 0, \tag{1.5.21a}$$

где

$$\mathscr{L}_s = -\frac{1}{4}\partial_x^2 - q + \frac{1}{2} q_x I_+, \tag{1.5.21b}$$

$$\gamma(k^2) = \frac{\omega(2k)}{2k}. \tag{1.5.21c}$$

Здесь $\omega(k)$ является дисперсионным соотношением линеаризованной задачи ($q = \exp(ikx - i\omega(k)t)$). Например, в случае уравнения КдФ $q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0$ линеаризованная задача имеет вид $q_t + q_{xxx} = 0$, что приводит к дисперсионному соотношению $\omega = -k^3$. Поэтому $\gamma(k^2) = -4k^2$ и, таким образом, $\gamma(\mathscr{L}_s) = -4\mathscr{L}_s$. Из (1.5.21) немедленно следует, что

$$q_t - 4\mathscr{L}_s q_x = 0 \Rightarrow q_t - 4\left(-\frac{1}{4}\partial_x^2 - q + \frac{1}{2} q_x I_+\right) q_x = 0$$
$$\Rightarrow q_t + q_{xxx} + 4qq_x + 2qq_x = 0.$$

Из приведенного анализа видно, что квадраты собственных функций играют важную роль. В частности, они эволюционируют во времени довольно простым образом. Например, в случае

уравнения КдФ из (1.2.24) и (1.2.20a) мы находим, что квадрат любой собственной функции подчиняется эволюционному уравнению (см. [172])

$$(v^2)_t + (v^2)_{xxx} + 6u\,(v^2)_x = 0, \tag{1.5.22}$$

которое представляет собой линеаризацию уравнения КдФ.

1.5.b. Нелинейный фурье-анализ — метод обратной задачи рассеяния. Весьма поразительна замечательная аналогия с фурье-анализом (ср. с разд. П.1). В линейной теории уравнения также определяются дисперсионным соотношением:

$$q_t = -i\omega(-i\partial_x)\,q. \tag{1.5.23a}$$

Например, $iq_t = q_{xx} \Rightarrow \omega(k) = -k^2$. Процедура решения начальной задачи на бесконечном интервале $(-\infty, \infty)$ в предположении достаточно быстрого убывания $q(x, 0) \to 0$ при $|x| \to \infty$ сводится к преобразованиям Фурье:

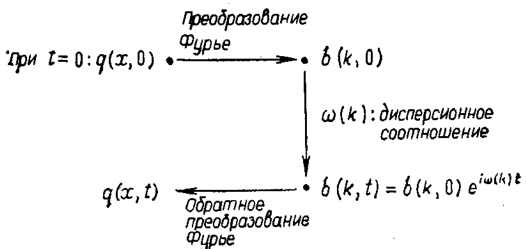
$$q(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} b(k, t)\,e^{ikx}\,dk, \tag{1.5.23b}$$

причем

$$b(k, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} q(x, 0)\,e^{-ikx}\,dx, \tag{1.2.23c}$$

$$b(k, t) = b(k, 0)\,e^{-i\omega(k)t}. \tag{1.2.23d}$$

Таким образом, по заданному в момент $t = 0$ начальному условию $q(x, 0)$ мы при помощи преобразования Фурье находим $b(k, 0)$. Функция $b(k, t)$ просто зависит от времени, и $q(x, t)$ получается обратным преобразованием Фурье. Схематически это можно изобразить следующим образом:



Близкая аналогия между методом обратной задачи рассеяния и методом преобразования Фурье побудила Абловица, Каупа, Ньюэлла и Сигура [12] назвать их процедуру решения Inverse Scattering Transform. Так и в линейной теории вид каждого эволюционного уравнения можно охарактеризовать некоторым дисперсионным соотношением, а именно дисперсионным соотноше-

нием соответствующего линеаризованного уравнения, например (1.5.19). Глубокая аналогия видна и в схеме решения эволюционных уравнений методом обратной задачи рассеяния. Для удобства примем $r = \pm q^*$. Пусть при $t = 0$ задана функция $q(x, 0)$. Следует решить прямую задачу рассеяния и найти данные рассеяния (разд. 1.3). Эволюция данных рассеяния во времени задается сравнительно простыми уравнениями (разд. 1.4), зависящими от дисперсионного соотношения линеаризованной задачи. Для восстановления потенциала следует решить уравнение обратной задачи (разд. 1.3). Схематически это можно изобразить так:

При $t=0$: $q(x, 0)$ —(Прямая задача)→ $S(\zeta, 0) = \left\{ \begin{matrix} (b/a)(\zeta, 0) \\ \{\zeta_j; C_{j,0}\}_{j=1}^N \end{matrix} \right\}$

↓ $\omega(k)$

$q(x, t)$ ←(Обратная задача)— $S(\zeta, t) = \left\{ \begin{matrix} (b/a)(\zeta, t) = (b/a)(\zeta, 0)\, e^{i\omega(-2\xi)t} \\ \left\{ \begin{matrix} C_j(t) = C_{j,0}\, e^{i\omega(-2\zeta_j)t} \\ \zeta_j = \mathrm{const} \end{matrix} \right\}_{j=1}^N \end{matrix} \right\}$

Обратная задача сводится к уравнению

(1.5.24a) $$K(x, y; t) \mp F^*(x+y; t) \pm \\ \pm \int_x^\infty \int_x^\infty K(x, z; t) F^*(z+s; t) F(s+y; t)\, ds\, dz = 0,$$

где

(1.5.24b) $$F(x; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b}{a}(\xi, t) e^{-i\xi x}\, d\xi - i \sum_{j=1}^N C_j(t) e^{i\zeta_j x}$$

определяется по начальным данным, а решение $q(x, t)$ можно найти из

(1.5.24c) $$q(x, t) = -2K(x, x; t).$$

1.5. с. Условия ортогональности. Здесь мы вернемся к выводу интегральных условий (1.5.5), следуя работе [12, приложение 1]. Рассмотрим задачу на собственные значения и временную зависимость в матричной форме:

(1.5.25a) $$\mathbf{v}_x = i\zeta D\mathbf{v} + N\mathbf{v},$$

(1.5.25b) $$\mathbf{v}_t = Q\mathbf{v},$$

где

(1.5.25c) $$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix}, \\ N = \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix}.$$

При помощи перекрестного дифференцирования с учетом $\zeta_t = 0$ получим

(1.5.26) $$N_t = Q_x + i\zeta [Q, D] + [Q, N],$$

где $[A, B] = AB - BA$. Сформируем матрицу фундаментального решения

(1.5.27a) $$P = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \bar{\varphi}_1 \\ \varphi_2 & \bar{\varphi}_2 \end{bmatrix}.$$

Обратную матрицу P^{-1} можно представить в виде

(1.5.27b) $$P^{-1} = \begin{bmatrix} -\bar{\varphi}_2 & \bar{\varphi}_1 \\ \varphi_2 & -\varphi_1 \end{bmatrix}.$$

Удобно определить матрицу S формулой $Q = PSP^{-1}$ (с S работать легче, чем с Q). Таким образом,

$$Q_x = P_x S P^{-1} + P S_x P^{-1} - P S P^{-1} P_x P^{-1}.$$

Подставляя это соотношение в (1.5.26) с учетом (1.5.25), мы получим простую формулу $N_t = PS_xP^{-1}$, или

(1.5.28) $$S = S(-\infty) + \int_{-\infty}^{x} P^{-1} N_t P_{dx}.$$

Граничное условие при $x = -\infty$ имеет вид

$$S(-\infty) = A_-(\zeta)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Из (1.5.28) мы можем при желании построить решения для A, B, C. Однако здесь мы выведем только интегральные условия, необходимые для существования решения.

Данные рассеяния $(a, b, \bar{a}, \bar{b})$ определяются соотношениями

(1.5.29a) $$\varphi = a\bar{\psi} + b\psi, \quad \bar{\varphi} = -\bar{a}\psi + \bar{b}\bar{\psi},$$

где при $x \to \infty$

(1.5.29b) $$\varphi \sim \begin{pmatrix} ae^{-i\zeta x} \\ be^{i\zeta x} \end{pmatrix}, \quad \bar{\varphi} \sim \begin{pmatrix} \bar{b}e^{-i\zeta x} \\ -\bar{a}e^{i\zeta x} \end{pmatrix}.$$

Отсюда и из $S = P^{-1}QP$ мы с легкостью находим

(1.5.30) $$S(+\infty)\begin{pmatrix} a\bar{a} - b\bar{b} & 2\bar{a}\bar{b} \\ 2ab & -(a\bar{a} - b\bar{b}) \end{pmatrix} A_-(\zeta).$$

Переходя в (1.5.28) к $x = +\infty$ и подставляя (1.5.20) в (1.5.28), получим

$$A_-(\zeta)(a\bar{a} - b\bar{b} - 1) = \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi_1\bar{\varphi}_1 r_t - \varphi_2\bar{\varphi}_2 q_t)\,dx,$$

$$(1.5.31) \qquad A_-(\zeta)\,2\bar{a}\bar{b} = \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\varphi}_1^2 r_t + \bar{\varphi}_2^2 q_t)\,dx,$$

$$A_-(\zeta)\,2ab = \int_{-\infty}^{\infty} (-\varphi_1^2 r_t + \bar{\varphi}_2^2 q_t)\,dx.$$

Из определений данных рассеяния и из задачи рассеяния можно установить равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\varphi_1\varphi_2)_x\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} (q\varphi_2^2 + r\varphi_1^2)\,dx = ab,$$

$$(1.5.32) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\varphi}_1\bar{\varphi}_2)_x\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} (q\bar{\varphi}_2^2 + r\bar{\varphi}_1^2)\,dx = -\bar{a}\bar{b},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\varphi_1\bar{\varphi}_2 + \varphi_2\bar{\varphi}_1)_x\,dx = 2\int_{-\infty}^{\infty} (q\varphi_2\bar{\varphi}_2 + r\varphi_1\bar{\varphi}_1)\,dx = a\bar{a} - b\bar{b} - 1,$$

воспользовавшись которыми с учетом (1.5.31) получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\varphi_1^2 r_t - \varphi_2^2 q_t)\,dx = -2A_-(\zeta)\int_{-\infty}^{\infty} (q\varphi_2^2 + r\varphi_1^2)\,dx,$$

$$(1.5.33) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\varphi}_1^2 r_t - \bar{\varphi}_2^2 q_t)\,dx = -2A_-(\zeta)\int_{-\infty}^{\infty} (q\bar{\varphi}_2^2 + r\bar{\varphi}_1^2)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\varphi_1\bar{\varphi}_1 r_t - \varphi_2\bar{\varphi}_2 q_t)\,dx = -2A_-(\zeta)\int_{-\infty}^{\infty} (q\varphi_2\bar{\varphi}_2 + r\varphi_1\bar{\varphi}_1)\,dx.$$

Таким образом, определяя квадраты собственных функций

$$(1.5.34) \qquad \Phi_1 = \begin{pmatrix} \varphi_1^2 \\ \varphi_2^2 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1^2 \\ \bar{\varphi}_2^2 \end{pmatrix}, \quad \Phi_3 = \begin{pmatrix} \varphi_1\bar{\varphi}_1 \\ \varphi_2\bar{\varphi}_2 \end{pmatrix},$$

мы получим, что (1.5.33) сводится к

$$(1.5.35) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \left[\begin{pmatrix} r \\ -q \end{pmatrix}_t + 2A_-(\zeta)\begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix} \right] \Phi_i\,dx = 0, \ i = 1,\ 2,\ 3,$$

т. е. к (1.5.5). Это соотношение было по существу отправным пунктом нашего построения общего эволюционного оператора.

Следует отметить, что вместо квадратичных комбинаций φ_i, $\bar{\varphi}_i$ в (1.5.35) мы могли бы найти аналогичные выражения через переменные ψ_i, $\bar{\psi}_i$, проинтегрировав (1.5.28) от $+\infty$ до x и воспользовавшись соответствующими равенствами при $x=+\infty$. Мы бы получили

(1.5.36a) $$\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma_3 u_t + 2A_-(\zeta)\,u)\,\Psi_i\,dx = 0,$$

где

(1.5.36b) $$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix},$$

(1.5.36c) $$\Psi_1 = \begin{pmatrix} \psi_1^2 \\ \psi_2^2 \end{pmatrix}, \quad \Psi_2 = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1^2 \\ \bar{\psi}_2^2 \end{pmatrix}, \quad \Psi_3 = \begin{pmatrix} \psi_1\bar{\psi}_1 \\ \psi_2\bar{\psi}_2 \end{pmatrix}.$$

Перейдем теперь к краткому обсуждению вопроса о полноте квадратов собственных функций. Кауп [258] показал, что набор Ψ_1, Ψ_2, определенный в (1.5.36с), не является полным. Для того чтобы получить полноту, к нему следует добавить два вектора Ψ_3, взятых в точках дискретного спектра $\zeta_n\}_{k=1}^{N}$, $\bar{\zeta}_k\}_{k=1}^{\bar{N}}$. [1])

Эти результаты позволяют построить разложения некоторых комбинаций исходных потенциалов и получить ряд простых выражений. В частности, используя Ψ_i, получим

(1.5.37) $$\begin{pmatrix} q \\ -r \end{pmatrix} = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{b}{a}(\xi)\,\Psi_2(x,\xi) + \frac{\bar{b}}{\bar{a}}(\xi)\,\Psi_2(x,\xi)\right\}d\xi + {}$$
$$+ 2i\sum_1^N \frac{b_k}{a_k'}\,\Psi_1(x,\zeta_k) - 2i\sum_1^{\bar{N}}\frac{\bar{b}_k}{\bar{a}_k'}\,\Psi_2(x,\zeta_k).$$

Точно так же, воспользовавшись присоединенными собственными функциями, можно показать, что

(1.5.38) $$\begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\bar{b}}{\bar{a}}(\xi)\begin{pmatrix} \varphi_2^2 \\ -\varphi_1^2 \end{pmatrix}(x,\xi) + \frac{\bar{b}}{\bar{a}}(\xi)\,\Psi_2(x,\xi)\right\}d\xi,$$
$$-2i\sum_1^N \frac{2}{b_k a_k'}\begin{pmatrix} \varphi_2^2 \\ -\varphi_1^2 \end{pmatrix}(x,\zeta_k) + 2i\sum_1^{\bar{N}}\frac{1}{\bar{b}_k\bar{a}_k'}\begin{pmatrix} \bar{\varphi}_2^2 \\ -\bar{\varphi}_1^2 \end{pmatrix}(x,\bar{\zeta}_k).$$

[1]) Полноту квадратов собственных фукций впервые обнаружил и использовал Кауп (1976а) [258]. В [2*] дано строгое доказательство теоремы о полноте квадратов собственных функций и построена спектральная теория оператора L. Другие приложения и дальнейшее развитие этого подхода заинтересованный читатель может найти в работах [3*—5*]. — *Прим. перев.*

Отметим также, что аналогичную теорию можно построить и для оператора Шрёдингера (см. [267, 285]). В этом случае разложение потенциала по квадратам собственных функций имеет вид

$$(1.5.39)\qquad q(x, t) = \frac{2}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k\rho(k)\,\psi^2(x, k)\,dk - 4\sum_{i=1}^{N}\gamma_i\varkappa_i\psi^2(x, \varkappa_i),$$

где $\gamma_i = b_i/a'_i$ и $\varkappa_i$ является i-м дискретным собственным значением. Уравнения (1.5.37—39) явились отправной точкой работы Дейфта, Лунда и Трубовица [135], которые рассматривали уравнения обратной задачи как задачу о бесконечном наборе осцилляторов, лежащих на поверхности бесконечномерной сферы.

Отметим, что другой вывод общего эволюционного уравнения (1.5.16, 21) был дан Калоджеро и Дегасперисом в серии работ (см,. например, работу Калоджеро [89] и приведенные в ней ссылки). Задачу рассеяния для оператора Шрёдингера (так же как и в случае оператора Захарова — Шабата из разд. 1.3) можно переписать в виде интегрального уравнения и выразить коэффициент отражения через интеграл от потенциала и собственной функции:

$$(1.5.40)\qquad 2ik\rho(k) = \int_{-\infty}^{\infty} q(x)\,\psi(x, k)\,e^{-ikx}\,dx.$$

Более общая формула для двух потенциалов $q_1(x)$ и $q_2(x)$ имеет вид

$$(1.5.41)\qquad 2ik\,[\rho_1(k) - \rho_2(k)] = \int \psi_1(x, k)\,[q_1(x) - q_2(x)]\,\psi_2(x, k)\,dx,$$

она сводится к (1.5.40) при $q_2 \equiv 0$. Калоджеро и Дегасперис получили различные обобщения формулы (1.5.41). Важно отметить, что $q_1(x)$ и $q_2(x)$ являются независимыми.

Если $q(x, t)$ удовлетворяет некоторому эволюционному уравнению, мы можем положить $q_1(x) = q(x, t_0)$, $q_2(x) = q(x, t_0 + \Delta t)$ и устремить $\Delta t \to 0$. Тогда (1.5.41) свяжет $\partial_t\rho$ и $\partial_t q$, а соотношения типа (1.5.41) позволят вывести (1.5.21), т. е. общее эволюционное уравнение для (1.2.20). Этот подход не имеет заметных преимуществ по сравнению с уже описанным. Калоджеро и Дегасперис получили следующие обобщения: (i) (1.2.20) изучалась для матричных $N \times N$ уравнений; (ii) предполагая $q = q(x, t, y)$, можно получить многомерные эволюционные уравнения. Кроме того, используя этот подход, Чью и Ладик [109] получили общее эволюционное уравнение для дискретной задачи рассеяния, которая будет обсуждаться в разд. 2.2.

1.6. Законы сохранения и полная интегрируемость. Одной из наиболее важных удач на ранней стадии развития МОЗР было открытие бесконечного набора локальных законов сохранения у уравнения КдФ (Миура, Гарднер, Краскал (1968) [383]). Это открытие вместе с аналогичными результатами для мКдФ привело к преобразованию Миуры, связывающему решения этих двух уравнений и в конце концов к задаче рассеяния для оператора Шрёдингера (1.2.20). В этом разделе мы покажем, что существование бесконечного набора сохраняющихся величин является прямым следствием того факта, что $a(k)$ (коэффициент прохождения в минус первой степени) не зависит от времени. Сохраняющиеся величины возникают как коэффициенты асимптотического разложения по k^{-1} выражения $\ln a(k)$ при $k \to \infty$. Кроме того, их просто выразить через данные рассеяния (формулы следов); это будет использоваться в разд. 1.7 и 4.5. И наконец, мы покажем, что нелинейные эволюционные уравнения, для которых $\ln a$ не зависит от времени, являются вполне интегрируемыми гамильтоновыми системами и что МОЗР является каноническим преобразованием к переменным типа действие — угол, причем $\ln |a|$ является переменной типа действия. Для удобства изложения мы в основном будем изучать системы вида (1.5.16), связанные с задачей (1.2.7). Вычисления аналогичны проделанным для систем, связанных с (1.2.20), поэтому мы ограничимся формулировкой результатов.

1.6. а. Законы сохранения. Вначале построим бесконечный набор сохраняющихся величин для нелинейного уравнения Шрёдингера и всех остальных уравнений, связанных с задачей (1.2.7); при этом мы воспользуемся методом, предложенным Захаровым и Шабатом [544]. Напомним, что если (φ_1, φ_2) является решением уравнения (1.2.7а), удовлетворяющим граничному условию (1.3.1), то при $\operatorname{Im} \zeta \geqslant 0$ функция $\varphi_1 e^{i\zeta x}$ аналитична и стремится к 1 при $|\zeta| \to \infty$. Кроме того, существует предел

$$a(\zeta) = \lim_{x \to \infty} \varphi_1 e^{i\zeta x}, \tag{1.6.1}$$

обладающий этими двумя свойствами и не зависящий от времени. Исключим φ_2 из (1.2.7а) и подставим

$$\varphi_1 = \exp\{-i\zeta x + \hat{\varphi}\} \tag{1.6.2}$$

в уравнение. В результате мы получим уравнение Риккати для $\mu = \hat{\varphi}_x$:

$$2i\zeta\mu = \mu^2 - qr + q\left(\frac{\mu}{q}\right)_x. \tag{1.6.3}$$

Поскольку $\hat{\varphi}$ стремится к нулю при $|\zeta|\to\infty$ $(\operatorname{Im}\zeta>0)$, мы можем представить

(1.6.4) $$\mu=(2i\zeta)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mu_n(x,t)}{(2i\zeta)^n}.$$

Подставляя (1.6.4) в (1.6.3), получим

(1.6.5) $$\mu_0=-qr,\qquad \mu_1=-qr_x,$$
$$\mu_{n+1}=q\left(\frac{\mu_n}{q}\right)_x+\sum_{k=0}^{n-1}\mu_k\mu_{n-k-1},\quad n\geqslant 1.$$

Из (1.6.1) и того факта, что φ стремится к нулю при $x\to-\infty$, следует, что

(1.6.6a) $$\ln a(\zeta)=\hat{\varphi}(x=+\infty)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n}{(2i\zeta)^{n+1}},$$

где

(1.6.6b) $$C_n=\int_{-\infty}^{\infty}\mu_n\,dx.$$

Но $\ln a(\zeta)$ не зависит от времени (при *всех* ζ, $\operatorname{Im}\zeta>0$), так что C_n также должны быть независимыми от времени. Таким образом, несколько первых (глобальных) интегралов движения имеют вид

(1.6.7) $$C_0=\int\{-qr\}\,dx,\quad C_1=\int\{-qr_x\}\,dx,$$
$$C_2=\int\{-qr_{xx}+(qr)^2\}\,dx,$$
$$C_3=\int\{-qr_{xxx}+4q^2rr_x+r^2qq_x\}\,dx.$$

Если r пропорционально q, то по индукции легко получить, что $C_{2n+1}\equiv 0$. Отметим, что при выводе мы не использовали (1.2.7b), поэтому эти интегралы являются сохраняющимися для любого уравнения, разрешимого посредством (1.2.7), т. е. для *любого* уравнения вида (1.5.16).

В локальной форме законы сохранения (и плотности, и потоки) можно получить родственным методом, предложенным в работе [287], используя оба уравнения (1.2.7a) и (1.2.7b) (см. также [494, 193]). В этом методе после исключения φ_2 подстав-

ляем (1.6.2) в оба уравнения (1.2.7a, b). В результате получим

$$2i\zeta\hat{\varphi}_x = \hat{\varphi}_x^2 - qr + q\left(\frac{\hat{\varphi}_x}{q}\right)_x, \tag{1.6.8a}$$

$$\hat{\varphi}_t = A + \frac{B}{q}\hat{\varphi}_x. \tag{1.6.8b}$$

Определив $\mu = \hat{\varphi}_x$, мы увидим, что (1.6.8a) совпадает с (1.6.3) и можно вновь воспользоваться (1.6.4), (1.6.5). Подставляя (1.6.4) в продифференцированное по x равенство (1.6.8b), получим

$$\partial_t\left\{\sum_0^\infty \frac{\mu_n}{(2i\zeta)^{n+1}}\right\} = \partial_x\left\{A + \frac{B}{q}\sum_0^\infty \frac{\mu_n}{(2i\zeta)^{n+1}}\right\}. \tag{1.6.9}$$

Конкретное эволюционное уравнение задается подходящим выбором A и B. После этого законы сохранения следуют из (1.6.9); для их получения следует приравнять коэффициенты при $(2i\zeta)^{-n}$ и воспользоваться (1.6.5).

Например, если

$$\begin{aligned} &r = \sigma q^*, \qquad \sigma = \pm 1, \\ &A = -2i\zeta^2 - i\sigma|q|^2, \qquad B = 2\zeta q + iq_x, \end{aligned} \tag{1.6.10}$$

эволюционное уравнение имеет вид

$$iq_t + q_{xx} - 2\sigma|q|^2 q = 0, \tag{1.6.11}$$

и (1.6.9) превращается в

$$\begin{aligned} \partial_t\left\{\sum_0^\infty \frac{\mu_n}{(2i\zeta)^{n+1}}\right\} + i\partial_x\Bigg\{2\zeta^2 + \sigma|q|^2 + \\ + \left(2i\zeta - \frac{q_x}{q}\right)\sum_0^\infty \frac{\mu_n}{(2i\zeta)^{n+1}}\Bigg\} = 0. \end{aligned} \tag{1.6.12}$$

При $n \leqslant -1$ коэффициенты при $(2i\zeta)^{-n}$ равны нулю; при $n \geqslant 0$ находим

$$\begin{aligned} &n = 0, \quad \partial_t\{|q|^2\} + i\partial_x\{qq_x^* - q^*q_x\} = 0, \\ &n = 1, \quad \partial_t\{-qq_x^*\} + i\partial_x\{|q_x|^2 - qq_{xx}^* + \sigma|q|^4\} = 0 \end{aligned} \tag{1.6.13}$$

и т. д. Сохраняющиеся плотности совпадают для всех уравнений вида (1.5.16), но соответствующие им потоки зависят от рассматриваемого уравнения.

Отметим, что этот вывод законов сохранения применим как в случае бесконечного (по x) интервала, так и в периодическом (см. разд. 2.3) случае. Это означает, что *локальные* законы со-

хранения справедливы при любых граничных условиях. При этом подходе совсем не использовалась задача рассеяния.

Законы сохранения, связанные с задачей рассеяния для оператора Шрёдингера (1.2.20), можно получить аналогичным образом [383, 532]. Подстановка $v = \exp(\varphi + ikx)$ превращает (1.2.20a) в уравнение Риккати для φ_x

(1.6.14a) $$(\varphi_x)_x + (\varphi_x)^2 + q + 2ik\varphi_x = 0,$$

а (1.2.20b) переходит в

(1.6.14b) $$\varphi_t = A + (\varphi_x + ik) B.$$

После разложения $\mu = \varphi_x$ по обратным степеням $(2ik)$,

(1.6.15) $$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{(2ik)^n},$$

мы обнаружим (из (1.6.14a)), что μ_{2n} являются полными производными и что

(1.6.16) $$\mu_1 = -q, \quad \mu_3 = -(q^2 + q_{xx}), \ \ldots, \quad \mu_{n+1} = \sum_{p=1}^{n-1} \mu_p \mu_{n-p} + \partial_x(\mu_n), \quad n \geqslant 2.$$

Последние величины являются плотностями законов сохранения. В локальной форме законы сохранения для уравнения КдФ можно получить, подставив

$$A = q_x, \quad B = 4k^2 - 2q$$

в выражение (1.6.14b), продифференцированное по x. Воспользовавшись (1.6.15, 16), получим

(1.6.17a) $$\partial_t \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{(2ik)^n} \right\} = \partial_x \left\{ q_x + (4k^2 - 2q) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{(2ik)^n} - ik \right) \right\}.$$

Нетривиальные законы сохранения представляют собой коэффициенты при нечетных степенях k:

(1.6.17b) $$k^{-1}: \ \partial_t\{q\} = -\partial_x\{3q^2 + q_{xx}\},$$
$$k^{-3}: \ \partial_t\{q^2 + q_{xx}\} = -\partial x\{4q^3 + 8qq_x - 5q_x^{(5)} - q_{xxxx}\}.$$

Из (1.6.6) видно, что при известных интегралах движения функция $\ln a(\zeta)$ также является известной при $\operatorname{Im}\zeta > 0$. Теперь мы выведем формулы следов, появившиеся впервые в работе Захарова и Фаддеева (1971) [532] для уравнения КдФ. Они позволяют выразить интегралы движения через $a(\xi)$ и будут использоваться в этом разделе и в разд. 1.7. При выводе мы бу-

дем следовать работе Захарова и Манакова [534]; см. также [162, 281].

Напомним, что $a(\zeta)$ является аналитической функцией при $\operatorname{Im}\zeta > 0$, имеющей конечное число нулей (при $\zeta=\zeta_m$, $m=1, \ldots, N$), и $a(\zeta)\to 1$ при $|\zeta|\to\infty$, $\operatorname{Im}\zeta > 0$. Мы также предполагаем, что (i) нули являются простыми, (ii) они не лежат на вещественной оси, (iii) при вещественных ξ функция $\xi^n \ln a(\xi)\to 0$ при $|\xi|\to\infty$ для любого $n\geqslant 0$. Пусть

$$\alpha(\zeta) = a(\zeta)\prod_{m=1}^{N}\frac{\zeta-\zeta_m^*}{\zeta-\zeta_m}; \tag{1.6.18a}$$

$\alpha(\zeta)$ обладает теми же свойствами, что и $a(\zeta)$, но не имеет нулей в верхней полуплоскости. Функция $\bar{a}(\zeta)$ аналитична в нижней полуплоскости, а

$$\bar{\alpha}(\zeta) = \bar{a}(\zeta)\prod_{l=1}^{\bar{N}}\frac{\zeta-\bar{\zeta}_l^*}{\zeta-\bar{\zeta}_l}, \tag{1.6.18b}$$

аналитична и не имеет нулей при $\operatorname{Im}\zeta\leqslant 0$, и в этой области $\bar{\alpha}\to 1$ при $|\zeta|\to\infty$. Согласно теореме об интеграле Коши, имеем (для $\operatorname{Im}\zeta > 0$)

$$\ln\alpha(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\alpha(\xi)}{\xi-\zeta}\,d\xi,$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\bar{\alpha}(\xi)}{\xi-\zeta}\,d\xi.$$

Складывая эти равенства, получим при $\operatorname{Im}\zeta > 0$

$$\ln a(\zeta) = \sum_{m=1}^{N}\ln\left\{\frac{\zeta-\zeta_m}{\zeta-\zeta_m^*}\right\} + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\alpha\bar{\alpha}}{\xi-\zeta}\,d\xi. \tag{1.6.19}$$

Если далее предположить, что $r=\pm q^*$, то выражение упростится:

$$\ln a(\zeta) = \sum_{m=1}^{N}\ln\left\{\frac{\zeta-\zeta_m}{\zeta-\zeta_m^*}\right\} + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|a(\xi)|^2}{\xi-\zeta}\,d\xi.$$

Теперь перейдем к пределу $|\zeta|\to\infty$ (оставаясь в верхней полуплоскости) и разложим правую часть (1.6.19) по обратным сте-

пеням ζ. В результате получим

(1.6.20)
$$\ln a(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^{-(n+1)}\left\{\sum_{m=1}^{N}(n+1)^{-1}\left[(\zeta_m^*)^{n+1}-(\zeta_m)^{n+1}\right]-\right.$$
$$\left.-(2\pi i)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\xi^n\left[\ln a\bar{a}(\xi)+\sum_1^N\ln\frac{\xi-\zeta_m^*}{\xi-\zeta_m}+\sum_1^{\bar N}\ln\frac{\xi-\bar\zeta_l^*}{\xi-\bar\zeta_l}\right]\right\}.$$

Это разложение должно совпадать с (1.6.6). Приравнивая коэффициенты при степенях ζ, получим ($n=0,1,2\ldots$)

(1.6.21a)
$$C_n=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(2i\xi)^n\left[\ln a\bar{a}(\xi)+\sum_1^N\ln\frac{\xi-\zeta_m^*}{\xi-\zeta_m}+\right.$$
$$\left.+\sum_1^{\bar N}\ln\frac{\xi-\bar\zeta_l^*}{\xi-\bar\zeta_l}\right]d\xi+\sum_{m=1}^{N}(n+1)^{-1}\left[(2i\zeta_m^*)^{n+1}-(2i\zeta_m)^{n+1}\right]$$

Если $r=\pm q^*$, то выражение для C_n упростится:

(1.6.21b)
$$C_n=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(2i\xi)^n\ln|a(\xi)|^2d\xi+$$
$$+\sum_{m=1}^{N}(n+1)^{-1}\left[(2i\zeta_m^*)^{n+1}-(2i\zeta_m)^{n+1}\right].$$

Кроме того, $N=0$, если $r=+q^*$ и $q\in L_1$. Мы получили так называемые «формулы следов» для (1.2.7) при $r=\pm q^*$. Они связывают бесконечную серию интегралов движения C_n с моментами $\ln|a(\xi)|$ и степенями дискретных собственных значений оператора. Еще раз подчеркнем, что эти формулы справедливы для любого уравнения (1.5.16) при $r=\pm q^*$.

Для оператора Шрёдингера данные рассеяния состоят из $\{\rho(k),\ k$ вещественно, $\varkappa_n,\ C_n,\ n=1,\ldots,N\}$. Соответствующие формулы следов могут быть представлены следующим образом [532]. Определим $C_m=\int_{-\infty}^{\infty}\mu_m\,dx$, где μ_m определено в (1.6.15). Тогда

(1.6.22)
$$C_{2m+1}=\frac{2}{2m+1}\sum_{n=1}^{N}(2\varkappa_n)^{2m+1}+$$
$$+\frac{(-1)^m}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(2k)^{2m}\ln\{1-|\rho(k)|^2\}\,dk,$$
$$C_{2m}=0.$$

1.6. b. Полная интегрируемость. Рассмотрим теперь одно из наиболее фундаментальных описаний МОЗР: уравнения, которые можно решить при помощи МОЗР (например, (1.5.16)), являются вполне интегрируемыми гамильтоновыми системами, и МОЗР позволяет построить каноническое преобразование от физических переменных к бесконечному набору переменных типа действие — угол. Основной вопрос этого раздела состоит не в том, какие новые задачи можно решить с помощью МОЗР, а скорее его можно сформулировать так: «Почему же МОЗР работает?»

Описание МОЗР как канонического преобразования к переменным действие — угол было впервые дано для уравнения КдФ в работе Захарова и Фаддеева (1971) [532], последовавшей вскоре после работы Гарднера (1971) [171]. Для нелинейного уравнения Шрёдингера аналогичные результаты получили Тахтаджян [471] и Захаров и Манаков [534]. Результаты последней работы послужили основой для обобщений, полученных многими авторами (см., например, [162, 281, 370, 160]). Приведенный здесь вывод опирается на все эти работы, несмотря на небольшие расхождения полученных в них результатов.

Мы начнем с рассмотрения основных понятий и обозначений гамильтоновой механики, которые потребуются для формального обобщения на бесконечномерный случай. (Читатель, не знакомый с гамильтоновой механикой, может для справок обратиться к книгам Голдстейна [188] или Арнольда [44].) Пусть $p(x,t,\alpha)$, $q(x,t,\beta)$ будут аналитическими по x функциям $(-\infty < x < \infty)$, быстро убывающим при $|x| \to \infty$ при любых значениях (t, α, β) из области определения. Пусть

$$H(p, q, t) = \int_{-\infty}^{\infty} h\{p(x, t, \alpha), q(x, t, \beta)\}\, dx$$

будет комплекснозначным функционалом от p, q и их производных по x. Его функциональная (Фреше или вариационная) производная $\delta H/\delta p$ определяется формулой

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta H}{\delta p} \frac{\partial p}{\partial \alpha}\, dx; \tag{1.6.23}$$

$\delta H/\delta q$ имеет аналогичное определение.

Пример. Из тождества

$$p(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - y)\, p(x)\, dx$$

следует, что

$$\frac{\delta p(y)}{\delta p(x)} = \delta(x-y),$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

В рассматриваемых нами случаях h (в (1.6.23) будет бесконечно дифференцируемой функцией от (p, q) и их x-производных. Прямым вычислением получим

$$(1.6.24) \qquad \frac{\delta H}{\delta p} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{\partial h}{\partial p_n}, \qquad p_n \equiv \frac{\partial^n p}{\partial x^n}.$$

Для некоторых приложений удобно определить $p = \varphi_x$; тогда тождество

$$(1.6.25) \qquad \frac{\delta H}{\delta \varphi} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta p}$$

следует из того факта, что h зависит только от производных φ и не содержит самой φ.

Определение. Динамическая система является *гамильтоновой*, если возможно ввести координаты $[q]$, импульсы $[p]$ и гамильтониан $[H(p, q, t)]$ таким образом, что уравнения движения системы могут быть записаны в виде

$$(1.6.26\text{a, b}) \qquad \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta p}, \qquad \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta q}.$$

Уравнения (1.6.26) являются уравнениями Гамильтона, а переменные (p, q) называются *сопряженными.* Имеются обобщения (1.6.26), но для наших целей этого определения вполне достаточно; см. также (1.6.31).

Пример. Система

$$(1.6.27) \qquad \begin{aligned} iq_t + q_{xx} - 2q^2 r &= 0, \\ ir_t - r_{xx} + 2qr^2 &= 0 \end{aligned}$$

является гамильтоновой. Это можно увидеть, отождествляя:

координаты (q) с $q(x, t)$,
импульсы (p) с $r(x, t)$,
гамильтониан (H) с $-i \int_{-\infty}^{\infty} \{q_x r_x + (qr)^2\}\, dx.$

Если при $t = 0$ $r(x, 0) = \pm q^*(x, 0)$, то из уравнений (1.6.27) следует, что это соотношение справедливо при любых t, и мы

приходим к нелинейному уравнению Шрёдингера

(1.6.28) $$iq_t + q_{xx} \mp |q|^2 q = 0.$$

Иначе говоря (1.6.28) является гамильтоновой системой с координатами $[q(x, t)]$, импульсами $[q^*(x, t)]$ и гамильтонианом $\left[-i\int_{-\infty}^{\infty}\{\pm|q_x|^2+|q|^4\}\,dx\right]$. Это справедливо, если определить независимые вариации переменных q и p. В этом разделе мы будем рассматривать (1.6.28) как частный случай (1.6.27), в котором на начальные данные наложено дополнительное ограничение ($r = \pm q^*$).

Многие уравнения, интегрируемые МОЗР, имеют первый порядок по времени. В этом случае удобно пользоваться другой формой гамильтоновых уравнений.

Лемма. *Пусть* $H(p, q, t)$ — *гамильтониан динамической системы. Предположим, что он не содержит координаты q явно, хотя может содержать производные от q по x. Тогда соотношение*

$$p = q_x$$

совместно с (1.6.26), *и оба уравнения сводятся к*

(1.6.29) $$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H}{\delta P}\bigg|_{q_x=p}.$$

Доказательство. Выражение (1.6.29) является производной по x от (1.6.26a). Сведéние (1.6.26b) к этому виду следует из (1.6.25) и того факта, что $\partial h/\partial q$ обращается в нуль. □

Пример.

$$H = -\int\{pq_x^2 + p^2 q_x - p_x q_{xx}\}\,dx.$$

Динамические уравнения имеют вид

(1.6.30) $$\begin{aligned} q_t &= -q_x^2 - 2pq_x - q_{xxx}, \\ p_t &= -(2pq)_x - (p^2)_x - p_{xxx}. \end{aligned}$$

Если при $t = 0$ $p(x, 0) = q_x(x, 0)$, то это справедливо при всех t, так как эволюционные уравнения для p и q_x совпадают. Кроме того, оба уравнения превращаются в уравнение КдФ (1.2.2) для $p(x, t)$.

Таким образом, динамическая система является гамильтоновой либо когда ее можно представить в виде (1.6.26) для гамильтониана $H(p, q, t)$, либо если она представима в виде

(1.6.31) $$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta \hat{H}}{\delta p}$$

для гамильтониана $\hat{H}(p, t)$[1]. Читатель должен помнить, что $\hat{H}(p, t) \neq H(p, q)|_{q_x=p}$, хотя между ними имеется очевидная связь.

Пример. Уравнение КдФ имеет вид (1.6.31) с гамильтонианом

$$\hat{H} = -\int \left(p^3 - \frac{1}{2} p_x^2\right) dx. \tag{1.6.32}$$

Здесь $\hat{H}$ отличается от $H|_{q_x=p}$ из предыдущего примера на множитель 2.

Далее для того, чтобы определить замены переменных от (p, q) к другому набору сопряженных величин (P, Q), мы определим *скобки Пуассона*:

$$\langle A, B\rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\delta A}{\delta q} \frac{\delta B}{\delta p} - \frac{\delta A}{\delta p} \frac{\delta B}{\delta q} \right\} dx. \tag{1.6.33}$$

Если гамильтониан H содержит только производные от q по x и не содержит q, то возможно отождествление $q_x = p$. В этом случае (1.6.33) следует заменить на

$$\langle A, B\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\delta A}{\delta p} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta B}{\delta p} \right\} dx. \tag{1.6.34}$$

Преобразование от (p, q) к (P, Q) по определению является *каноническим*, если

$$\begin{gathered} \langle Q(x), Q(y)\rangle = 0, \quad \langle P(x), P(y)\rangle = 0, \\ \langle Q(x), P(y)\rangle = \delta(x - y). \end{gathered} \tag{1.6.35}$$

Из (1.6.35) следует, что объем фазового пространства при этих преобразованиях не изменяется. Вопрос о том, является ли преобразование к новым переменным каноническим, аналогичен вопросу о полноте нового базиса в линейном векторном пространстве.

Пример. Тождественное преобразование

$$P(x, t) = p(x, t), \quad Q(x, t) = q(x, t)$$

является каноническим.

Имея теперь необходимый набор сведений, мы перейдем к главному: покажем, что МОЗР представляет собой каноническое преобразование к переменным типа действие — угол. Для того

---

[1]) На самом деле существует гораздо более общее определение гамильтоновой системы, так что (1.6.24) и (1.6.31) являются весьма частными примерами (см., например, [44]). — *Прим. ред.*

чтобы изложение было по возможности простым, мы здесь обсудим только уравнения вида (1.5.16) и лишь сформулируем результаты для (1.5.21). Перечислим наиболее важные моменты при этом исследовании:

1. Эволюционные уравнения вида (1.5.16) представляют собой (бесконечномерные) гамильтоновы динамические системы, в которых (q, r) играют роль сопряженных переменных.

2. Имеется подмножество S данных рассеяния, по которому все остальные данные рассеяния могут быть восстановлены.

3. Отображение $(q, r) \to S$ является каноническим.

4. Сопряженные переменные в $S (= P, Q)$ являются переменными типа действие — угол, т. е. $H = H(P)$, так что из (1.6.26) получим

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta P} = \text{const}. \tag{1.6.36}$$

Существование бесконечного набора законов сохранения непосредственно следует из выражения (1.6.36а) и эквивалентно ему, если на начальные данные (q, r) наложено достаточное количество ограничений.

В разд. 1.5 для любого дисперсионного соотношения, вещественного при вещественных k и являющегося целой функцией, было построено нелинейное эволюционное уравнение вида

$$\begin{pmatrix} r \\ -q \end{pmatrix}_t + 2A_-(\mathscr{L}^A)\begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix} = 0, \tag{1.5.16}$$

к которому применим МОЗР. Оператор $\mathscr{L}^A$ был определен в (1.5.15), A_- связано с дисперсионным соотношением посредством (1.5.18), и задача рассеяния рассматривается для оператора (1.2.7а).

Теорема. *Пусть A_- является целой функцией от ζ и имеет вид*

$$A_-(\zeta) = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty} (-2\zeta)^n a_n, \tag{1.6.37}$$

где все a_n вещественны. Тогда система уравнений (1.5.16) *является гамильтоновой, $q(x, t)$ и $r(x, t)$ служат сопряженными переменными, и гамильтониан имеет вид*

$$H(q, r) = i\sum_{n=0}^{\infty} a_n (i)^n C_n(q, r), \tag{1.6.38}$$

где C_n определены в (1.6.6).

Отметим, что утверждение теоремы легко проверяется в случае любой конкретной системы (например, такой, как (1.6.28)); для этого достаточно выписать гамильтониан и обобщенные пере-

менные. Доказательство того факта, что *любое* уравнение **вида** (1.5.16) является гамильтоновым, требует более длинных рассуждений.

Доказательство.

(i) Из (1.2.7a) при вещественных ζ имеем

$$\varphi_1(x, \zeta) e^{i\zeta x} = 1 + \int_{-\infty}^{x} q(y)\varphi_2(y, \zeta) e^{i\zeta y} dy;$$

таким образом,

$$\frac{\delta\varphi_1(x, \zeta)}{\delta q(y)} = \theta(x-y)\varphi_2(y, \zeta) e^{i\zeta(y-x)},$$

где $\theta(x)$ — функция Хевисайда.

(ii) Для любой функции $A(x)$, дифференцируемой всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек, можно определить

$$\frac{\delta A(x)}{\delta q(x)} = \lim_{y \uparrow x} \frac{\delta A(x)}{\delta q(y)},$$

так что

$$\frac{\delta\varphi_1(x, \zeta)}{\delta q(x)} = \varphi_2(x, \zeta).$$

Аналогично

$$\frac{\delta\varphi_2(x, \zeta)}{\delta r(x)} = \varphi_1(x, \zeta)$$

и

$$0 = \frac{\delta\varphi_1}{\delta r} = \frac{\delta\varphi_2}{\delta q} = \frac{\delta\psi_{1,2}}{\delta q} = \frac{\delta\psi_{1,2}}{\delta r}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\delta a(\zeta)}{\delta q(x)} &= \frac{\delta}{\delta q}\{\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1\} = \varphi_2(x, \zeta)\psi_2(x, \zeta), \\ \frac{\delta a(\zeta)}{\delta r(x)} &= -\varphi_1(x, \zeta)\psi_1(x, \zeta). \end{aligned} \tag{1.6.39}$$

Все эти величины определены в верхней полуплоскости ζ (см. разд. 1.3), и полученные соотношения могут быть туда продолжены.

(iii) При вещественных ζ из (1.2.7a) имеем

$$\begin{aligned} (\varphi_1\psi_1)_x + 2i\zeta\varphi_1\psi_1 &= q(\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1), \\ (\varphi_2\psi_2)_x - 2i\zeta\varphi_2\psi_2 &= r(\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1), \\ (\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1)_x &= 2q\varphi_2\psi_2 + 2r\varphi_1\psi_1. \end{aligned}$$

Используя граничное условие при $x \to +\infty$, получим

$$\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1 = a - 2\int_x^\infty \{q\varphi_2\psi_2 + r\varphi_1\psi_1\}\,dx;$$

таким образом,

$$\zeta\begin{pmatrix} \varphi_2\psi_2 \\ -\varphi_1\psi_1 \end{pmatrix} = \mathcal{L}^A\begin{pmatrix} \varphi_2\psi_2 \\ -\varphi_1\psi_1 \end{pmatrix} - \frac{a}{2i}\begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}.$$

Это соотношение также можно продолжить в верхнюю полуплоскость.

(iv) Устремим $|\zeta| \to \infty$, $\operatorname{Im}\zeta > 0$; в результате получим

$$\begin{pmatrix} \varphi_2\psi_2 \\ -\varphi_1\psi_1 \end{pmatrix} = -\frac{a}{2i\zeta}\left(1 - \frac{\mathcal{L}^A}{\zeta}\right)^{-1}\begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix} = -\frac{a}{2i\zeta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathcal{L}^A}{\zeta}\right)^n\begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}. \tag{1.6.40}$$

(v) Вариационные производные от $\ln a$ вычисляются при помощи (1.6.39), (1.6.40):

$$\frac{\delta \ln a}{\delta q} = -(2i\zeta)^{-1}\sum_0^\infty \left(\frac{\mathcal{L}^A}{\zeta}\right)^n r,$$

$$\frac{\delta \ln a}{\delta r} = -(2i\zeta)^{-1}\sum_0^\infty \left(\frac{\mathcal{L}^A}{\zeta}\right)^n q.$$

(vi) Теперь из (1.6.6) следует, что (1.5.19) можно переписать в виде

$$q_t = \frac{\delta H}{\delta r}, \qquad r_t = -\frac{\delta H}{\delta q},$$

где

$$H(q, r) = i\sum_{n=0}^\infty a_n C_n(q, r)(i)^n.$$

Это и есть желаемый результат. □

Таким образом, мы можем рассматривать эволюционные уравнения вида (1.5.19) как гамильтоновы системы; при этом дисперсионное соотношение линеаризованной системы имеет вид (1.6.37). (Отметим, что (1.6.27) служит примером для этой теоремы при $\omega = k^2$.) Естественно ожидать, что аналогичные результаты получатся и для эволюционных уравнений вида (1.5.21), связанных с (1.2.20) (подробности приведены, напри-

мер, в работе [162]). Их можно сформулировать следующим образом.

Пусть

$$\gamma(k^2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (k^2)^n$$

будет целой функцией. Нелинейное эволюционное уравнение (1.5.21) является гамильтоновым вида (1.6.31); при этом гамильтониан задается формулой

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n C_{2n+3}(-4)^n, \tag{1.6.41}$$

где C_n определены как в (1.6.22). Примером является гамильтониан уравнения КдФ.

Далее мы ограничимся гамильтоновыми системами вида (1.5.19) и определим для них скобки Пуассона

$$\langle A, B\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\delta A}{\delta q}\frac{\delta B}{\delta r} - \frac{\delta A}{\delta r}\frac{\delta B}{\delta q} \right\} dx. \tag{1.6.42}$$

Определение. Для заданной гамильтоновой системы говорят, что два функционала A, B, зависящие от сопряженных переменных, находятся в *инволюции*, если

$$\langle A, B\rangle = 0.$$

Для конечномерных гамильтоновых систем (с N координатами и N импульсами) теорема Лиувилля утверждает, что если существует N функционалов с линейно независимыми градиентами, находящимися в инволюции, то уравнения движения интегрируемы в квадратурах (см. [45]).

Лемма. *Интегралы движения* C_n, *бесконечная последовательность которых была определена соотношениями* (1.6.6), *находятся в инволюции для любой системы уравнений* (1.5.19), *соответствующей некоторой* $\omega(k)$.

Доказательство. Прямым вычислением получим

$$0 = \frac{dC_n}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\delta C_n}{\delta q}\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\delta C_n}{\delta r}\frac{\partial r}{\partial t} \right\} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\delta C_n}{\delta q}\frac{\delta H}{\delta r} - \frac{\delta C_n}{\delta r}\frac{\delta H}{\delta q} \right\} dx = \langle C_n, H\rangle.$$

В частности, это справедливо для $H = C_n$. □

Таким образом, существование бесконечного набора интегралов движения, находящихся в инволюции, для любой бесконечно-

мерной системы вида (1.5.19) наводит на мысль, что эти системы могут также оказаться вполне интегрируемыми. Эта догадка является верной, но для ее обоснования недостаточно наличия бесконечного набора инволютивных интегралов движения. Для бесконечномерных гамильтоновых систем совсем не очевидно, «сколько же» функционалов, находящихся в инволюции, требуется для того, чтобы гарантировать полную интегрируемость.

Определим теперь подмножество S данных рассеяния, по которому остальные данные рассеяния могут быть восстановлены. Здесь мы будем предполагать, что функции $a(\zeta)$, $\bar{a}(\zeta)$ имеют только простые нули в соответствующих полуплоскостях, причем они не лежат на вещественной оси. Тогда для вещественных ξ определим

(1.6.43a) $$P(\xi) = \ln\{a(\xi)\,\bar{a}(\xi)\}, \quad Q(\xi) = -\frac{1}{\pi}\ln b(\xi).$$

Может случиться, что имеются дискретные собственные значения при $\operatorname{Im}\zeta > 0$,

$$a(\zeta_m) = 0, \quad c_m = \frac{b}{a'}\bigg|_{\zeta=\zeta_m}, \quad m = 1, \ldots, N,$$

и при $\operatorname{Im}\zeta < 0$

$$\bar{a}(\zeta_l) = 0, \quad \bar{c}_l = \frac{\bar{b}}{\bar{a}'}\bigg|_{\zeta=\bar{\zeta}_l}, \quad l = 1, \ldots, \bar{N}.$$

Положим

(1.6.43b) $$P_m = \zeta_m, \quad Q_m = -2i\ln c_m,$$

(1.6.43c) $$\bar{P}_l = \bar{\zeta}_l, \quad \bar{Q}_l = -2i\ln \bar{c}_l.$$

Через S обозначим величины, определенные в (1.6.36).

Легко видеть, что остальные данные рассеяния легко восстанавливаются по S. При $\operatorname{Im}\zeta > 0$ функция $\ln a(\zeta)$ может быть восстановлена по S при помощи (1.6.20). Совершенно аналогично находятся $\ln a$ при $\operatorname{Im}\zeta = 0$ и $\ln\bar{a}(\zeta)$ при $\operatorname{Im}\zeta \leqslant 0$. Функцию $b(\xi)$ можно найти по $Q(\xi)$, а для нахождения $\bar{b}(\xi)$ можно воспользоваться соотношением $a\bar{a} + b\bar{b} = 1$. Если $r = \pm q^*$, то при вещественных ξ $\bar{a}(\xi) = a^*(\xi)$, поэтому функция $P(\xi)$ принимает вещественные значения, $|b(\xi)|$ определяется по $P(\xi)$, $Q(\xi)$ можно заменить на ее мнимую часть, а (1.6.43c) является излишним.

Итак, все данные рассеяния определяются по S. Согласно результатам разд. 1.3, потенциалы (q, r) также восстанавливаются по S. В этом смысле набор S является «полным». Для того чтобы показать, что отображение $(q, r) \to S$ является каноническим, нужно проверить условие (1.6.35). Это весьма утоми-

тельное вычисление, схематически описанное в упр. 1 к этому разделу. Его результаты, однако, принципиально важны.

Отображение $(q, r) \to S$ является каноническим преобразованием. Поэтому динамику любой системы вида (1.5.19) можно описать как через (q, r), так и через S.

Остается записать гамильтониан в терминах S. Это легко сделать, подставляя (1.6.21a) в (1.6.38) и группируя подходящим образом члены. В результате (для заданного дисперсионного соотношения (1.6.27) линеаризованной задачи) получим

$$(1.6.44a)\qquad H = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A_-(\xi)\left[\ln a\bar{a}(\xi) + \sum_{m=1}^{N}\ln\frac{\xi-\zeta_m^*}{\xi-\zeta_m} + \sum_{l=1}^{\bar{N}}\ln\frac{\xi-\bar{\zeta}_l^*}{\xi-\zeta_l}\right]d\xi + 4i\sum_{m=1}^{N}\int_{\zeta_m^*}^{\zeta_m} A_-(\zeta)\,d\zeta.$$

Если $r = \pm q^*$, то

$$(1.6.44b)\qquad H = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A_-(\xi)\ln|a(\xi)|^2\,d\xi + 4i\sum_{m=1}^{N}\int_{\zeta_m^*}^{\zeta_m} A_-(\zeta)\,d\zeta.$$

Теперь очевидно, что H зависит только от обобщенных импульсов $(P(\xi), P_m, \bar{P}_l$ в (1.6.43)) и не зависит от координат $(Q(\xi), Q_m, \bar{Q}_l)$. Это является определяющим свойством переменных типа действие — угол. Также совершенно очевидно, что гамильтоновы уравнения теперь принимают вид

$$(1.6.45)\qquad \frac{\partial P}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta P}.$$

Таким образом, переменные P не зависят от времени, а Q изменяются во времени линейно, т. е. движение в этих переменных равномерно.

Запишем (1.6.45) в явной форме, воспользовавшись (1.6.43). Для вещественных ξ

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\ln a\bar{a}(\xi)\} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\{\ln b(\xi)\} = -2A_-(\xi);$$

для $m = 1, \ldots, N$

$$(1.6.46)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\zeta_m = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\{\ln c_m\} = -2A_-(\zeta_m);$$

для $l = 1, \ldots, \bar{N}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{\zeta}_l = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\{\ln \bar{c}_l\} = 2A_-(\bar{\zeta}_l).$$

(Вычисление $\delta H/\delta\zeta_m$ и $\delta H/\delta\bar{\zeta}_l$ по (1.6.44a) не столь очевидно, его набросок содержится в упр. 2 к этому разделу.) Это в точности совпадает с результатами разд. 1.4.

Теперь сформулируем соответствующие результаты для эволюционных уравнений вида (1.5.21), и в частности для уравнения КдФ [532, 162]. При вещественных k определим

$$P(k) = \frac{k}{\pi}\ln|a(k)|^2 = -\frac{k}{\pi}\ln\{1 - |\rho(k)|^2\}, \qquad (1.6.47\text{a})$$
$$Q(k) = \arg\rho(k)$$

и для дискретных собственных значений

$$P_n = -2\varkappa_n^2, \quad Q_n = \ln c_n \qquad (1.6.47\text{b})$$

(см. обозначения в разд. 1.3). Тогда можно показать, что отображение

$$q \to \{P(k),\ Q(k),\ P_n,\ Q_n\}$$

является каноническим, т. е. скобки Пуассона (1.6.24) для новых переменных удовлетворяют условиям (1.6.35). Кроме того, легко понять (см. (1.6.22), (1.6.41)), что переменные (1.6.47) являются переменными типа действие — угол. Гамильтоновы уравнения для КдФ в этих переменных эквивалентны (1.4.10).

Итак, мы можем рассматривать МОЗР как вполне конкретный метод построения канонического преобразования к переменным типа действие — угол. Динамика системы в этих переменных очень проста. Сравнительно простая картина поведения решений, возникающая в физических переменных (солитоны, их парное взаимодействие и т. д.), является прямым следствием существования переменных типа действие — угол. В частности, в задачах, интегрируемых МОЗР, невозможно стохастическое поведение.

Но это отнюдь не означает, что вся проблема стала тривиальной. Обратная задача рассеяния нетривиальна, и для нее нет уверенности даже в том, что решения обладают хорошими свойствами. Например, при $r \neq q^*$ точное 1-солитонное решение уравнений (1.6.27) может взорваться за конечное время (см. с (1.4.24)). Таким образом, сингулярности могут возникать даже в полностью интегрируемых системах, если при этом, конечно, не нарушаются законы сохранения. С этой точки зрения причина нашего интереса к случаю $r = \pm q^*$ состоит в том, что становится возможным определить интеграл $C_0 = \int rq\,dx$, который теперь служит в качестве нормы (не зависящей от времени).

1.7. Поведение решений на больших временах. Этот раздел посвящен описанию метода нахождения основного вклада в асимптотику решений вполне интегрируемых задач (при $t \to$

$\to\infty$). Помимо всего прочего, полученная информация может оказаться полезной, если соответствующие уравнения используются в качестве модели физического явления.

Нетрудно показать, что если решение задачи с начальными условиями, заданными на $-\infty < x < \infty$, содержит солитоны, то при $t\to\infty$ солитоны вносят вклад порядка $O(1)$, тогда как несолитонная часть (т. е. «излучение», соответствующее непрерывному спектру) медленно расплывается и исчезает. В этом смысле основной вклад в асимптотику вносят солитоны (см., например, [477]). Однако это описание справедливо не везде, т. е. существуют большие области пространства, в которых солитонный вклад пренебрежимо мал и доминирует излучение. Кроме того, может случиться, что солитонный вклад пренебрежимо мал для таких физически важных сохраняющихся величин, как импульс и энергия волнового пакета.

В разд. 1.4 обсуждалось N-солитонное решение. Здесь мы остановимся на таких задачах, когда из начального условия солитоны не возникают. Эти задачи представляют самостоятельный интерес.

(i) Солитоны отсутствуют, если $r = +q^*$ в (1.5.16) и $|q|\to 0$ достаточно быстро при $|x|\to\infty$.

(ii) При $r = -q^*$ в (1.5.16) солитоны могут появиться, но они не возникают для достаточно малых начальных данных (см. (1.3.16е)):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |q(x, 0)|\,dx < 0{,}904. \tag{1.7.1}$$

(iii) В (1.5.21) солитоны отсутствуют, если $q(x, 0) < 0$.

Этим задачам посвящено довольно много работ (Абловиц, Ньюэлл (1973) [21], Шабат (1973) [459], Манаков (1974) [345], Сигур, Абловиц (1976) [456], Захаров, Манаков (1976) [536], Абловиц, Сигур (1977) [26], Майлз (1979) [377], Абловиц, Краскал, Сигур (1979) [16], Сигур, Абловиц (1981) [457]). После того как мы узнаем поведение солитонов и излучения по отдельности, мы рассмотрим их взаимодействие.

Перед тем как перейти к описанию, мы сделаем два предостережения. Первое связано с тем, что в этом разделе почти нет результатов, имеющих строгое обоснование. Результаты носят формальный характер и имеют весьма важное значение для приложений, но еще требуется доказывать их асимптотичность. Второе (родственное) предостережение связано с тем, что в литературе по этому вопросу встречаются ошибки [1]).

[1]) Строгие результаты и обоснования асимптотических разложений при $t\to\infty$ можно найти в работах [6*—11*]. Причем в работах [7*, 8*] дано строгое математическое обоснование подхода Захарова — Манакова. — *Прим перев.*

В соответствии с качественным асимптотическим поведением решений эволюционные уравнения можно разделить на три группы:

(a) уравнения вида (1.5.16) с четным дисперсионным соотношением линеаризованной задачи (например, нелинейное уравнение Шрёдингера);

(b) уравнения вида (1.5.16) с нечетным дисперсионным соотношением линеаризованной задачи (например, модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза);

(c) уравнения вида (1.5.21) (например, уравнение Кортевега — де Фриза).

1.7. a. Нелинейное уравнение Шрёдингера. Мы начнем с уравнения

$$iq_t + q_{xx} - 2\sigma |q|^2 q = 0, \tag{1.7.2}$$

где $\sigma = \pm 1$ и $q \to 0$ при $|x| \to \infty$. Его (формальное) асимптотическое решение устроено сравнительно просто, поэтому здесь можно без особого труда пояснить некоторые детали метода. Чтобы исключить солитоны, мы потребуем для начальных данных выполнения условия (1.7.1) при $\sigma = -1$. Мы также будем предполагать, что начальные данные являются гладкими и убывающими достаточно быстро при $|x| \to \infty$.

Имеется точное автомодельное решение уравнения (1.7.2):

$$q(x, t) = t^{-1/2} A \exp\left\{ it \left[\frac{1}{4} \left(\frac{x}{t}\right)^2 - 2\sigma A^2 \frac{\ln t}{t} + \frac{\varphi}{t} \right] \right\}. \tag{1.7.3}$$

Отправляясь от него, мы будем искать решение с медленно меняющимися параметрами A, φ (см. разд. П.1). При $t \to \infty$ разложение имеет вид

$$q(x, t) \sim t^{-1/2} R e^{it\theta}, \tag{1.7.4a}$$

$$R = f + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln t)^k}{t^n} f_{n,k}\left(\frac{x}{t}\right) = f\left(\frac{x}{t}\right) + \frac{1}{t}\left(\ln t f_{1,1}\left(\frac{x}{t}\right) + f_{1,0}\left(\frac{x}{t}\right)\right) + O\left(\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2\right), \tag{1.7.4b}$$

$$\theta = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{t}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln t)^k}{t^n} \theta_{n,k}\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{t}\right)^2 + \frac{1}{4}\left[\ln t\, \theta_{1,1}\left(\frac{x}{t}\right) + \theta_{1,0}\left(\frac{x}{t}\right)\right] + O\left(\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2\right), \tag{1.7.4c}$$

где

$f = f\left(\frac{x}{t}\right)$ — это произвольная вещественная неотрицательная функция,

$$\theta_{1,1} = -2\sigma f^2,$$

$\theta_{1,0} = g = g\left(\frac{x}{t}\right)$ — это произвольная вещественная функция,

$$f_{1,1} = -4\sigma f\,(3(f')^2 + ff''),$$

$$f_{1,0} = fg'' + 2g'f' - 4\sigma f\,(2(f')^2 + ff'') \text{ и т. д.}$$

Это разложение можно продолжить до любой степени n. Все коэффициенты разложения можно выразить через две произвольные функции $f(x/t)$ и $g(x/t)$; для этого следует подставить (1.7.4) в (1.7.2) и привести подобные члены. Уравнение (1.7.2) не налагает ограничений на функции f и g; мы покажем, что они определяются по начальным данным.

Теперь мы *предположим*, что при $t \to \infty$ решение уравнения (1.7.2), развивающееся из некоторых начальных данных, стремится к виду (1.7.4). Тогда асимптотическое решение (1.7.2) будет определено, если функции f, g выражены через начальные данные. Это можно сделать несколькими способами; здесь мы обсудим два из них.

Вначале мы покажем, что законы сохранения однозначно определяют f, но не налагают ограничений на g. Это находится в соответствии с формулировкой разд. 1.6 в том смысле, что сохраняющиеся величины связаны в переменных действие — угол с действием и поэтому несут лишь «половину» информации, необходимой для описания динамической системы.

Напомним, что в разд. 1.6 интегралы движения уравнения (1.7.2) были получены в виде

$$C_n = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_n(x, t)\,dx,$$

где

$$\mu_0 = -\sigma|q|^2, \quad \mu_1 = -\sigma q q_x^*,$$

и для $n > 1$

$$\mu_{n+1} = q\left(\frac{\mu_n}{q}\right)_x + \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \mu_{n-k-1}. \tag{1.7.5}$$

Подставив (1.7.4) в (1.7.5), получим

$$C_0 = -\sigma \int_{-\infty}^{\infty} f^2(X)\,dX, \quad \left(X \equiv \frac{x}{t}\right),$$

$$C_1 = -\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{X}{2i}\right) f^2(X)\,dX,$$

$$C_3 = -\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{X}{2i}\right)^2 f^2(X)\,dX.$$

По индукции можно доказать, что

$$\mu_n(x, t) = -\sigma\left(\frac{X}{2i}\right)^n f^2(X) + O\left(\frac{\ln t}{t}\right),$$

так что при $t \to \infty$

$$C_n = -\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{X}{2i}\right)^n f^2(X)\,dX, \quad n = 0, 1, 2\ldots \tag{1.7.6}$$

Формулы следов (1.6.17) выражают интегралы движения через данные рассеяния:

$$C_n = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (2i\xi)^n \ln|a(\xi)|^2\,d\xi. \tag{1.7.7}$$

Если все эти интегралы сходятся, то бесконечная последовательность уравнений движения, возникающая при приравнивании (1.7.6) и (1.7.7), имеет в точности одно решение:

$$\begin{gathered} X = \frac{x}{t} = -4\xi, \\ f^2(X) = \frac{\sigma}{4\pi}\ln|a(\xi)|^2 = -\frac{\sigma}{4\pi}\ln\left\{1 - \sigma\left|\frac{b}{a}(\xi)\right|^2\right\}. \end{gathered} \tag{1.7.8}$$

Главный вклад в асимптотику решения уравнения (1.7.2) дается формулой (1.7.4) с учетом (1.7.8), хотя при этом функция $g(x/t)$ осталась неопределенной. Во многих прикладных задачах измерить фазу бывает существенно труднее, чем «интенсивность» $(=|f|^2)$ волны. Для практических целей в таких задачах нет необходимости знать функцию g.

Приведенным методом формула (1.7.8) была получена в работе Сигура и Абловица (1976) [456]. Манаков (1974) [345, 346] и Захаров, Манаков (1976) [535, 536] получили ее, используя два других метода. В дополнение к методу, основанному на законах сохранения, мы кратко приведем (несколько видоизме-

ненный) метод Захарова и Манакова, поскольку он позволяет определить обе функции f и g в терминах данных рассеяния. Для вещественных ξ определим

$$w_1(x, t; \xi) = \varphi_1(x, t; \xi)\exp(i\xi x), \quad w_2 = \varphi_2(x, t; \xi)\exp(-i\xi x),$$

при этом задача рассеяния (1.2.7a) превращается в

$$(1.7.9) \qquad (w_1)_x = q w_2 e^{2i\xi x}, \quad (w_2)_x = -\sigma q^* w_1 e^{-2i\xi x}$$

с граничными условиями

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ при } x \to -\infty, \qquad \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a(\xi) \\ b(\xi, t) \end{pmatrix} \text{ при } x \to +\infty.$$

Если q удовлетворяет (1.7.2), то

$$(1.7.10) \qquad b(\xi, t) = b(\xi, 0)\exp(4i\xi^2 t) = b(\xi)\exp(4i\xi^2 t).$$

Опять мы предположим, что при $t \to \infty$ решение уравнения (1.7.2) стремится к виду (1.7.4). Подставим (1.7.4) в (1.7.9), при этом в главном порядке

$$(1.7.11) \qquad \begin{aligned} (w_1)_x &\sim t^{-1/2} f\left(\frac{x}{t}\right) w_1 \exp\{-it\theta - 2i\xi x\}, \\ (w_2)_x &\sim \sigma t^{-1/2} f\left(\frac{x}{t}\right) w_1 \exp\{-it\theta - 2i\xi x\} \end{aligned}$$

с этими же граничными условиями. Далее мы будем предполагать, что $x/t \leqslant O(1)$ при $t \to \infty$, и пренебрегать членами порядка $O(\ln t/t)$ в (1.7.11). Для фиксированного и достаточно большого t (1.7.11) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений с быстрым $(t\theta + 2\xi x)$ и медленным (x/t) масштабами. Мы воспользуемся методом ВКБ. Итак, мы ищем решение (1.7.11) в виде

$$(1.7.12) \quad w_i(x, t; \xi) = w_{i,0}(\psi, X) + t^{-1/2} w_{i,1}(\psi, X) + O\left(\frac{\ln t}{t}, t^{-1}\right),$$

где

$$X = \frac{x}{t}, \quad \psi = t\theta + 2\xi x, \quad i = 1, 2, \ \theta \text{ дается формулой (1.7.4).}$$

Таким образом,

$$\partial_x \to \psi_x \partial_\psi + X_x \partial_x \sim \left(\frac{1}{2}X + 2\xi\right)\partial_\psi + t^{-1}\partial_X.$$

Если $(X/2 + 2\xi) \neq 0$, то, переходя в (1.7.11) к главному порядку, получим

$$\partial_\psi(w_{1,0}) \sim 0, \quad \partial_\psi(w_{2,0}) \sim 0,$$

так что для $i = 1, 2$

(1.7.13) $$w_{i,0} = w_{i,0}(X).$$

В порядке $t^{-1/2}$ имеем

$$\left(\frac{1}{2}X + 2\xi\right)\partial_\psi(w_{1,1}) \sim f(X)\, w_{2,0}(X)\, e^{i\psi},$$
$$\left(\frac{1}{2}X + 2\xi\right)\partial_\psi(w_{2,1}) \sim \sigma f(X)\, w_{1,0}(X)\, e^{-i\psi}.$$

Опуская однородные члены, мы получим

(1.7.14) $$w_{1,1}(\psi, X) \sim \frac{if(X)\, w_{2,0}(X)}{\left(\frac{1}{2}X + 2\xi\right)} e^{i\psi}, \qquad w_{2,1}(\psi, X) \sim \frac{i\sigma f(X)\, w_{1,0}(X)}{\left(\frac{1}{2}X + 2\xi\right)} e^{-i\psi}.$$

Секулярные члены возникают в порядке $O(t^{-1})$, где (1.7.9) приводит к

$$(X/2 + 2\xi)\,\partial_\psi(w_{1,2}) \sim f w_{2,1} e^{i\psi} - \partial_X(w_{1,0}),$$
$$(X/2 + 2\xi)\,\partial_\psi(w_{2,2}) \sim \sigma f w_{1,1} e^{-i\psi} - \partial_X(w_{2,0}).$$

Подстановка (1.7.14) в эти соотношения показывает, что исключение секулярных членов в этом порядке требует (при $X/2 + 2\xi \neq 0$)

$$\partial_X(w_{1,0}) \sim \frac{i\sigma f^2 w_{1,0}}{\frac{1}{2}X + 2\xi}, \qquad \partial_X(w_{2,0}) \sim -\frac{i\sigma f^2 w_{2,0}}{X/2 + 2\xi}.$$

Эти соотношения можно проинтегрировать и определить константы интегрирования из граничных условий для w_1, w_2. Таким образом, при $(X/2 + 2\xi) < 0$

(1.7.15a) $$w_{1,0}(X) = \exp\left\{i\sigma \int_{-\infty}^{X} \frac{f^2(y)}{\frac{1}{2}y + 2\xi}\, dy\right\}, \qquad w_{2,0} \sim 0,$$

а при $X/2 + 2\xi > 0$

(1.7.15b) $$w_{1,0}(X) = a(\xi)\exp\left\{-i\sigma \int_{X}^{\infty} \frac{f^2(y)}{y/2 + 2\xi}\, dy\right\},$$

(1.7.15c) $$w_{2,0}(X) = b(\xi, t)\exp\left\{i\sigma \int_{X}^{\infty} \frac{f^2(y)}{y/2 + 2\xi}\, dy\right\}.$$

Эти формулы несправедливы в окрестности $X/2+2\xi=0$, в которой требуется разложение, отличающееся от (1.7.12). Из (1.7.15) при $X\uparrow(-4\xi)$

$$w_{1,0}(X)\sim|X+4\xi|^{2i\sigma f_0^2}\exp\left\{-2i\sigma\int_{-\infty}^{-4\xi}(f^2)_y\ln|y+4\xi|\,dy\right\},\tag{1.7.16}$$
$$w_{2,0}(X)\sim 0,$$

а при $X\downarrow(-4\xi)$

$$w_{1,0}(X)\sim a(\xi)(X+4\xi)^{2i\sigma f_0^2}\exp\left\{-2i\sigma\int_{-4\xi}^{\infty}(f^2)_y\ln(y+4\xi)\,dy\right\},$$
$$w_{2,0}(X)\sim b(\xi,t)(X+4\xi)^{-2i\sigma f_0^2}\exp\left\{-2i\sigma\int_{-4\xi}^{\infty}(f^2)_y\ln(y+4\xi)\,dy\right\},\tag{1.7.17}$$

где $f_0=f(-4\xi)$.

При $(X/2+2\xi)=0$ положим

$$x_0=4\xi t,$$
$$\psi_0=t\theta+2\xi x\,|_{x=x_0}\sim\frac{x_0^2}{4t}+2\xi x_0-2\sigma f_0^2\ln t+g(-4\xi)\tag{1.7.18}$$

(отметим, что g появилось впервые в этом месте). Вблизи $X/2+$ $+2\xi=0$, воспользовавшись разложением в ряд Тейлора, получим

$$\psi(x,t)\sim\psi_0+\frac{(x-x_0)^2}{4t}.$$

В этой области мы определим

$$Z=\frac{x-x_0}{\sqrt{2t}},\qquad w_i=w_i(Z;\ t),$$

так что (1.7.9) превращается в

$$(w_1)_Z\sim\sqrt{2}f_0w_2\exp\left\{i\psi_0+\frac{iZ^2}{2}\right\},$$
$$(w_2)_Z\sim\sqrt{2}\,\sigma f_0w_1\exp\left\{-i\psi_0-\frac{iZ^2}{2}\right\}.\tag{1.7.19}$$

Общее решение уравнений (1.7.19) можно выразить через функции параболического цилиндра. Оно должно переходить в (1.7.16) при $Z\to-\infty$ и в (1.7.17) при $Z\to+\infty$. Опуская детали

вычисления, мы приведем результат:

$$X = \frac{x}{t} = -4\xi,$$

$$f^2\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{\sigma}{4\pi} \ln |a(\xi)|^2 = f_0^2,$$

(1.7.20)
$$g\left(\frac{x}{t}\right) = -\arg\{-\sigma b(\xi, 0)\} + \frac{3\pi}{4} - \arg\{\Gamma(1 - 2i\sigma f_0^2)\} + \\ + 2\sigma f_0^2 \ln 2 - 2\sigma \int_{-\infty}^{-4\xi} \ln|y + 4\xi| (f^2)_y \, dy + \\ + 2\sigma \int_{-4\xi}^{\infty} \ln(y + 4\xi)(f^2)_y \, dy.$$

Эти формулы вместе с (1.7.4) дают асимптотическое разложение решения уравнения (1.7.2) в пределе $t \to \infty$. Их можно переписать, выразив через $(b/a)(\xi)$: при $x/t = -4\xi$

(1.7.21)
$$f^2\left(\frac{x}{t}\right) = -\frac{\sigma}{4\pi} \ln\left\{1 - \sigma\left|\frac{b}{a}(\xi)\right|^2\right\},$$
$$g\left(\frac{x}{t}\right) = -\arg\left\{-\sigma \frac{b}{a}(\xi)\right\} + \frac{3\pi}{4} - \\ - \arg\left\{\Gamma\left(1 - 2i\sigma f^2\left(\frac{x}{t}\right)\right)\right\} + 2\sigma f^2\left(\frac{x}{t}\right) \ln 2 + \\ + 4\sigma \int_{-4\xi}^{\infty} \ln(y + 4\xi)(f^2)_y \, dy.$$

Мы видели (в разд. 1.4), что солитоны несомненно являются нелинейными образованиями, их невозможно линеаризовать. С другой стороны, часто можно слышать утверждения, что несолитонная часть решения, которую мы только что рассматривали, качественно ведет себя так же, как решения линеаризованной задачи. Теперь мы можем проверить это утверждение, основываясь на асимптотических решениях линеаризованной задачи (П.1.39) и (1.7.4) с учетом (1.7.20). Во-первых, отметим тот факт, что в обоих случаях наиболее важные свойства решений следующие:

(i) огибающая убывает по закону $t^{-1/2}$;

(ii) информация распространяется с групповой скоростью, вычисленной по закону дисперсии линейного уравнения $\omega = k^2 = (-2\xi)^2$.

Во-вторых, в пределе малых амплитуд (в (1.7.20) $f \to 0$ равномерно по x) можно показать, что $b^*(\xi) \to \sigma\hat{q}(-2\xi)$ и что асимптотическое решение нелинейной задачи в точности сводится к решению линейной (см. упр. 1). Таким образом, для решений

уравнения (1.7.2) два предела $\left(t\to\infty \text{ и } \int |q(x,\ 0)|\,dx\to 0\right)$ коммутируют между собой. Нелинейность приводит лишь к тому, что фаза содержит члены порядка $\ln t$, а g глобально зависит от данных рассеяния.

Общее решение уравнения (1.7.2) при $\sigma=-1$ содержит и солитоны, и несолитонную часть. В случае нелинейного уравнения Шрёдингера солитоны движутся на фоне излучения, и их взаимодействие с фоном может оказаться важным. Используя законы сохранения, Сигур [454] нашел асимптотическое (при $t\to\infty$) решение уравнения (1.7.2) с $\sigma=-1$ в простейшем случае, когда данные рассеяния содержат лишь одно дискретное собственное значение и непрерывный спектр. Главный вклад имеет вид

$$\begin{aligned}q(x,\ t)\sim{}&2\eta\exp(i\varphi)/\operatorname{ch}\psi+\\ &+t^{-1/2}f\left(\frac{x}{t}\right)\left[\exp(it\theta)\frac{(\xi+x/4t+i\eta\operatorname{th}\psi)^2}{(\xi+x/4t)^2+\eta^2}+\right.\\ &\left.+\exp(2i\varphi-it\theta)\frac{\eta^2}{\operatorname{ch}^2\psi\cdot((\xi+x/4t)^2\eta^2)}\right]+o\left(t^{-1/2}\right),\end{aligned}\tag{1.7.22}$$

где $(\xi+i\eta)$ — дискретное собственное значение,

$$\varphi=-2\left[\xi x+2(\xi^2-\eta^2)t\right]+\hat{\varphi},$$

$$\psi=2\eta(x+4\xi t)+\hat{\psi},$$

$$\theta=\frac{x^2}{4t}+O\left(\frac{\ln t}{t}\right),$$

$$f^2\left(\frac{x}{t}\right)=\frac{1}{4\pi}\ln\left\{1+\left|\frac{b}{a}-\frac{x}{4t}\right|^2\right\}.$$

Первый член в (1.7.22) — это просто обычный солитон. Второй член представляет собой излучение (с поправками в окрестности солитона), а третий член можно рассматривать как результат взаимодействия между этими двумя компонентами. Этот результат был получен только при помощи законов сохранения, поэтому фазы (а точнее, функции $\hat{\varphi}$, $\hat{\psi}$) остались неопределенными. В частности, полный сдвиг фазы солитона (от $t=-\infty$ до $t=+\infty$) вследствие взаимодействия с излучением нельзя определить этим методом.

1.7. b. Модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза. Для мКдФ

$$v_t-6\sigma v^2v_x+v_{xxx}=0,\quad \sigma=\pm 1\tag{1.7.23}$$

дисперсионное соотношение линеаризованной задачи ($\omega=-k^3$) является нечетной функцией, так что групповая скорость $d\omega/dk=-3k^2$ имеет одинаковый знак для всех вещест-

венных k. Поэтому расплывающиеся осцилляции, покрывавшие всю ось x в случае асимптотического решения уравнения (1.7.2), теперь сосредоточены в области $x < 0$. Это вовсе не удивительно — аналогичный результат имеет место и для линеаризованного уравнения мКдФ (см. разд. П.1), но приводит к необходимости проведения отдельного анализа асимптотики при $x > 0$.

Для того чтобы исключить солитоны при $\sigma = -1$, мы снова потребуем выполнения условия (1.7.1) для начальных данных уравнения (1.7.23). Чтобы иметь возможность продолжить функцию $b(\xi, 0)$ с вещественной оси, мы потребуем в этой задаче достаточно быстрого убывания начальных данных при больших x.

Линейное интегральное уравнение для (1.7.23) можно записать в виде

(1.7.24) $$K(x, y; t) + \sigma F(x+y; t) = \sigma \int_x^\infty \int_x^\infty K(x, z; t) F(z+s; t) F(s+y; t)\, dz\, ds, \quad y > x,$$

где

$$F(x; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b}{a}(\xi) \exp\{i\xi x + 8i\xi^3 t\}\, d\xi$$

и

$$v(x, t) = -2K(x, x; t).$$

Функция $F(2x, t)$ удовлетворяет линеаризованному уравнению мКдФ, ее асимптотическое поведение (при $t \to \infty$) известно (см. разд. П.1).

В частности, при $x \gg (3t)^{1/3}$

(1.7.25) $$F(\chi; t) \sim \frac{r(ik/2)\, k^{-1/2}}{4(3\pi t)^{1/2}} \exp(-2tk^3),$$

где $r(\xi) = (b/a)(\xi)$ и $k^2 = \chi/6t$. В этой области

$$K(x, y; t) \sim -\sigma F(x+y; t),$$

а интегральный член в (1.7.24) экспоненциально мал. Таким образом, при $x \gg (3t)^{1/3}$

(1.7.26) $$v(x, t) \sim \frac{\sigma r(ik/2)\, k^{-1/2}}{2(3\pi t)^{1/2}} \exp(-2tk^3).$$

Это представление становится несправедливым при $x/t \to 0$. Для того чтобы найти представление в этой области, мы запишем

$$F(\chi; t) = \frac{1}{4\pi(3t)^{1/3}} \int_{-\infty}^{\infty} r\left(\frac{\varkappa}{2(3t)^{1/3}}\right) \exp\{i\varkappa\tilde{Z}/2 + i\varkappa^3/3\}\, d\varkappa,$$

где $\tilde{Z}=\chi/(3t)^{1/3}$. Разложив $r(\xi)$ в ряд Тейлора вблизи $\xi=0$ и переходя к пределу $t\to\infty$, $x/t\to 0$, причем $Z=x/(3t)^{1/3}\to\infty$, получим

(1.7.27) $$\sigma v(x, t)\sim(3t)^{-1/3}r(0)\,\mathrm{Ai}(Z)-(3t)^{-2/3}i\frac{r'(0)}{2}\mathrm{Ai}'(Z)+ +O\left(\frac{1}{3t}\right),$$

где $\mathrm{Ai}(Z)$ — функция Эйри. Это наводит на мысль, что в области $|x|\leqslant O((3t)^{1/3})$ нам следует искать приближенное решение уравнения (1.7.23) в виде

(1.7.28) $$v(x, t)\sim(3t)^{1/3}w(Z)+(3t)^{2/3}w_1(Z)+\ldots,$$

где $w(t)$ удовлетворяет второму уравнению Пенлеве (см. разд. 3.7)

(1.7.29) $$\frac{d^2w}{dZ^2}=Zw+2\sigma w^3$$

с граничным условием

(1.7.30) $$w(Z)\to\sigma r(0)\,\mathrm{Ai}(Z) \text{ при } Z\to+\infty.$$

Нелинейность уравнения (1.7.29) означает, что решение в промежуточной области $|x|\leqslant O((3t)^{1/3})$ остается нелинейным при $t\to\infty$, хотя его амплитуда стремится в этом пределе к нулю. Такая нелинейная область существует для любого решения уравнения мКдФ, если $r(0)\neq 0$.

В точке $\zeta=0$ можно найти явное решение задачи рассеяния (1.2.7а): при $\sigma=+1$

$$\varphi_1(x, 0)=\mathrm{ch}\left(\int_{-\infty}^{\infty}v\,dx\right),\quad \varphi_2=\mathrm{sh}\left(\int_{-\infty}^{\infty}v\,dx\right),$$

так что

$$r(0)=\mathrm{th}\left(\int_{-\infty}^{\infty}v\,dx\right).$$

Аналогично получим для $\sigma=-1$

$$r(0)=-\mathrm{tg}\left(\int_{-\infty}^{\infty}v\,dx\right).$$

Однако функция v должна быть абсолютно интегрируемой (см. разд. 1.3), поэтому

(1.7.31) $$|r(0)|<1 \text{ для } \sigma=+1,\quad |r(0)|<\infty \text{ для } \sigma=-1.$$

В обоих случаях ограничения (1.7.31) гарантируют ограниченность решений уравнения (1.7.29) с граничным условием (1.7.30)

при всех вещественных Z (см. разд. 3.7). Таким образом, в области $|x| \leqslant O((3t)^{1/3})$ решение уравнения (1.7.23) приближенно является автомодельным и удовлетворяет уравнению (1.7.29) с граничным условием (1.7.30). Типичное решение приведено на рис. 3.2, с. 281.

Так же как и решение линеаризованной задачи, решение уравнения (1.7.23) быстро осциллирует при $-x \gg (3t)^{1/3}$. В этой области после некоторой модификации можно применять любой из методов, которые мы использовали для вычисления асимптотики уравнения (1.7.2). При этом удобно воспользоваться автомодельным решением уравнения мКдФ с медленно меняющимися параметрами. Общее решение уравнения (1.7.29) не может быть выписано в явном виде, но при $Z \to -\infty$ (т. е. в области осцилляций) формальное асимптотическое решение имеет вид

$$w(Z) \sim (-Z)^{-1/4} d \sin\theta + O(|Z|^{-7/4}),$$

$$\theta \sim \frac{2}{3}(-Z)^{3/2} - \frac{3}{4}\sigma d^2 \ln(-Z) + \bar{\theta} + O(|Z|^{3/2}),$$

где d и θ являются константами интегрирования; для удобства положим $d \geqslant 0$. Затем, считая d и θ зависящими от $X = -x/3t$, мы получим при $-x \gg (3t)^{1/3}$ интересующий нас вид решения:

$$v(x, t) \sim (3t)^{-1/2} X^{-1/4} d \sin\theta + O((3t)^{-1}),$$

$$\theta \sim 2tX^{3/2} - \frac{\sigma}{2} d^2 \ln 3t - \frac{3}{4}\sigma d^2 \ln X + \bar{\theta}. \tag{1.7.32}$$

Эта формула, взятая в главном порядке, аналогична (1.7.4).

Законы сохранения определяют $d(X)$. Следует сделать единственное изменение в методе из предыдущего раздела: чтобы показать, что только область $-x \gg (3t)^{1/3}$ вносит вклад в интегралы движения, нужно использовать (1.7.26) и (1.7.28). Окончательный результат состоит в том, что на линии

$$X = -\frac{x}{3t} = \xi^2 \tag{1.7.33a}$$

$$d^2(X) = \frac{\sigma}{\pi} \ln\left|a\left(\frac{\xi}{2}\right)\right|^2 = -\frac{\sigma}{\pi} \ln\left\{1 - \sigma\left|\frac{b}{a}\left(\frac{\xi}{2}\right)\right|^2\right\}. \tag{1.7.33b}$$

Отметим, что (1.7.33a) снова определяет групповую скорость, соответствующую дисперсионному соотношению линеаризованной задачи, как скорость, с которой информация передается при $t \to \infty$. Отметим также, что (1.7.33b) практически совпадает с (1.7.8b).

Для того чтобы одновременно найти и $d(X)$, и $\theta(X)$, подставим (1.7.32) в задачу рассеяния (1.2.7a). Аналогом (1.7.11) является

$$(w_1)_x \sim (3t)^{-1/2} X^{-1/4} d(X) \sin\theta \cdot e^{2i\xi x} w_2,$$

$$(w_2)_x \sim (3t)^{-1/2} X^{-1/4} dX \sin\theta \cdot e^{-2i\xi x} w_1 \tag{1.7.34}$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ при } x \to -\infty,$$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a(\xi) \\ b(\xi,\ t) \end{pmatrix} \text{ при } x \to +\infty.$$

Здесь мы воспользовались (1.7.26) и (1.7.28), чтобы показать, что w_1, w_2 являются константами (в главном порядке) при $x > 0$.

Важное различие между (1.7.34) и (1.7.11) состоит в том, что при $t \to \infty$ и $X = O(1)$ (1.7.34) зависит от двух быстрых переменных $(\theta + 2\xi x)$ и $(\theta - 2\xi x)$ и одной медленной (X). Вычисления, аналогичные тем, которые привели к формулам (1.7.20), следует производить, учитывая это различие. Здесь мы опустим детали вычислений; их можно найти в работе [457]. Окончательный результат имеет вид (1.7.33), и (при $\xi \geqslant 0$)

$$\begin{aligned} \bar\theta(X) = &-\arg\left\{-\sigma b\left(\frac{\xi}{2}\right)\right\} - \frac{3\pi}{4} - \arg\left\{\Gamma\left(1 - \frac{i\sigma d_0^2}{2}\right)\right\} - \\ &- \frac{3}{2}\sigma d_0^2 \ln 2 - \frac{\sigma}{2}\int_0^{\xi} \ln\left(\frac{\xi - y}{\xi + y}\right)(d^2)_y\,dy + \\ &+ \frac{\sigma}{2}\int_{\xi}^{\infty} \ln\left(\frac{y-\xi}{y+\xi}\right)(d^2)_y\,dy. \end{aligned} \tag{1.7.35}$$

В пределе $X = -x/3t \to 0$, а $Z = x/(3t)^{1/3} \to -\infty$, приближенное решение (1.7.32, 33, 35) уравнения мКдФ гладко переходит в решение (1.7.28, 30). Эта сшивка отчасти подтверждает правильность проделанных здесь вычислений и будет играть важную самостоятельную роль в разд. 3.7.

Обсудим результаты, полученные для (1.7.23). В отсутствие солитонов асимптотическое решение уравнения мКдФ, развившееся из подходящих начальных условий, дается формулами (1.7.26) при $x \gg (3t)^{1/3}$, (1.7.28, 29, 30) при $|x| \leqslant O((3t)^{1/3})$ и (1.7.23, 33, 35) при $(-x) \gg (3t)^{1/3}$. Если $r(0) \neq 0$, то решение носит нелинейный характер в промежуточной области, какой бы малой ни была его амплитуда. Тем не менее в этом случае можно показать, что асимптотическое решение переходит в решение линейной задачи, если амплитуду начального условия (в смысле нормы L_1) взять равной нулю. Таким образом, два предела ($t \to \infty$ начальная амплитуда $\to 0$) коммутируют для уравнения мКдФ, так же как в случае (1.7.2). Отметим, что, утверждая коммутативность пределов, мы не ограничили общности, исклю-

чив солитоны; они автоматически отсутствуют в пределе малых амплитуд в соответствии с (1.7.1).

1.7. с. Уравнение Кортевега — де Фриза. Каждое решение уравнения мКдФ при $\sigma = +1$ порождает решение уравнения КдФ

(1.7.36) $$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

с помощью преобразования Миуры [379]

(1.7.37) $$u = -v^2 - v_x.$$

Таким образом, наши результаты об асимптотическом поведении решений уравнения мКдФ также определяют асимптотическое поведение бесконечного набора решений уравнения КдФ. Однако эти решения уравнения КдФ оказываются практически бесполезными. Дело в том, что почти для любого заданного начального условия, для которого уравнение КдФ может быть решено при помощи МОЗР, возникающее в результате эволюции решение *не может быть* получено по формуле (1.7.37) из быстро убывающего (по x) решения уравнения мКдФ.

Мы можем изучить это преобразование более детально. Пусть $v(x, 0)$ является гладким, быстро убывающим (по x) начальным условием уравнения (1.7.23) при $\sigma = +1$. Пусть $r(k)$ обозначает коэффициент отражения, соответствующий $v(x, 0)$. Из (1.7.31) следует, что $|r(0)| < 1$. Пусть теперь $\rho(k) = r(k)$, где $\rho(k)$ является коэффициентом отражения, соответствующим некоторому решению уравнения КдФ. Тогда $r(k)$ порождает некоторое решение уравнения мКдФ по формуле (1.7.24); при этом $\rho(k)$ порождает решение уравнения КдФ согласно (1.3.37). Сравнив эти два интегральных уравнения, нетрудно показать, что эти два решения связаны соотношением (1.7.37).

С другой стороны, Абловиц, Краскал и Сигур [16] показали, что почти для любого гладкого начального условия уравнения КдФ, удовлетворяющего неравенству $\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|^2)|u|\,dx < \infty$,

(1.7.38) $$\rho(0) = -1.$$

Таким образом, почти для всех начальных данных уравнения КдФ мы *не можем* приравнивать $\rho(k)$ к $r(k)$ и эффективно пользоваться преобразованием (1.7.37). Поэтому требуется отдельный анализ асимптотического поведения решений уравнения КдФ. Этот анализ вполне аналогичен проделанному нами для уравнения мКдФ, но из-за (1.7.38) возникает некоторое различие. Как обычно, мы предполагаем начальные условия быстро убывающими при $|x| \to \infty$ и гладкими, а также предполагаем

отсутствие солитонов. Здесь мы только сформулируем основные результаты; детальное рассмотрение можно найти в работе [26].

При $x \gg (3t)^{1/3}$ интегральный член в (1.3.37) является экспоненциально малым по сравнению с двумя оставшимися, и поэтому

$$u(x, t) \sim \frac{\rho(ik/2)\, k^{1/2}}{2(3\pi t)^{1/2}} \exp\{-2tk^3\}, \tag{1.7.39}$$

где $k^2 = x/3t$. Другим представлением решения в этой области, которое остается справедливым при $x/3t \to 0$, служит

$$u(x, t) \sim -(3t)^{-2/3}\Big[\rho(0)\operatorname{Ai}'(Z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n \rho^{(n)}(0)}{2^n n!\,(3t)^{n/3}} \left(\frac{d}{dZ}\right)^n \operatorname{Ai}(Z)\Big], \tag{1.7.40}$$

где $Z = (x + x_0)/(3t)^{1/3}$, а константа $x_0 = -i\rho'(0)/2\rho(0)$ выбирается из соображений удобства.

В области $|x| \leqslant O((3t)^{1/3})$ мы ищем решение уравнения КдФ в виде

$$u(x, t) \sim (3t)^{-2/3}[f(Z) + (3t)^{-1/3} f_1(Z) + (3t)^{-2/3} f_2(Z) + \ldots]. \tag{1.7.41}$$

(Один из немногих строгих результатов этого раздела был получен Шабатом (1973) [459], доказавшим справедливость асимптотического представления (1.7.41) в главном порядке.) Функции $f, f_1, \ldots$ подчиняются обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} & f''' + 6ff' - (2f + Zf') = 0, \\ & f_1''' + 6(ff_1)' - (3f_1 + Zf_1') = 0, \\ & f_2''' + 6(ff_2)' - (4f_2 + Zf_2') = -3(f_1^2)' \\ & \ldots \end{aligned} \tag{1.7.42}$$

с граничными условиями, полученными из (1.7.40) при $Z \to +\infty$. Например,

$$f(Z) \sim -\rho(0)\operatorname{Ai}'(Z) \quad \text{при } Z \to +\infty. \tag{1.7.43}$$

Теперь очевидна важность условия (1.7.38). Поведение решения (1.7.42a, 43) зависит от $\rho(0)$.

(i) Если $|\rho(0)| < 1$, то решение ограничено при всех конечных Z и осциллирует при $Z \to -\infty$. Такие решения уравнений (1.7.42) связаны с ограниченными решениями уравнения (1.7.29) формулой (1.7.37).

(ii) Решения, отвечающие $|\rho(0)| > 1$ или $\rho(0) = +1$, не представляют интереса.

(iii) Если $\rho(0) = -1$, то при $Z \to -\infty$ $f(Z)$ асимптотически приближается к

$$f(Z) = \frac{Z}{2} - \frac{1}{2}(-2Z)^{-1/2} + \frac{1}{2}(-2Z)^{-2} + O((-2Z)^{-7/2}). \tag{1.7.44}$$

Таким образом, если $\rho(0) = -1$, то первый член в (1.7.42) линейно растет. При этом $f_2(Z)$ растет экспоненциально, а $f_4(Z)$ даже быстрее, т. е. разложение (1.7.41) становится беспорядочным. Можно показать, что ($Z \to -\infty$, $\rho(0) = -1$)

$$u(x, t) \sim \frac{-2Z}{(3t)^{2/3}}\Big[-\frac{1}{4} + \left\{(3t)^{-2/3}C(-2Z)^{-5/4}\exp\left(\frac{(-2Z)^{3/2}}{3}\right)\right\} - \left\{(3t)^{-2/3}C(-2Z)^{-5/4}\exp\left(\frac{(-2Z)^{3/2}}{3}\right)\right\} + \ldots\Big], \tag{1.7.45}$$

где

$$C = 0{,}118\,\{\rho''(0) + [\rho'(0)]^2\}.$$

Коэффициент 0,118 был определен численным интегрированием [26, 377]. Ясно, что (1.7.45) нарушается при $Z \to -\infty$. Это нарушение означает существование новой области, которая может быть названа «бесстолкновительной ударной волной», или переходным слоем. Существование этой новой переходной области является прямым следствием (1.7.38); в типичных асимптотических решениях уравнения мКдФ такая область отсутствует.

Для приложений бывает важно знать расположение и скорости распада минимума основной волны (см. рис. 4.4). Местоположение минимума можно найти, продифференцировав выражение (1.7.45). При очень больших временах

$$(-2Z) \sim (2\ln 3t)^{2/3}, \tag{1.7.46a}$$

и в окрестности этой (движущейся) точки

$$u \sim -\frac{1}{2}\left(\frac{2\ln 3t}{3t}\right)^{2/3}. \tag{1.7.46b}$$

Эта асимптотическая скорость распада совершенно не зависит от начальных условий. Однако время, необходимое для выхода на асимптотику (1.7.46), является настолько большим, что во многих прикладных задачах эта заключительная стадия развития начального условия может не реализоваться.

Для определения структуры бесстолкновительной ударной волны необходим отдельный анализ. Подробности можно найти

в работах [26] и [377]. Характерный масштаб волны неявно связан с нарушением (1.7.45). Удобно определить новую пространственную переменную ξ

(1.7.47a) $$(3t)^{-2/3}(-2Z)^{-5/4}\exp\left(\frac{(-2Z)^{3/2}}{3}\right)=e^{2\xi/3}$$

и зависимую переменную $g(\xi, t)$

(1.7.47b) $$u(x, t)=\frac{-2Z}{(3t)^{2/3}}\,g(\xi, t).$$

Можно показать, что в главном порядке фронт бесстолкновительной ударной волны имеет вид

(1.7.48) $$g(\xi, t)\sim -\frac{1}{4}+\frac{1}{2\,\mathrm{ch}^2\left\{\frac{1}{3}(\xi-\xi_0)\right\}}.$$

Это выражение сшивается с (1.7.45), если $\xi_0=-3/2\ln(C/2)$. Такое представление становится несправедливым при больших ξ ($\ln^2 t\gg\xi\gg\ln t$) или $t^{1/3}(\ln t)^{4/3}\gg(-x)\gg t^{1/3}(\ln t)^{2/3}$, и его следует заменить на другое медленно изменяющееся решение

(1.7.49) $$g\sim a(Y)+b(Y)\,cn^2(\Phi+\Phi_0;\ \nu(Y)),$$

где Φ является (подходящим образом определенной) быстрой переменной, а Y — медленной переменной. Оно сшивается с (1.7.48) при $Y\to 0$. При $Y\to\infty$ решение уравнения КдФ (на самом хвосте ударной волны) задается формулой

(1.7.50) $$u(x, t)\sim(3t)^{-2/3}(-Z)^{1/4}\left(\frac{2\ln 3t}{3\pi}\right)^{1/2}\cos\theta,\qquad \theta\sim\frac{2}{3}(-Z)^{3/2}.$$

Это решение должно сшиваться с решением в осцилляторной области.

Наконец, мы рассмотрим чисто осцилляторную область. В ней нет большого различия между поведением решений уравнений КдФ и мКдФ, и мы лишь приведем окончательный результат. Асимптотика решения уравнения (1.7.36) в этой области имеет вид

(1.7.51) $$u(x, t)\sim(3t)^{-1/2}X^{1/4}(2d)\cos\theta-(3t)^{-1}X^{-1/2}(2d)^2(1-\cos 2\theta),$$

где

$$\theta\sim 2tX^{3/2}-2d^2\ln 3t-3d^2\ln X+\bar\theta,$$
$$X=-\frac{x}{3t},\quad d=d(X),\quad \bar\theta=\bar\theta(X).$$

Отметим, что любое решение этого вида имеет неосциллирующий член, который отрицателен и имеет порядок $(3t)^{-1}X^{-1/2}$. Та-

ким образом, для уравнения КдФ солитонам присуща «положительность», а излучение несет «отрицательную часть». Функции $d(X)$, $\bar{\theta}(X)$ выражаются через коэффициент отражения $\rho(k)$ следующим образом:

$$X = -\frac{x}{3t} = 4k^2,$$

$$dX^2 = -\frac{1}{4\pi}\ln\{1 - |\rho(k)|^2\},$$

(1.7.52)
$$\bar{\theta}(X) = \frac{\pi}{4} - \arg\{\rho(k)\} - \arg\{\Gamma(1 - 2id^2)\} - $$
$$- 6d^2\ln 2 - 4\int_0^{2k} \ln\left(\frac{2k-y}{2k+y}\right)(d^2)_y\, dy.$$

Если $|\rho(0)| < 1$, это решение сшивается при $X \to 0$ с решением (1.7.41), в целом решение качественно похоже на решение уравнения мКдФ и может быть получено по формуле (1.7.37). Если $\rho(0) = -1$, это решение сшивается при $X \to 0$ с решением (1.7.50). Типичное решение уравнения КдФ приведено на рис. 4.3, с. 326.

Это завершает анализ решений уравнения КдФ в случае отсутствия солитонов. Общее решение может содержать N солитонов, но при $t \to \infty$ каждый из них будет находиться в области, где оставшаяся часть решения экспоненциально мала. Таким образом, при $t \to \infty$ взаимодействие солитонов и несолитонной части (в главном порядке) отсутствует, и можно просто добавить N солитонов (все с центрами при $x > 0$) к решению, чтобы получить асимптотику общего решения. Затем следует уточнить сдвиги фаз, обсуждавшиеся в разд. 1.4. Абловиц и Кодама (1980) [14] построили асимптотическое решение, содержащее и солитоны, и непрерывный спектр. Они воспользовались N-солитонным решением, в котором уже прекратились столкновения.

Наконец, сравним асимптотическое решение уравнения КдФ (1.7.36) и соответствующей линейной задачи (П.1.49). В отличие от уравнения (1.7.2) и (1.7.23), точнее в отличие от результатов, относящихся к решению уравнений вида (1.5.16), для которых $a(k)$ не имеет нулей при вещественных k, в случае уравнения КдФ два предела ($t \to \infty$ и начальная амплитуда $\to 0$) не коммутируют между собой. В случае уравнения КдФ солитоны можно сделать произвольно малыми (в любой L_p-норме $1 \leqslant p \leqslant \infty$), но пределы не коммутируют даже в отсутствие солитонов. В линейной задаче основная волна в асимптотическом решении спадает со временем по закону $t^{-1/3}$, если $\int u\, dx \neq 0$; в противном случае $\left(\int u\, dx = 0\right)$ скорость спадания амплиту-

ды этой волны равна $t^{-2/3}$, если $\int xu\,dx \neq 0$ и т. д. Но почти для всех решений уравнения КдФ независимо от их малости $\rho(0) = -1$, и скорость асимптотического спадания главного импульса имеет порядок $(\ln t/t)^{2/3}$, согласно (1.7.46). Таким образом, асимптотическое поведение двух решений в этой области различно. Кроме того, за исключением особого случая $\int u\,dx = 0$, наименьшая скорость спадания равна $t^{-1/3}$ для решения линейной задачи и $t^{-1/2}$ для соответствующих решений уравнения КдФ.

Упражнения

Раздел 1.1

1. (a) Показать, что (1.1.2) получается из (1.1.1) при ($h \to \to 0$).
   (b) Какие члены пропорциональны h^4; εh^2?
   (c) Что произойдет при $\varepsilon/h^2 \ll 1$; $\varepsilon/h^2 \gg 1$?
2. Задано $K(u)$ в (1.1.5) и $M(v)$ в (1.1.7). Показать, что если $u = -(v^2 + v_x)$, то

$$K(u) = -\left(2v + \frac{\partial}{\partial x}\right) M(v).$$

3. Задано (1.1.11—13). Проверить, что условие $\psi_{txx} = \psi_{xxt}$ приводит к (1.1.14) и поэтому $K(u) = 0$ в том и только в том случае, когда $\lambda_t = 0$.

Раздел 1.2

1. Вывести (1.2.13) из (1.2.8).
2. (a) Найти точное решение (1.2.8) для разложения A, B, C пятого порядка, т. е. $A = \sum_0^5 a_n \zeta^n$, и т. д. Какое нелинейное уравнение возникнет при $r = q$, когда произвольные константы выбраны так, чтобы линеаризованное уравнение имело вид $[\partial_t + (\partial_x)^5]\, v = 0$?

   (b) Найти решение (1.2.21), выраженное через разложения (A, B) второго порядка, т. е. $A = \sum_0^2 \alpha_n \lambda^n$. Какое получится нелинейное эволюционное уравнение, линеаризация которого имеет вид $[\partial_t + (\partial_x)^5]\, u = 0$?

   (c) Показать, что эти уравнения связаны преобразованием Миуры

$$u = -v^2 - v_x.$$

Раздел 1.3

1. Используя (1.3.3, 4), показать, что $\bar\psi = \bar a\varphi + b\bar\varphi$, $\psi = \bar b\varphi - a\bar\varphi$.

2. Пусть функции r, q в (1.2.7a) удовлетворяют неравенствам $|r(x)|$, $|q(x)| < Ce^{-2K|x|}$ для некоторых C, $K > 0$. Доказать, что в этом случае функция $a(\zeta)$ аналитична для $\operatorname{Im}\zeta > -K$, $b(\zeta)$, $\bar{b}(\zeta)$ аналитичны при $|\operatorname{Im}\zeta| < K$, и $\bar{a}(\zeta)$ аналитична при $\operatorname{Im}\zeta < K$.

3. (a) Почему условие $r = +q^* \in L_1$ гарантирует отсутствие дискретных собственных значений задачи (1.2.7a) при $\operatorname{Im}\zeta > 0$?

(b) Используя (1.3.4, 14), показать, что при $r = +q^*$ $|a|^2 \geqslant 1$ при $\operatorname{Im}(\zeta) = 0$. Доказать, что $a(\zeta) \neq 0$ при $\operatorname{Im}(\zeta) \geqslant 0$, если $r = +q^*$.

4. При $r = -q^* \in L_1$ в (1.2.7a) было показано, что условие (1.3.16e) является достаточным, чтобы гарантировать неравенство $a(\zeta) \neq 0$ при $\operatorname{Im}(\zeta) \geqslant 0$. Допустим, что $r = -q$ — вещественная функция. Решите уравнение (1.2.7a) при $\zeta = 0$ в явном виде. Покажите, что $a(0) = \cos\left(\int_{-\infty}^{\infty} q\,dx\right)$. Поэтому условие $Q_0(\infty) < \pi/2$ является необходимым для отсутствия дискретных собственных значений. (Сатсума и Ядзима [451] показали, что для семейства вещественных потенциалов при $r = -q$ одно дискретное собственное значение появляется при $Q_0(\infty) = \pi/2$, второе при $Q_0(\infty) = 3\pi/2$ и т. д.)

5. Пусть $r = -q^*$ в (1.2.7a), причем $q(x) = Q$ (где $Q = \text{const}$) при $0 < x < L$ и $q(x) = 0$ на остальной части оси. Вычислить данные рассеяния $\{a(\xi), b(\xi)\}$. Обсудить число и расположение дискретных собственных значений как функций Q и L. Как собственное значение отражается на $\arg Q$? Показать, что $\operatorname{Im}(\zeta) > Q$ для любого дискретного собственного значения.

6. Доказать, что $a(k)$, определенное в (1.3.35), имеет аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость.

7. Пусть $q(x) \leqslant 0$ в (1.2.20a). Доказать отсутствие дискретных собственных значений (с $\lambda < 0$). (*Указание*: использовать осцилляционную теорему.)

8. (a) Пусть в (1.2.20a) $q(x) = Q$ (вещественное) при $0 < x < L$ и $q(x) = 0$ в остальных точках. Вычислить данные рассеяния. Обсудить число и расположение дискретных собственных значений как функций от Q, L. Показать, что для любого собственного значения $|\lambda| < |Q|$.

(b) Сделать то же самое для $q(x) = Q/\operatorname{ch}^2(mx)$ в (1.2.20a) (Q, m вещественные). (*Указание*: положить $t = \operatorname{th} mx$ и воспользоваться присоединенными функциями Лежандра.)

(c) В случаях (a) и (b) вычислить $\rho(k = 0)$ в явном виде и показать, что $\rho(0) = -1$ почти для всех потенциалов из этих семейств. Чем выделены потенциалы с $\rho(0) \neq -1$?

(Другие ограничения на число и расположение дискретных собственных значений можно найти в работах [453] для (1.2.20a) и [12], [451], [253] для (1.2.7a).)

Раздел 1.4

1. (a) Найти односолитонное, двухсолитонное и бризерное решение для уравнения мКдФ (1.2.2) с помощью линейного интегрального уравнения (1.3.29) при подходящих данных рассеяния.

(b) В действительности имеется две формы для уравнения мКдФ, имеющих солитоны:

$$q_t + 6q^2 q_x + q_{xxx} = 0 \quad (q \text{ вещественно}),$$
$$q_t + 6|q^2| q_x + q_{xxx} = 0.$$

Как такие частные решения соотносятся друг с другом для этих двух задач?

2. (a) Возьмите одну из систем уравнений (для r, q), интегрируемых с помощью (1.2.7), и пусть r и q в начальный момент не связаны между собой. Показать, что односолитонное решение имеет сингулярности в бесконечном количестве вещественных точек (x, t), за исключением случая $q = \alpha r^*$, $\alpha = \text{const}$. Показать, что сингулярность может развиться из бесконечно гладкого начального условия.

(b) Показать, что $\int rq\,dx$ является сохраняющейся величиной для эволюционного уравнения. Пусть $r = q^*\alpha$, α вещественно. Показать, что решение остается в L_2, если начальное условие принадлежало этому пространству. Показать, что принадлежащие L_2 функции не могут иметь сингулярностей описанного в (a) вида.

3. Пусть для (1.2.20a) $q(x) = N(N+1)m^2/\text{ch}^2(mx)$ (как в упр. 8 разд. 1.3).

(a) Для $N = 2$ найти явный вид собственных функций ψ_1, ψ_2 дискретного спектра. Найти далее c_i, d_i $(i = 1, 2)$ и вычислить сдвиг фаз двух солитонов уравнения КдФ. Проверить (1.4.44) в этом частном случае.

(b) Сделать то же самое при $N = 3$.

(c) Как изменятся сдвиги фаз, если эволюционным уравнением является не уравнение КдФ, а уравнение КдФ пятого порядка? Что будет происходить в случае КдФ первого порядка (т. е. $q_t + cq_x = 0$)?

Раздел 1.5

1. В случае $A_-(\zeta) = (1/2i)(2\zeta)^3$ показать, что (1.5.16) сводится к системе двух уравнений мКдФ.

2. В случае $A_-(\zeta) = (-1/2i)(2\zeta)^5$ показать, что (1.5.16) приводит к системе из двух уравнений пятого порядка. Если $\gamma(k^2) = -(2k^4)$, показать, что (1.5.21) сводится к другому уравнению пятого порядка. Если $r = q$ и вещественно, показать, что решения этих двух уравнений связаны преобразованием Миуры

$$u = -v^2 - v_x.$$

3. Является ли (1.5.16) следствием (1.5.5) или просто согласуется с ним?

4. Какое общее эволюционное уравнение, аналогичное (1.5.16), получится для задачи рассеяния (1.2.25)?

Раздел 1.6

1. Показать, что отображение $(q, r) \to S$, определенное в (1.6.42), является каноническим преобразованием для любой гамильтоновой системы вида (1.5.16). (В основном этот анализ следует работе Захарова и Манакова [534].)

(a) Так же как это было сделано для $a(\xi)$ в (1.6.39), вычислить градиенты (по r, q) функций $\bar{a}$, b, $\bar{b}$.

(b) Пусть $u^{(1)} = (u_1^{(1)}, u_2^{(1)})$ и $w^{(1)}$ суть два решения (1.2.7a) для $\xi = \xi_1$ и пусть $u^{(2)}$, $w^{(2)}$ — два других решения при $\xi = \xi_2$. Доказать тождество

$$2i(\xi_2 - \xi_1)\left[u_1^{(1)}u_2^{(2)}w_1^{(1)}w_2^{(2)} - u_2^{(1)}u_1^{(2)}w_2^{(1)}w_1^{(2)}\right] = \\ = \partial_x\left[\left(u_1^{(1)}u_2^{(2)} - u_2^{(1)}u_1^{(2)}\right)\left(w_1^{(1)}w_2^{(2)} - w_2^{(1)}w_1^{(2)}\right)\right].$$

(c) Это тождество позволяет вычислить в явном виде интегралы из скобок Пуассона, содержащие a, $\bar{a}$, b, $\bar{b}$. Показать, что

$$\langle a(\xi_1),\ b(\xi_2)\rangle = -\frac{1}{2i(\xi_1 - \xi_2)}\Big[a(\xi_1)\,b(\xi_2) - b(\xi_1)\,a(\xi_2)\lim_{x\to+\infty}\exp\{2i(\xi_1 - \\ - \xi_2)\,x\}\Big].$$

Найти скобки Пуассона всех остальных комбинаций a, $\bar{a}$, b, $\bar{b}$.

(d) Тождество

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{ikx}}{k} = \pi i\delta(k),$$

в котором левую часть следует интерпретировать в смысле главного значения, можно доказать, переходя к пределу $\lim\limits_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-x}^{x} dy\varphi(y)\cos ky$, где $\varphi(y)$ — пробная функция. Ис-

пользуя это тождество, доказать, что

$$\langle \ln a(\xi_1),\ \ln b(\xi_2)\rangle = -\frac{1}{2i(\xi_1-\xi_2)} + \frac{\pi}{2}\delta(\xi_1-\xi_2),$$

$$\langle \ln \bar{a}(\xi_1),\ \ln b(\xi_2)\rangle = \frac{1}{2i(\xi_1-\xi_2)} + \frac{\pi}{2}\delta(\xi_1-\xi_2),$$

$$\langle a(\xi_1),\ \bar{a}(\xi_2)\rangle = 0.$$

Используя (1.6.43а), показать, что

$$\langle P(\xi_1),\ P(\xi_2)\rangle = 0 = \langle Q(\xi_1),\ Q(\xi_2)\rangle,$$

$$\langle P(\xi_1),\ Q(\xi_2)\rangle = \delta(\xi_1-\xi_2).$$

(e) Показать, что $\langle \ln b, \ln \bar{b}\rangle \neq 0$. (Это просто сделать, воспользовавшись соотношением для вронскиана.)

(f) Продолжая b, $\bar{b}$ с вещественной оси, показать равенство нулю некоторых из оставшихся скобок Пуассона.

(g) $\delta\zeta_m/\delta q(x)$ непосредственно получается из того факта, что $a = a(\zeta, q, r)$; таким образом,

$$\delta a \equiv \frac{\partial a}{\partial \zeta}\delta\zeta + \frac{\partial a}{\partial q}\delta q + \frac{\partial a}{\partial r}\delta r.$$

По определению $\delta\zeta_n/\delta q$ можно вычислить, потребовав $\delta a = \delta r = 0$ и продолжив (1.6.39) с вещественной оси;

$$\left.\frac{\partial a}{\partial \zeta}\right|_{\zeta_m} \frac{\delta\zeta_m}{\delta q(x)} = -\varphi_2(x,\ \zeta_m)\,\psi_2(x,\ \zeta_m).$$

Вычислить $\delta\zeta_m/\delta r$, $\delta\bar{\zeta}_l/\delta q$, $\delta\zeta_l/\delta r$. Воспользоваться (1.6.43) и показать, что

$$\langle P_m,\ Q_n\rangle = \delta_{m,n},\qquad \langle \bar{P}_k,\ \bar{Q}_l\rangle = \delta_{k,l}$$

и что все остальные скобки Пуассона в (1.6.43) равны нулю.

2. Вывод (1.6.46) требует знания $\delta H/\delta\zeta_m$, $\delta H/\delta\zeta_l$.

(a) Из (1.6.19) показать, что при $\operatorname{Im}\zeta > 0$

$$\frac{\partial(\ln a)}{\partial\zeta_m} = -\frac{1}{\zeta-\zeta_m} + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{\xi-\zeta}\,\frac{1}{\xi-\zeta_m} = -\frac{1}{\zeta-\zeta_m},$$

$$\frac{\partial(\ln a)}{\partial\bar{\zeta}_l} = \frac{1}{\zeta-\bar{\zeta}_l}.$$

(b) Разложить эти выражения при $|\zeta|\to\infty$, $\operatorname{Im}\zeta>0$, и, воспользовавшись (1.6.6), показать, что

$$\frac{\delta C_n}{\delta\zeta_m} = -2i(2i\zeta_m)^n,\qquad \frac{\delta C_n}{\delta\bar{\zeta}_l} = 2i(2i\zeta_l)^n.$$

(c) Воспользовавшись (1.6.38), показать, что

$$\frac{\delta H}{\delta\zeta_m} = 4iA_-(\zeta_m),\qquad \frac{\delta H}{\delta\bar{\zeta}_l} = -4iA_-(\bar{\zeta}_l).$$

3. (a) Каким условиям должны удовлетворять функции q, r для того, чтобы функции a, b, $\bar{a}$, $\bar{b}$ продолжались с вещественной оси?

(b) Каким условиям они должны удовлетворять, чтобы интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^n \ln \alpha\bar{\alpha}(\xi)\, d\xi$$

существовал для всех $n \geqslant 0$ и, таким образом, существовали интегралы (1.6.21)?

(c) Пусть $A_-(\zeta)$ является полиномом. Каким условиям должны удовлетворять q, r, чтобы существовал интеграл (1.6.44)?

(d) При каких условиях мы можем использовать полиномиальные плотности законов сохранения (только) как переменные действия? Какие углы им соответствуют?

4. Уравнение sin-Гордон (1.2.3) обладает дисперсионным соотношением линеаризованной задачи $\omega(k) = k^{-1}$, не удовлетворяющим (1.6.37). Несмотря на это, результаты этого раздела применимы, если $a\bar{a}(0) = 1$.

(a) Показать, что (1.2.3) — гамильтонова система вида (1.6.31) с

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \cos\left(\int_{-\infty}^{x} v(y)\, dy \right) - 1 \right\} dx.$$

(b) Показать, что преобразование (1.6.43) является каноническим.

(c) Записать гамильтониан в терминах этих переменных [370].

5. Когда дисперсионное соотношение (1.5.16) является нечетной функцией ζ, уравнения допускают вещественные решения с $r = \pm q$. Наложите эти ограничения на (1.5.16), чтобы q и r не изменялись независимо, и развейте аналогичную теорию для таких редуцированных уравнений.

(a) Покажите, что (1.5.16) теперь принимает вид (1.6.31).

(b) Покажите, что преобразование к подмножеству данных рассеяния является каноническим.

(c) Покажите, что имеются переменные типа действие — угол.

6. Имеются две интересные задачи, не совсем отвечающие определению вполне интегрируемых гамильтоновых систем, принятому в этой книге.

(a) Задача о самоиндуцированной прозрачности (СИП), обсуждающаяся в разд. П.2 и 4.4. Как там отмечается, функция $a(\zeta)$ *не является* не зависящей от времени, хотя расположение

ее нулей от времени не зависит. Имеется только один полиномиальный закон сохранения. Тем не менее задача решается с помощью МОЗР. Это наводит на мысль, что либо МОЗР не ограничен вполне интегрируемыми гамильтоновыми системами, либо следует расширить определение интегрируемости.

(b) Уравнения Бенни [56] для длинных волн, имеющие вид

$$u_t + uu_x - u_x\left(\int_0^g u_x\,dy\right) + h_x = 0,$$

$$h_t + \left(\int_0^h u\,dy\right)_x = 0.$$

Здесь $u = u(x, y, t)$, $h = h(x, t)$, причем $-\infty < x < \infty$, $0 < y < h$, $t \geqslant 0$. Эти уравнения имеют бесконечное число законов сохранения, содержащих полиномы от $\int_0^h u^n\,dy$. Более того, в некотором смысле это уравнение является гамильтоновым, причем законы сохранения находятся в инволюции. Тем не менее Купершмидт и Манин показали, что:

(i) кроме найденных Бенни, нет локальных (по x, t) законов сохранения, содержащих только моменты функции u;

(ii) этих полиномиальных сохраняющихся величин недостаточно для полной интегрируемости;

(iii) по-видимому, нет солитонов.

За подробностями читатель может обратиться к работам [56], [380], [305], [351], [530].

Раздел 1.7

1. Линеаризация

(a) Показать, что в пределе малых $q(x)$, $r(x)$

$$b(\xi) \to \hat{r}(2\xi), \quad \bar{b}(\xi) \to -\hat{q}(-2\xi),$$

где $\hat{r}(\xi)$ — преобразование Фурье функции $r(x)$, а b, $\bar{b}$ определены в (1.3.3). Воспользоваться L_1-нормой, которая является естественной мерой малости в этой задаче.

(b) Показать, что асимптотическое решение нелинейного уравнения Шрёдингера переходит в этом пределе в решение линейного уравнения Шрёдингера, т. е. что [(1.7.4) с (1.7.20)] $\to$ (П.1.39). Что должно быть малым, чтобы этот предельный переход был справедлив? Какой следующий член в разложении? Переходит ли общее решение (1.7.2) в общее решение (П.1.23) в пределе малых амплитуд?

(c) Рассмотрите нелинейный член в (1.7.2) как малое возмущение и решите (1.7.2), рассмотрев малое возмущение линей-

ного решения. Покажите, что при этом возникнут секулярные члены. Как вы согласуете этот результат с результатом п. (b)?

2. Каким будет асимптотическое решение (1.7.2), если допустить, что один из нулей $a(\xi)$ лежит на вещественной оси? (В работе [26] мы предположили, что скорость убывания решения в этом случае должна быть $(\ln t/t)^{1/2}$.) Проделать то же самое для (1.7.23).

3. Вывести (1.7.33), (1.7.35).

4. (a) Пусть функция

$$q(x)=\begin{cases} Q, & 0<x<L; \\ 0 & \text{в других точках} \end{cases}$$

является начальным условием для (1.7.2). Найти $a(\xi)$ и $b(\xi)$ в явном виде при $\sigma=+1$ и при $\sigma=-1$. Какому неравенству должны удовлетворять Q и L, чтобы не было солитонов?

(b) Найти асимптотические решения уравнения (1.7.2) при $\sigma=+1$ и при $\sigma=-1$, развивающиеся из этого начального условия в случае отсутствия солитонов. Обрисуйте поведение огибающей волновых пакетов этих решений на основании только главных членов асимптотических разложений. (Здесь следует найти хорошо определенные волновые пакеты.)

(c) Сравнивая первую поправку асимптотического разложения с главным членом, определить время, необходимое для установления асимптотической картины, обрисованной в п. (b).

(d) Манаков [345] отметил следующее приложение уравнения (1.7.2). Пусть интенсивная (интенсивности $|Q|^2$) плоская монохроматическая световая волна нормально падает на непрозрачный экран с длинной щелью ширины L. Если x является координатой вдоль экрана, а t обозначает координату, нормальную к экрану, то решение уравнения (1.7.2) представляет собой комплексную амплитуду волны дифракции на щели. Нелинейный член в (1.7.2) представляет собой изменение коэффициента преломления среды в поле интенсивной волны. Решение, которое вы обрисовали в п. (b), соответствует дифракционной картине, которую можно наблюдать, поместив дополнительный экран вдали от щели. Время, оценка которого была получена в п. (c), здесь интерпретируется как расстояние, на которое следует отодвинуть экран от щели. При этом солитонам отвечают дифракционные волноводы, в которых интенсивность не уменьшается при удалении экрана от щели.

5. Рассмотреть задачи п. 4 для уравнения (1.7.23) вместо (1.7.2).

6. Найти асимптотическое решение уравнения sin-Гордон $\varphi_{xt}=\sin\varphi$, предположив отсутствие солитонов.

(a) Найти автомодельное решение. Показать, что внутри светового конуса уравнение имеет медленно меняющееся автомодельное решение вида

$$\varphi \sim 2t^{-1/2} X^{-2/4} d \sin\theta,$$

$$\theta \sim 2tX^{1/2} - \frac{1}{2} d^2 \ln t - \frac{d^2}{2} X + \bar{\theta},$$

где $X = -x/t$, $d = d(X)$, $\bar{\theta} = \bar{\theta}(X)$.

(b) Показать, что при $-x/t = \zeta^{-2}$

$$d^2(X) = \frac{1}{\pi} \ln\left\{1 + \left|r\left(\frac{\zeta}{2}\right)\right|^2\right\},$$

$$\bar{\theta}(X) = \frac{\pi}{4} - \arg\left\{r\left(\frac{\zeta}{2}\right)\right\} - \arg\left\{\Gamma\left(1 - \frac{id^2}{2}\right)\right\} - \frac{3}{2} d^2 \ln 2 -$$

$$- \int_0^{\zeta^{-1}} \ln\left(\frac{\zeta^{-1} - y}{\zeta^{-1} + y}\right) (d^2)_y \, dy.$$

(b) Выразить окончательный результат через лабораторные переменные $\chi = (x + t)$ и $\tau = (x - t)$.

(c) Что происходит вблизи светового конуса, вне его?

7. Вывести (1.7.52).

8. (a) Показать, что при больших k (т. е. $\lambda \gg q$ (в (1.3.33))

$$\rho\left(\frac{k}{2}\right) \sim \frac{i\hat{q}(k)}{k},$$

где $\hat{q}$ — преобразование Фурье функции $q(x)$ и $\rho(k)$ является коэффициентом отражения, определенным в (1.3.33—35).

(b) Сравнивая асимптотические решения уравнения КдФ и его линеаризации (П.1.49), показать, что пределы ($t \to 0$, начальные условия $\to 0$) коммутируют (при отсутствии солитонов) всюду, кроме окрестности бесстолкновительной ударной волны. Другими словами, область ударной волны является существенно нелинейной; вне ее решения уравнения КдФ при отсутствии солитонов являются лишь слабонелинейными.

Глава 2. МОЗР в других постановках

2.1. Задачи рассеяния для операторов более высокого порядка и многомерные задачи рассеяния. До сих пор мы рассматривали только такие нелинейные эволюционные уравнения, которые связаны с операторами второго порядка. Захаров и Манаков (1973) [533] показали, что существуют интересные с точки зрения физических приложений уравнения, связанные с задачами рассеяния для операторов более высокого порядка. В частности, они показали, что хорошо известное уравнение трехволнового взаимодействия связано с задачей рассеяния для оператора *третьего* порядка. Несколько позднее Кауп [259] и Захаров, Манаков [535] изучили соответствующую обратную задачу рассеяния и решения уравнений движения.

В этом разделе мы вначале покажем, как идеи разд. 1.2 можно без труда обобщить на случай задач более высокого порядка. Затем мы обсудим некоторые подробности, связанные с процедурой вывода уравнений обратной задачи рассеяния.

2.1. а. Вывод одномерных эволюционных уравнений. Мы начнем с матричной формулировки [8]:

(2.1.1a) $$\mathbf{v}_x = i\zeta D\mathbf{v} + N\mathbf{v},$$

(2.1.1b) $$\mathbf{v}_t = Q\mathbf{v},$$

где $\mathbf{v}$ является $n \times 1$-матрицей (вектором)

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix}$$

и D, N, Q являются $n \times n$-матрицами, причем D диагональна, $D = d_i\delta_{ij}$ ($\operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$), $d_i = \text{const}$ и N — такая матрица, что $N_{ii} = 0$ (в действительности последнее предположение несущественно, но оно упрощает анализ). Из равенства производных $\mathbf{v}_{xt} = \mathbf{v}_{tx}$, полученных перекрестным дифференцированием, и требования $\zeta_t = 0$ получим

(2.1.2) $$Q_x = N_t + i\zeta [D, Q] + [N, Q]$$

($[A, B] \equiv AB - BA$). Как в разд. 1.2, мы хотим при заданных D, N найти такое Q, которое удовлетворяет (2.1.2), чтобы задачи (2.1.1a, b) были совместны. Это приведет к дальнейшим ограничениям, которые представляют собой систему нелинейных эволюционных уравнений. Разложение Q по степеням ζ является отправным пунктом нашего исследования. В качестве примера мы выведем уравнения нелинейного трехволнового взаимодействия. Эта система уравнений получается наиболее просто. Мы разложим Q в виде

$$Q = Q^{(1)}\zeta + Q^{(0)} \tag{2.1.3}$$

(ибо уравнения трехволнового взаимодействия имеют первый порядок по пространственным производным). Результаты разд. 1.2 и 1.5 мотивируют выбор вида (2.1.3). Подставив (2.1.3) в (2.1.2), получим в порядке ζ^2

$$i[D, Q^{(1)}] + i\sum_{k=1}^{n}\left(D_{lk}Q^{(1)}_{kj} - Q^{(1)}_{lk}D_{kj}\right) = 0. \tag{2.1.4}$$

Воспользовавшись тем, что $D_{ik} = \delta_{ik}d_k$, получим $\left(d_i - d_j\right)Q^{(1)}_{ij} = 0$. Мы будем предполагать, что

$$d_1 > d_2 > d_3$$

и поэтому

$$Q^{(1)}_{lj} = q_l\delta_{lj}. \tag{2.1.5}$$

Мы выберем все q_l постоянными (можно показать, что если какое-нибудь q_l является функцией времени, то заменами переменных эволюционное уравнение, которое получится в результате вычисления, приводится к виду с постоянным q_l). В порядке ζ имеем

$$Q^{(1)}_x = i[D, Q^{(0)}] + [N, Q^{(1)}] \tag{2.1.6a}$$

или

$$Q^{(1)}_{lj,\,x} = i\sum_k\left(D_{lk}Q^{(0)}_{kj} - Q^{(0)}_{lk}D_{kj}\right) + \sum_k\left(N_{lk}Q^{(1)}_{kj} - Q^{(1)}_{lk}N_{kj}\right). \tag{2.1.6b}$$

Подстановка (2.1.5) в (2.1.6) дает (отметим, что здесь мы не пользуемся соглашением о суммировании по повторяющимся индексам)

$$Q^{(0)}_{lj} = \frac{q_l - q_j}{i\left(d_l - d_j\right)}N_{lj}, \qquad l \neq j. \tag{2.1.7}$$

При $l = j$ мы возьмем $Q^{(0)}_{lj} = 0$. Определив

$$a_{lj} = \frac{1}{i}\,\frac{q_l - q_j}{d_l - d_j} = a_{jl}, \tag{2.1.8}$$

представим (2.1.7) в виде

$$Q_{lj}^{(0)} = a_{lj} N_{lj}, \quad l \neq j. \tag{2.1.9}$$

При ζ^0 мы имеем $Q_x^{(0)} = N_t + [N, Q^{(0)}]$, откуда получаем систему $N(N-1)$ уравнений

$$N_{lj,t} - a_{lj} N_{lj,x} = \sum_k (a_{lk} - a_{kj}) N_{lk} N_{kj} \tag{2.1.10}$$

(отметим, что условие $N_{ll} = 0$ совместно с (2.1.10)). Число уравнений можно уменьшить в два раза, потребовав $N_{lj} = \sigma_{lj} N^*_{jl}$. (Это аналог выбора $q = \pm r^*$ в разд. 1.2 в случае матриц второго порядка.) Тогда система (2.1.10) и комплексно сопряженная ей система совместны, если

$$\sigma_{lk}\sigma_{kj} = -\sigma_{lj}, \quad l > k > j, \tag{2.1.11}$$

и коэффициенты a_{lj} вещественны.

Уравнения (2.1.10) подходящим выбором масштабов переменных можно привести к виду стандартной системы нелинейных уравнений трехволнового взаимодействия. Например, мы получим систему

$$\begin{aligned} Q_{1t} + C_1 Q_{1x} &= i\gamma_1 Q_2^* Q_3^*, \\ Q_{2t} + C_2 Q_{2x} &= i\gamma_2 Q_1^* Q_3^*, \\ Q_{3t} + C_3 Q_{3x} &= i\gamma_3 Q_1^* Q_2^*, \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

где $\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -1$ и $\gamma_i = \pm 1$, если положить

$$\begin{aligned} N_{12} &= -iQ_3/\sqrt{\beta_{13}\beta_{23}}, & N_{31} &= -iQ_2/\sqrt{\beta_{12}\beta_{23}}, \\ N_{23} &= +iQ_1/\sqrt{\beta_{12}\beta_{13}}, & N_{13} &= -\gamma_1\gamma_3 N^*_{31}, \\ N_{32} &= \gamma_2\gamma_3 N^*_{23}, & N_{21} &= \gamma_1\gamma_2 N^*_{12}, \end{aligned}$$

где

$$q_j = -i\,\frac{C_1C_2C_3}{C_j}, \quad \beta_{lj} = d_l - d_j = C_j - C_l,$$
$$C_3 > C_2 > C_1.$$

В системе (2.1.12) имеются распадная неустойчивость (для волн с положительно определенной энергией), если мы выберем знак одной из γ_n отличным от оставшихся, и взрывная неустойчивость, когда $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = -1$. Прямо из уравнений мы мо-

жем вывести законы сохранения[1])

$$\begin{aligned} &\gamma_1 M_1 - \gamma_2 M_2 = \text{const}, \\ &\gamma_2 M_2 - \gamma_3 M_3 = \text{const}, \\ &\gamma_1 M_1 - \gamma_3 M_3 = \text{const}, \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

где $M_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} Q_n Q_n^* \, dx$, и видно, что не существует положительно определенной энергии в случае $\gamma_j = -1$, $j = 1, 2, 3$.

Отметим, что так называемый случай двухволнового взаимодействия получается из (2.1.12), если положить $C_3 = C_2$, $Q_3 = Q_2$. С точки зрения нашего вывода, это является сингулярным пределом, и задача на собственные значения (2.1.1), по-видимому, неприменима. Кауп [263] подробно изучил двухволновой случай.

Несколько позднее в этом разделе мы вернемся к более подробному изучению трехволнового взаимодействия; сначала, однако, обсудим случай другого разложения Q. Если мы возьмем $Q = Q^{(2)}\zeta^2 + Q^{(1)}\zeta + Q^{(0)}$ и проделаем те же вычисления, как и раньше, мы найдем

$$\begin{aligned} \beta_{lj} N_{lj,xx} + \varepsilon_{lj} N_{lj,x} - \sum_{k \neq l,j} \gamma_{lkj} (N_{lk} N_{kj})_x = \\ = N_{lj,t} + \sum_{k \neq l,j} (\varepsilon_{kj} - \varepsilon_{lk}) N_{lk} N_{kj} + \\ + N_{lj} \Big\{ 2\beta_{lj} N_{lj} N_{jl} + \sum_{k \neq l} (\beta_{kj} + \gamma_{lkj}) N_{jk} N_{kj} - \\ - (\beta_{kl} + \gamma_{kjl}) N_{lk} N_{kl} \Big\} + \\ + \sum_{k \neq l,j} (\beta_{kj} N_{lk} N_{kj,x} - \beta_{lk} N_{kj} N_{lk,x}) + \\ + \sum_{k \neq l,j} \sum_{m \neq l,j} (\gamma_{lkm} N_{kj} N_{lm} N_{mk} - \gamma_{kjm} N_{lk} N_{km} N_{mj}), \end{aligned} \tag{2.1.14}$$

где

$$a_{lj} = \frac{q_l^{(2)} - q_j^{(2)}}{i(d_l - d_j)} = a_{jl}, \qquad \beta_{lj} = \frac{a_{lj}}{i(d_l - d_j)} = -\beta_{jl},$$

$$\gamma_{ljk} = \frac{a_{kj} - a_{lk}}{i(d_l - d_j)} = \gamma_{jlk} = \gamma_{klj}, \qquad \varepsilon_{lj} = \frac{q_l^{(1)} - q_j^{(1)}}{i(d_l - d_j)} - \varepsilon_{jl}$$

---

[1]) Соотношения (2.1.13) принято называть соотношениями Мэнли — Роу.— *Прим. ред.*

и $q_l^{(2)}$, $q_l^{(1)}$ — произвольные константы. Схематически эти члены могут быть интерпретированы следующим образом:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial A}{\partial x}}_{\text{групповая скорость}} + \underbrace{\frac{i\partial^2 A}{\partial x^2}}_{\text{дисперсия}} + \underbrace{BC + \frac{\partial}{\partial x}(BC) +}_{\text{тройной резонанс}}$$

$$+ \underbrace{A^2A^*}_{\text{самодействие}} + \underbrace{ABB^*}_{\text{нелинейный сдвиг частоты}} + \underbrace{BDE}_{\text{четверной резонанс}}$$

Следует отметить, что все эти члены возникают в теории возмущений; при этом будем иметь в виду, что производные полей имеют дополнительный порядок малости (отметим, что члены BC возникли бы в другом порядке по сравнению с $\partial_x(BC)$). При использовании этого уравнения в конкретных физических приложениях следует следить за тем, чтобы все его коэффициенты в точности совпадали с коэффициентами интересующей задачи. Например, если a_{jl}, β_{jl} подобрать подходящим образом, то уравнение (2.1.14) может быть приведено к виду, интересному для физических приложений:

(i) Манаков [346]. Векторное нелинейное уравнение Шрёдингера:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & A_1 & A_2 \\ \sigma_{21}A_1^* & 0 & 0 \\ \sigma_{31}A_2^* & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(2.1.15)
$$iA_{1t} = A_{1xx} + 2A_1(\sigma_{21}|A_1|^2 + \sigma_{31}|A_2|^2),$$
$$iA_{2t} = A_{2xx} + 2A_2(\sigma_{21}|A_1|^2 + \sigma_{31}|A_2|^2).$$

(ii) Ядзима, Оикава [513]. Взаимодействие лэнгмюровских и ионозвуковых волн в плазме:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & Ee^{-ix} & in \\ 0 & 0 & Ee^{ix} \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(2.1.16)
$$iE_t + \frac{1}{2}E_{xx} + \frac{1}{2}(1-n)E = 0,$$
$$n_t + n_x(|E|^2)_x = 0$$

(см. также [512]). Похожее уравнение, описывающее взаимодействие коротких капиллярных волн с длинными гравитационными волнами, изучали Джорджевич и Редекопп [138].

(iii) Захаров (1974) [527], Абловиц и Хаберман (1975) [8]. Уравнение Буссинеска:

$$N=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ N_{21} & 0 & (1+\omega_3)N_{31} \\ N_{31} & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где если

$$\omega_3=e^{-2\pi i/3},\quad N_{31}=\mu\varphi_x+\nu,\quad N_{21}=\mu\left(\frac{\omega_3}{2\beta}\varphi_t+\frac{\omega_3}{2}\varphi_{xx}\right),$$

$$\mu=\omega_3-1,\quad \nu=\frac{\omega_3-1}{12},\quad w=\varphi_x,$$

то

$$w_{tt}-\beta^2(w_{xx}+6(w^2)_{xx}+w_{xxxx})=0. \tag{2.1.17}$$

Мы отметим, что уравнение (2.1.17) является некорректным, когда $\beta^2=1$, хотя оно часто возникает в различных физических ситуациях. Однако в этих приложениях уравнение (2.1.17) возникает как длинноволновой предел, и поэтому короткие волны, являющиеся причиной некорректности, при асимптотическом выводе не должны рассматриваться.

Кроме того, в этом случае задача на собственные значения для оператора (2.1.1a) может быть сведена к скалярной задаче для оператора третьего порядка

$$\psi_{xxx}+(\lambda+M_1)\psi+M_2\psi_x=0, \tag{2.1.18}$$

где

$$M_1=N_{31,x}+N_{21},\quad M_2=(2+\omega_3)N_{31}$$

(здесь имеется аналогия с выбором $r=-1$ в случае $n=2$). Захаров начинал в своей работе [527] с уравнения вида (2.1.18). Естественной временной зависимостью, связанной с (2.1.2), является

$$\psi_t=A\psi+B\psi_x+C\psi_{xx};$$

A, B, C — полиномы по λ.

Следует отметить, что интересное обобщение описанной идеи возникнет, если в (2.1.1) формально устремить $n\to\infty$. В этом случае задача на собственные значения и временная зависимость приводятся к виду

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y;t)=i\zeta d(y)v(x,y;t)+\int_{-\infty}^{\infty}N(x,y,z;t)v(x,z;t)\,dz, \tag{2.1.19a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,y;t)=\int_{-\infty}^{\infty}Q(x,y,z;t)v(x,z;t)\,dz. \tag{2.1.19b}$$

При этом описанная здесь процедура приводит к интегро-дифференциальному уравнению

$$(2.1.19c)\qquad N_t(x, y, z; t) = \alpha(y, z) N_x(x, y, z; t) + \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha(y, z') - \alpha(z', z)) N(x, y, z'; t) N(x, z', z; t)\, dz',$$

где

$$\alpha(y, z) = \alpha(z, y).$$

Условие симметрии $N(x, y, z; t) = \sigma(y, z) N^*(x, z, y; t)$ при $y > z$ совместно с этим уравнением, если σ удовлетворяет условиям $\sigma(y, z')\sigma(z', z) = -\sigma(y, z)$ для $y > z' > z$.

2.1. b. Теория рассеяния. Теперь мы обсудим обратную задачу рассеяния, связанную с матричными 3×3-операторами, т. е. (2.1.1). Кроме того, рассмотрим задачу о нелинейном трехволновом взаимодействии, имеющую важное физическое значение, к которой применимы некоторые из этих идей. В основном мы будем следовать работе Каупа [259] (некоторые из этих результатов можно найти в работе Захарова и Манакова [535][1])). Полное решение обратной задачи рассеяния для операторов порядка выше третьего в настоящее время отсутствует[2]). Тем не менее было показано (см., например, [546, 119]), что в случае $n\times n$ имеется уравнение Гельфанда — Левитана — Марченко, связанное с $n\times n$-оператором, но при этом неясно, какие ограничения следует наложить на начальные условия для применимости этого подхода. Также мы отметим работу Шабата [460], в которой изучались некоторые вопросы, связанные с задачей рассеяния для оператора $n\times n$, и недавние работы Захарова и Шабата [547] и Захарова и Михайлова [540, 541], посвященные формулировке метода задачи Римана.

Рассмотрим уравнения (2.1.1a) на интервале $|x| < \infty$, причем ζ является собственным значением, v является 3×1-матрицей-столбцом (вектором), N является 3×3-матрицей потенциалов с нулевыми диагональными элементами ($N_{ii} = 0$) и $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, d_3)$. Предположим, что $N_{ij} \to 0$ достаточно быстро при $|x| \to \infty$; для вещественных ζ это позволяет определить на

---

[1]) Полное решение обратной задачи рассеяния, связанной нелинейным уравнением трехволнового взаимодействия, содержится в препринте Захарова и Манакова [1*], на опубликованный позднее сокращенный вариант которого ссылаются авторы книги. Другой подход к этой же задаче можно найти в работах Шабата [460], [2*] и монографии [539].

[2]) Следует отметить, что во время написания этой книги отсутствовало полное решение задачи и для операторов третьего порядка. В работах Каупа [3*] и [374] такая задача была в основном решена. Полное и математически строгое решение общей задачи можно найти в более поздних работах Билса [4*] и Билса и Кауфмана [5*]. — *Прим. перев.*

каждом из концов оси x по три линейно независимые собственные функции, т. е. мы определим решение $\varphi_n^{(j)}$ (где индекс $j = 1$, 2 или 3 обозначает j-ю собственную функцию, $n = 1$, 2 или 3 обозначает n-ю компоненту вектора $\varphi^{(j)}$ с граничными условиями

(2.1.20a) $$\varphi_n^{(j)} \sim \delta_{n,j} e^{i\zeta d_j x} \quad \text{при} \quad x \to -\infty$$

и собственные функции $\psi_n^{(j)}$ с граничными условиями

(2.1.20b) $$\psi_n^{(j)} \sim \delta_{n,j} e^{i\zeta d_j x} \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

Вронскиан, стандартным образом определенный для таких матричных уравнений,

(2.1.21a) $$W(u, v, w) = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix},$$

отличен от нуля, если u, v, w линейно независимы. Кроме того, имеем

(2.1.21b) $$W_x = i\zeta (\operatorname{Tr} D) W$$

($\operatorname{Tr} D \equiv$ след $D = d_1 + d_2 + d_3$). Таким образом, тройки векторов $[\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \varphi^{(3)}]$ и $[\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \psi^{(3)}]$ являются наборами линейно независимых собственных функций. Поэтому

(2.1.22a) $$\varphi^{(j)} = \sum_{k=1}^{3} [a(\zeta)]_{jk} \psi^{(k)}.$$

Так называемая матрица рассеяния имеет вид

(2.1.22b) $$S = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Она связывает решения при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$. В случае задачи 2×2 (разд. 3) мы имеем

(2.1.22c) $$S = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

Вычислив определитель от (2.1.22a), мы получим аналог соотношения $a\bar{a} + b\bar{b} = 1$:

(2.1.22d) $$\det [a_{jk}] = 1.$$

Аналогичным образом можно разложить собственные функции $\psi^{(j)}$ по функциям $\varphi^{(j)}$:

(2.1.23a) $$\psi^{(j)} = \sum_{k=1}^{3} b_{jk} \varphi^{(k)},$$

Подставляя (2.1.23a) в (2.1.22a), получим

(2.1.23b) $$\sum_{k=1}^{3} a_{jk}b_{kl} = \delta_{jl}.$$

Вопрос об аналитичности решается при помощи интегрального уравнения, связанного с (2.1.1a). Например, выбрав граничные условия вида (2.1.20a), мы придем к следующему интегральному уравнению для $\varphi^{(j)}$:

(2.1.24a) $$\varphi_n^{(j)}(x)\, e^{-i\zeta d_j x} = \delta_{n,j} - i \int_{-\infty}^{x} dy e^{i\zeta\beta_{nj}(x-y)} \times \\ \times \sum_{m=1}^{3} iN_{nm}(y)\left(\varphi_m^{(j)}(y)\, e^{-i\zeta d_j x}\right),$$

где

(2.1.24b) $$\beta_{nj} = d_n - d_j.$$

Отметим, что: (1) уравнение (2.1.24a) является уравнением типа Вольтерры; (2) $\beta_{1m} > 0$ и $\beta_{3m} < 0$. Это немедленно приводит к тому, что собственная функция $\varphi^{(1)}e^{-i\zeta d_1 x}$ является аналитической в нижней полуплоскости ζ, а $\varphi^{(3)}e^{-i\zeta d_3 x}$ — в верхней полуплоскости ζ при всех вещественных x. Действительно, предположив потенциал принадлежащим L_1, можно показать, что уравнение (2.1.24a) имеет сходящийся ряд Неймана. Кроме того, поскольку $a_{11} = \lim\limits_{x\to\infty} \varphi_1^{(1)}e^{-i\zeta d_1 x}$, получаем, что $a_{11}(\zeta)$ тоже является аналитической функцией в нижней полуплоскости. Тем же способом можно проанализировать функции $\psi^{(j)}$.

В результате получим, что в нижней полуплоскости ($\zeta = \xi + i\eta$, $\eta < 0$) аналитичны функции

(i) $$\varphi^{(1)}e^{-i\zeta d_1 x}, \quad \psi^{(3)}e^{-i\zeta d_3 x}, \quad a_{11}, \quad b_{33};$$

в верхней полуплоскости ($\zeta = \xi + i\eta$, $\eta > 0$) аналитичны функции

(ii) $$\varphi^{(3)}e^{-i\zeta d_3 x}, \quad \psi^{(1)}e^{-i\zeta d_1 x}, \quad a_{33}, \quad b_{11}.$$

(Когда потенциал N_{ik} имеет ограниченный носитель или убывает быстрее любой экспоненты, то определенные выше функции являются целыми. Функции (i) и (ii) ограничены при $|\zeta| \to \infty$.)

Эти результаты позволяют надеяться на построение естественных интегральных представлений для $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(3)}$, $\psi^{(1)}$, $\psi^{(3)}$ с требуемыми свойствами аналитичности. Однако у нас нет информации относительно функций $\varphi^{(2)}$, $\psi^{(2)}$. Это первый трудный во-

прос, который пока встретился. Все остальные идеи (речь все время идет об операторе (2.1.1a)) совершенно аналогичны случаю 2×2.

Кауп [259], рассматривая собственные функции сопряженного оператора, показал, что

$$\bar{\chi} = e^{-i\zeta d_2 x}\left(b_{21}\psi^{(1)} - b_{11}\psi^{(2)}\right), \tag{2.1.25a}$$

$$\bar{\bar{\chi}} = e^{-i\zeta d_2 x}\left(b_{33}\psi^{(2)} - b_{23}\psi^{(3)}\right) \tag{2.1.25b}$$

являются аналитическими соответственно в верхней и нижней полуплоскостях ζ. Перед тем как перейти к обратной задаче рассеяния, мы отметим, что, рассматривая (2.1.1a) при $|\zeta| \to \infty$ (методом ВКБ), с учетом граничных условий получим

$$\begin{gathered}
\operatorname{Im}\zeta > 0, \quad \varphi^{(3)} e^{-i\zeta d_3 x} = \\
= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{\zeta}\right), \quad \psi^{(1)} e^{-i\zeta d_1 x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{\zeta}\right), \\
\chi = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{\zeta}\right), \quad a_{33} = 1 + O\left(\frac{1}{\zeta}\right), \\
b_{11} = 1 + O\left(\frac{1}{\zeta}\right),
\end{gathered} \tag{2.1.25c}$$

$$\begin{gathered}
\operatorname{Im}\zeta < 0, \quad \varphi^{(1)} e^{-i\zeta d_1 x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{\zeta}\right), \\
\psi^{(3)} e^{-i\zeta d_3 x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{\zeta}\right), \\
\bar{\chi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{\zeta}\right), \quad a_{11} = 1 + O\left(\frac{1}{\zeta}\right), \\
b_{33} = 1 + O\left(\frac{1}{\zeta}\right).
\end{gathered} \tag{2.1.25d}$$

Основываясь на аналитичности, мы предположим существование следующих интегральных представлений для функций $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(3)}$ (имеющих подходящее аналитическое поведение в верхней

и нижней полуплоскостях):

$$\psi^{(1)}e^{-i\zeta d_1 x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\int_x^\infty K^{(1)}(x,\ s)\,e^{i\zeta(s-x)\beta_{12}}ds, \tag{2.1.26a}$$

$$\psi^{(3)}e^{-i\zeta d_3 x}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\int_x^\infty K^{(3)}(x,\ s)\,e^{-i\zeta(s-x)\beta_{23}}ds. \tag{2.1.26b}$$

Потребовав, чтобы (2.1.26) удовлетворяли уравнению (2.1.1а), получим уравнения в частных производных для $K^{(1)}$, $K^{(3)}$ (аналогичные (1.3.19)); например, для $K^{(1)}$

$$\left\{(\partial_x+\partial_y)+\frac{D}{\beta_{12}}\left(I-d_1D^{-1}\right)\partial_y\right\}K^{(1)}(x, y)=N(x)\,K^{(1)}(x, y), \tag{2.1.27a}$$

причем

$$\begin{gathered}\lim_{s\to\infty}K^{(1)}(x,\ s)=0,\\ K^{(1)}_n(x,\ x)=-\frac{\beta_{12}}{\beta_{1n}}N_{n1}(x),\quad n=2,\ 3.\end{gathered} \tag{2.1.27b}$$

Отсюда следует независимость $K^{(1)}(x,\ y)$ от параметра ζ. Из такого же анализа для $\psi^{(3)}$ мы получим, что $K^{(3)}$ связано с потенциалом соотношением

$$K^{(3)}_n(x,\ x)=-\frac{\beta_{23}}{\beta_{n3}}N_{n3}(x),\quad n=1,\ 2, \tag{2.1.27c}$$

и что $K^{(3)}$ также не зависит от ζ.

Для того чтобы вывести уравнения обратной задачи рассеяния, мы вначале выведем некоторые интегральные представления для $\psi^{(j)}$, $j=1, 2, 3$. Мы предположим, что потенциалы убывают быстрее любой экспоненты, так что все функции являются целыми и поэтому можно определить контурные интегралы. (Это ограничение можно убрать, при этом контурные интегралы заменятся на интегралы вдоль вещественной оси и сумму вкладов от полюсов.)

Мы определим контур c ($\bar c$) на плоскости ζ проходящим от $-\infty+i\varepsilon$ (от $-\infty-i\varepsilon$), $\varepsilon>0$, к $+\infty+i\varepsilon$ (к $+\infty-i\varepsilon$) сверху (снизу) всех нулей функций b_{11}, a_{33} (a_{11}, b_{33}).

Теперь вычислим интегралы

$$\begin{gathered}I_1=\int_{\bar c}\frac{\varphi^{(1)}e^{-i\zeta' d_1 x}}{a_{11}(\zeta')(\zeta-\zeta')}\,d\zeta',\\ I_2=\left(\int_c-\int_{\bar c}\right)\left(\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta}\,\psi^{(2)}e^{-i\zeta d_2 x}\right),\\ I_3=\int_c\frac{\varphi^{(3)}e^{-i\zeta' d_3 x}}{a_{33}(\zeta')(\zeta'-\zeta)}\,d\zeta',\end{gathered} \tag{2.1.28}$$

где для $I_1(I_3)$ ζ лежит выше (ниже) контура $\bar{c}(c)$, а для I_2 ζ лежит между c и $\bar{c}$. Используя (2.1.22a), асимптотики (2.1.25), (2.1.24) и требование аналитичности, при помощи контурного интегрирования найдем

$$\text{(2.1.29a)}\quad \psi^{(1)}(\zeta, x)\, e^{-i\zeta d_1 x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\bar{c}} \frac{d\zeta'}{\zeta' - \zeta}\, e^{-i\zeta' d_1 x} \rho_1(\zeta') \times$$

$$\times \psi^{(2)}(\zeta', x) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\bar{c}} \frac{d\zeta'}{\zeta' - \zeta}\, e^{-i\zeta d_1 x} \rho_3(\zeta')\, \psi^{(3)}(\zeta', x),$$

$$\text{(2.1.29b)}\quad \psi^{(2)}(\zeta, x)\, e^{-i\zeta d_2 x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\bar{c}} \frac{d\zeta'}{\zeta' - \zeta}\, \rho_6(\zeta') \times$$

$$\times e^{-i\zeta d_2 x} \psi^{(3)}(\zeta', x) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c} \frac{d\zeta'}{\zeta' - \zeta}\, \rho_5(\zeta')\, e^{-i\zeta' d_2 x} \psi^{(1)}(\zeta', x),$$

$$\text{(2.1.29c)}\quad \psi^{(3)}(\zeta, x)\, e^{-i\zeta d_3 x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c} \frac{d\zeta'}{\zeta' - \zeta}\, \rho_4(\zeta') \times$$

$$\times e^{-i\zeta' d_3 x} \psi^{(1)}(\zeta', x) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c} \frac{d\zeta'}{\zeta' - \zeta}\, \rho_2(\zeta')\, e^{-i\zeta' d_3 x} \psi^{(2)}(\zeta', x),$$

где

$$\text{(2.1.29d)}\quad \begin{matrix} \rho_4 = \dfrac{a_{31}}{a_{33}}, & \rho_2 = \dfrac{a_{32}}{a_{33}}, & \rho_3 = \dfrac{a_{13}}{a_{11}}, \\ \rho_1 = \dfrac{a_{12}}{a_{11}}, & \rho_5 = \dfrac{b_{21}}{b_{12}}, & \rho_6 = \dfrac{b_{23}}{b_{33}}. \end{matrix}$$

В (2.1.29a, c) мы подставим $\psi^{(2)}$ из (2.1.29b). Это даст *лишь* интегральные соотношения между $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(3)}$. Далее мы подставим интегральные представления для $\psi^{(1)}$, $\psi^{(3)}$ в эти соотношения. Подействовав на (2.1.29a) оператором $1/2\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\zeta(x-y)\beta_1}\, d\zeta$ и на (2.1.29c) оператором $1/2\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\zeta(x-y)\beta_2}\, d\zeta$ (преобразование Фурье), после утомительных алгебраических вычислений полу-

чим при $y > x$

(2.1.30a) $$K^{(1)}(x, y)+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}F_1(y)+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}F_3(x, y)+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}F_5(x, y)+$$
$$+\int_x^\infty (K^{(1)}(x, s)\,F_3(s, y)+K^{(3)}(x, s)\,F_5(s, y))\,ds=0,$$

(2.1.30b) $$K^{(3)}(x, y)+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}F_2(y)+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}F_4(x, y)+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}F_6(x, y)+$$
$$+\int_x^\infty (K^{(1)}(x, s)\,F_6(s, y)+K^{(3)}(x, s)\,F_4(s, y))\,ds=0,$$

где

(2.1.30c) $$F_1(x)=\frac{\beta_{12}}{2\pi}\int_{\bar{c}} d\zeta\rho_1(\zeta)\,e^{-i\zeta\beta_{12}x},$$
$$F_2(x)=\frac{\beta_{23}}{2\pi}\int_{c} d\zeta\rho_2(\zeta)\,e^{i\zeta\beta_{23}x},$$

(2.1.30d) $$F_3(x, y)=\frac{\beta_{12}}{4\pi^2 i}\int_c d\zeta\rho_5(\zeta)\,e^{i\zeta\beta_{12}x}\int_{\bar{c}}\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta}\rho_1(\zeta')\,e^{-i\zeta'\beta_{12}y},$$

(2.1.30e) $$F_4(x, y)=-\frac{\beta_{23}}{4\pi^2 i}\int_{\bar{c}} d\zeta\rho_6(\zeta)\,e^{-i\zeta\beta_{23}x}\int_c\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta}\rho_2(\zeta')\,e^{i\zeta'\beta_{23}y},$$

(2.1.30f) $$F_5(x, y)=\frac{\beta_{12}}{2\pi}\int_c d\zeta\rho_3(\zeta)\,e^{-i\zeta(\beta_{12}y+\beta_{23}x)}-$$
$$-\frac{\beta_{12}}{4\pi^2 i}\int_{\bar{c}} d\zeta\rho_6(\zeta)\,e^{-i\zeta\beta_{23}x}\int_{\bar{c}}\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta+i\varepsilon}\rho_1(\zeta')\,e^{-i\zeta'\beta_{12}y},$$

(2.1.30g) $$F_6(x, y)=\frac{\beta_{23}}{2\pi}\int_c d\zeta\rho_4(\zeta)\,e^{i\zeta(\beta_{12}x+\beta_{23}y)}+$$
$$+\frac{\beta_{23}}{4\pi^2 i}\int_c d\zeta\rho_5(\zeta)\,e^{i\zeta\beta_{12}x}\int_c\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta+i\varepsilon}\rho_2(\zeta')\,e^{i\zeta'\beta_{23}x}.$$

В (2.1.30f, g) можно перейти к пределу $\varepsilon\to 0$ (мы найдем его, если изменим порядок интегрирования, сохранив соотношение между ζ и ζ'). Рассматривая предел $|\zeta|\to\infty$ для $\psi^{(1)}$, $\psi^{(2)}$, $\psi^{(3)}$ в (2.1.1a) и в интегральных представлениях (2.1.20), мы полу-

чим

$$(2.1.31a)\quad N_{21}(x) = K_2^{(1)}(x, x), \qquad N_{31}(x) = -\frac{\beta_{13}}{\beta_{12}} K_3^{(1)}(x, x),$$

$$(2.1.31b)\quad N_{13}(x) = -\frac{\beta_{13}}{\beta_{23}} K_1^{(3)}(x, x), \qquad N_{23}(x) = -K_2^{(3)}(x, x),$$

$$(2.1.31c)\quad N_{12}(x) = -\beta_{12}\left(E_1(x) - \int_x^\infty ds\,(K_1^{(3)}(x, s)\,E_2(s) - K_1^{(1)}(x, s)\,E_1(s)\right),$$

$$(2.1.31d)\quad N_{32}(x) = -\beta_{23}\left(E_2(x) + \int_x^\infty ds\,(K_3^{(3)}(x, s)\,E_2(s) - K_3^{(1)}(x, s)\,E_1(s)\right),$$

где

$$(2.1.32a)\quad E_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int_C \rho_5(\zeta)\,e^{i\zeta\beta_{12}x}\,d\zeta,$$

$$(2.1.32b)\quad E_2(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\bar{C}} \rho_6(\zeta)\,e^{-i\zeta\beta_{12}x}\,d\zeta.$$

При выводе (2.1.31) мы использовали (2.1.29b) в пределе $|\zeta|\to\infty$ вдоль вещественной оси и подставили интегральное представление (2.1.26) в (2.1.29b).

2.1. с. Трехволновое взаимодействие. Свяжем теперь только что описанную обратную задачу рассеяния с конкретной задачей нелинейного взаимодействия трех волн (2.1.12).

Используя выбранные в (2.1.12) масштабы, мы получим, что оператор временно́й эволюции (2.1.1b) приводится к виду

$$(2.1.33)\quad v_{it} = \left[-\frac{C_1C_2C_3}{C_iC_j} N_{ij} - i\frac{C_1C_2C_3}{C_j}\zeta\delta_{ij}\right] v_j.$$

Определим зависимость данных рассеяния от времени. Для этого определим зависящие *от времени* собственные функции

$$(2.1.34a)\quad \varphi^{(m),(t)} = \varphi^{(m)} \exp\left(-i\frac{C_1C_2C_3}{C_m}\zeta t\right),$$

$$(2.1.34b)\quad \psi^{(m),(t)} = \psi^{(m)} \exp\left(-i\frac{C_1C_2C_3}{C_m}\zeta t\right).$$

В каждый момент времени t функции $\varphi^{(m),(t)}$, $\psi^{(m),(t)}$ подчиняются соотношению

$$(2.1.35)\quad \varphi^{(m),(t)} = \sum_{n=1}^{3} a_{mn}(t=0)\,\psi^{(n),(t)},$$

так как $\varphi^{(m),(t)}$, $\psi^{(m),(t)}$ удовлетворяют одновременно соотношениям (2.1.1a) и (2.1.1b). Затем, воспользовавшись (2.1.22), получим

$$a_{mn}(t) = a_{mn}(0)\exp\left(iC_1C_2C_3\left(\frac{1}{C_m} - \frac{1}{C_n}\right)t\right). \tag{2.1.36}$$

Таким образом, диагональные элементы матрицы рассеяния, так же как и в задаче 2×2, не зависят от времени. Используя формулы следов, так же как в случае 2×2, с этими элементами можно связать бесконечное число сохраняющихся величин. С другой стороны, так же как в разд. 1.6, прямым вычислением можно получить бесконечный набор локальных законов сохранения [193].

Соотношения, выписанные после (2.1.12), приводят к следующим необходимым условиям симметрии:

$$\rho_5(\zeta) = -\gamma_1\gamma_2(\rho_1(\zeta^*))^*, \tag{2.1.37a}$$

$$\rho_6(\zeta) = -\gamma_2\gamma_3(\rho_2(\zeta^*))^*, \tag{2.1.37b}$$

$$\gamma_1\rho_4(\zeta) + \gamma_3(\rho_3(\zeta^*))^* - \gamma_2(\rho_1(\zeta^*))^*\rho_2(\zeta) = 0, \tag{2.1.37c}$$

где $\rho_i(\zeta)$ определены в (2.1.29d). Это в свою очередь дает

$$\begin{aligned} F_3^*(x, y) &= F_3(x, y), \\ F_4^*(x, y) &= F_4(y, x), \\ F_5^*(x, y) &= -\gamma_1\gamma_2\frac{\beta_{12}}{\beta_{23}}F_5(y, x), \\ E_1(x) &= \frac{\gamma_1\gamma_2}{\beta_{12}}F_1^*(x), \\ E_2(x) &= \frac{\gamma_1\gamma_2}{\beta_{23}}F_2^*(x). \end{aligned} \tag{2.1.38}$$

Частное солитонное решение получается в том случае, когда ядро интегрального уравнения является вырожденным. Несмотря на то что уравнения трехволнового взаимодействия являются бездисперсионными и поэтому солитоны в нем не более важны, чем вклад от непрерывного спектра, тем не менее они проливают свет на структуру решения, так как имеют замкнутый и явный вид. Мы рассмотрим случай, в котором a_{11} и a_{33} имеют нули в соответствующих полуплоскостях. Пусть $\bar{\zeta}_1(\zeta_3)$ является простым нулем функции $a_{11}(a_{33})$ в нижней (верхней) полуплоскости, и $C(\bar{C})$ является вычетом $\rho_2(\rho_1)$ в точке $\zeta=\zeta_3(\zeta=\bar{\zeta}_1)$ (вычеты ρ_4 в ζ_3, ρ_3 в $\bar{\zeta}_1$, ρ_5 в $\bar{\zeta}_1^*$, ρ_6 в ζ_3^* определяются по формулам

(2.1.37c)). В этом случае ядра приводятся к виду

$$
\begin{aligned}
F_1(x) &= i\beta_{12}\bar{C}e^{-i\beta_{12}\bar{\zeta}_1 x},\\
F_2(x) &= -i\beta_{23}Ce^{i\beta_{23}\zeta_3 x},\\
F_3(x,\ y) &= -\gamma_1\gamma_2\beta_{12}\frac{\bar{C}\bar{C}^*}{2\eta_1}e^{i\beta_{12}\left(\bar{\zeta}_1^* x-\zeta_1 y\right)},\\
F_4(x,\ y) &= -\gamma_2\gamma_3\beta_{23}\frac{C^*C}{2\eta_3}e^{-i\beta_{23}\left(\zeta_3^* x-\zeta_3 y\right)},\\
F_5(x,\ y) &= i\gamma_2\gamma_3\beta_{12}\frac{C\bar{C}^*}{\bar{\zeta}_1^*-\zeta_3^*}e^{-i\left(\beta_{23}\zeta_3^* x+\beta_{12}\bar{\zeta}_1 y\right)},\\
F_6(x,\ y) &= -i\gamma_1\gamma_2\beta_{23}\frac{C\bar{C}^*}{\zeta_3-\bar{\zeta}_1^*}e^{i\left(\beta_{12}\bar{\zeta}_1^* x+\beta_{23}\zeta_3 y\right)},
\end{aligned}
\tag{2.1.39}
$$

остальные определяются по формулам (2.1.38). Из (2.1.3b) следует, что зависимость C, $\bar{C}$ от времени имеет вид

$$
\begin{aligned}
C &= C_0 e^{-i\beta_{23}\zeta_3 C_1 t},\\
\bar{C} &= \bar{C}_0 e^{i\beta_{12}\bar{\zeta}_1 C_3 t}.
\end{aligned}
\tag{2.1.40a}
$$

Мы будем параметризовать C_0, $\bar{C}_0$ и $\bar{\zeta}_1$, ζ_3 следующим образом:

$$\bar{\zeta}_1=\frac{\xi_1-i\eta_1}{\beta_{12}},\qquad \zeta_3=\frac{\xi_3+i\eta_3}{\beta_{23}},\tag{2.1.40b}$$

$$C_0=\frac{2\eta_3}{\beta_{23}}e^{\eta_3 x_1-i\xi_3\bar{x}_1},\tag{2.1.40c}$$

$$\bar{C}_0=\frac{2\eta_1}{\beta_{12}}e^{\eta_1 x_3+i\xi_1\bar{x}_3}.\tag{2.1.40d}$$

При этом интегральное уравнение (2.1.30) имеет вырожденное ядро, и его решение приводит к [1])

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= \sqrt{\beta_{12}\beta_{13}}\,\frac{2\eta_3}{\mathscr{D}}e^{i\xi_3(x-C_1t-\bar{x}_1)}\Big[e^{\eta_1(x_1-C_3t-x_3)}-\\
&\qquad -\gamma_1\gamma_2\frac{\bar{\zeta}_1-\bar{\zeta}_3}{\bar{\zeta}_1^*-\zeta_3}e^{-\eta_1(x-C_3t-x_3)}\Big],\\
Q_2 &= \frac{-4\eta_1\eta_3\beta_{13}\gamma_2\gamma_3}{\sqrt{\beta_{12}\beta_{23}}\left(\bar{\zeta}_1-\zeta_3^*\right)\mathscr{D}}e^{-i\xi_1(x-C_3t-\bar{x}_3)}e^{-i\xi_3(x-C_1t-\bar{x}_1)},\\
Q_3 &= \sqrt{\beta_{13}\beta_{23}}\,\gamma_1\gamma_2\frac{2\eta_1}{\mathscr{D}}e^{i\xi_1(x-C_3t-\bar{x}_3)}\Big[e^{\eta_3(x-C_1t-x_1)}-\\
&\qquad -\gamma_2\gamma_3\frac{\bar{\zeta}_1^*-\zeta_3^*}{\bar{\zeta}_1^*-\zeta_3}e^{-\eta_3(x-C_1t-x_1)}\Big],
\end{aligned}
$$

---

[1]) Это решение было впервые получено в работе Захарова и Манакова (1973) [1*]. — *Прим. ред.*

где

$$\mathscr{D} = [e^{\eta_1(x-C_3t-x_3)} - \gamma_1\gamma_2 e^{-\eta_1(x-C_3t-x_3)}]\times \\ \times [e^{\eta_3(x-C_1t-x_1)} - \gamma_2\gamma_3 e^{-\eta_3(x-C_1t-x_1)}] + \\ + \gamma_1\gamma_3 \frac{(\bar{\zeta}_1 - \bar{\zeta}_1^*)(\zeta_3 - \zeta_3^*)}{(\bar{\zeta}_1 - \zeta_3^*)(\bar{\zeta}_1^* - \zeta_3)} e^{-\eta_1(x-C_3t-x_3)} e^{-\eta_3(x-C_1t-x_1)}. \tag{2.1.41}$$

При $t \to \infty$ волновые пакеты Q_3 и Q_1 движутся по своим характеристикам $x - C_3t$ и $x - C_1t$ (Q_3 слева от Q_1). При увеличении t пакеты встречаются и порождают волну Q_2. При $t \to \infty$ волна Q_2 распадается и затухает, а Q_1 и Q_3 опять движутся по своим характеристикам (Q_3 справа от Q_1). Амплитуды волны Q_1, Q_3 в этом процессе не меняются. Решение является несингулярным, если одна из γ_i имеет знак, отличный от остальных двух, а в случае $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = -1$ решение является сингулярным в некоторой области пространства-времени (взрывная неустойчивость).

Одно из существенных упрощений, характерных для задачи трехволнового взаимодействия, возникает благодаря отсутствию дисперсии. Если в начальный момент (который мы отнесем к $t \to \infty$) огибающие волновых пакетов пространственно разделены и не имеют сушественных пересечений, то можно обосновать [259], что волновые пакеты будут разделены и при $t \to +\infty$. Когда пакеты пространственно разделены, они движутся каждый со своей характеристической скоростью $Q_i \sim Q_i(x - C_it)$, $i = 1, 2, 3$. Кроме того, решение трехволновой задачи сводится к последовательному решению обратных задач рассеяния 2×2, обсуждавшихся в гл. 1. Все важные результаты можно обосновать, воспользовавшись анализом, проделанным в разд. 1.3. Поскольку $C_3 > C_2 > C_1$, то при $t \to -\infty$ огибающие волновых пакетов расположены в пространстве в следующем порядке: Q_3, Q_2, Q_1. Для того чтобы показать, почему задача рассеяния 3×3 эффективно сводится к задачам 2×2, мы рассмотрим огибающую Q_3. При $t \to -\infty$ в области носителя Q_3 волны Q_1, Q_2 обращаются в нуль. Поэтому задача 3×3 принимает вид (напомним, что $N_{12} \sim Q_3$)

$$\begin{aligned} v_{1x} &= i\zeta d_1 v_1 + N_{12} v_2, \\ v_{2x} &= i\zeta d_2 v_2 + N_{21} v_1, \\ v_{3x} &= i\zeta d_3 v_3. \end{aligned} \tag{2.1.42}$$

Мы видим, что v_3 не изменяется и равно $e^{i\zeta d_3 x}$, поэтому задача эффективно сводится к системе на $v_1 v_2$, которая совпадает с задачей (1.2.7а) при $q = N_{12}$, $r = N_{21}$. Именно благодаря тому факту, что $v_3 = e^{i\zeta d_3 x}$, частичная матрица рассеяния $S^{(3)}$ на по-

тенциале Q_3, связывающая волновые функции по разные стороны от носителя, имеет вид

$$S^{(3)}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(3)} & a_{12}^{(3)} & 0 \\ a_{21}^{(3)} & a_{22}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.1.43}$$

Мы напомним, что в задаче рассеяния 2×2 матрица рассеяния имеет вид

$$S_{2\times 2}=\begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}. \tag{2.1.44}$$

(Здесь с целью проследить аналогию с разд. 1.3 мы будем сопоставлять $\varphi^{(1)}\to\varphi$, $\psi^{(1)}\to\bar{\psi}$, $\varphi^{(2)}\to-\bar{\varphi}$, $\psi^{(2)}\to\psi$ и т. д.) Продолжая это рассуждение, мы получим при $t\to-\infty$, что

$$S=S_0^{(3)}S_0^{(2)}S_0^{(1)}, \tag{2.1.45a}$$

где индекс 0 соответствует $t=-\infty$, и (опуская индексы)

$$S^{(3)}=\begin{bmatrix} a^{(3)} & b^{(3)} & 0 \\ -\bar{b}^{(3)} & \bar{a}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad S^{(2)}=\begin{bmatrix} a^{(2)} & 0 & b^{(2)} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\bar{b}^{(2)} & 0 & \bar{a}^{(2)} \end{bmatrix},$$

$$S_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^{(1)} & b^{(1)} \\ 0 & -\bar{b}^{(1)} & \bar{a}^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Аналогично при $t\to+\infty$ мы получим

$$S=S_f^{(1)}S_f^{(2)}S_f^{(3)}, \tag{2.1.45b}$$

где индекс f обозначает $t\to+\infty$. Приравнивая (2.1.45а) и (2.1.45b) и умножая справа вначале на $\left(S_f^{(3)}\right)^{-1}$, а затем на $\left(S_f^{(2)}\right)^{-1}$, мы выразим значения b_f/a_f в терминах данных рассеяния, вычисленных при $t\to-\infty$:

$$\frac{\bar{b}_f^{(3)}}{\bar{a}_f^{(3)}}=\frac{\bar{a}_0^{(1)}\bar{b}_0^{(3)}-\bar{a}_0^{(3)}\bar{b}_0^{(2)}\bar{b}_0^{(1)}}{\bar{a}_0^{(2)}\bar{a}_0^{(3)}}, \tag{2.1.46a}$$

$$\frac{\bar{b}_f^{(2)}}{\bar{a}_f^{(2)}}=\frac{\bar{a}_f^{(3)}}{\bar{a}_0^{(2)}\bar{a}_0^{(3)}}\left[\bar{a}_0^{(3)}\bar{b}_0^{(2)}a_0^{(1)}-\bar{b}_0^{(1)}\bar{b}_0^{(3)}\right], \tag{2.1.46b}$$

$$\frac{\bar{b}_f^{(1)}}{\bar{a}_f^{(1)}}=\frac{\bar{a}_f^{(2)}}{\bar{a}_0^{(1)}\bar{a}_0^{(2)}}\left[a_f^{(3)}\bar{a}_0^{(2)}\bar{b}_0^{(1)}-\bar{b}_f^{(3)}\bar{b}_0^{(2)}\right]. \tag{2.1.46c}$$

Всю информацию относительно связи решения при $t \to -\infty$ с решением при $t \to +\infty$ можно получить из этих формул. (Отметим, что b связано с $\bar{b}$, $\bar{a}$ с a как следствие симметрии; см. также разд. 1.3, например (1.3.14).)

Например, забавным применением этих идей является доказательство перераспределения солитонов между волновыми пакетами. Здесь мы должны предупредить читателя, что в дальнейшем мы будем вести речь о солитонах, связанных с задачей Захарова — Шабата для операторов 2×2, а не о решениях, порождаемых дискретным спектром задачи 3×3, которые были уже рассмотрены в этом разделе. Будем говорить, что нули функции $\bar{a}(\zeta)$ (или $a(\zeta)$) в комплексной плоскости соответствуют аналогам солитонов в задаче 2×2 (читатель должен также иметь в виду, что данные рассеяния a, $\bar{a}$, b, $\bar{b}$ считаются в дальнейшем целыми функциями). Из (2.1.46а) следует, что $\bar{a}_f^{(3)}$ имеет нули в точках нулей функций $\bar{a}_0^{(2)}$ и $\bar{a}_0^{(3)}$, за исключением тех случаев, когда числитель также обращается в нуль в этих точках. Для начальных условий общего вида таких совпадений не бывает, и мы ими пренебрежем. Таким образом, окончательное число солитонов волны Q_3 равно числу солитонов этой волны до столкновения плюс число солитонов начальной волны Q_2. В конечном состоянии волна Q_2 не содержит солитонов, так как $\bar{a}_f^{(2)}$ не имеет нулей (нули функций $\bar{a}_f^{(3)}$ и $\bar{a}_0^{(2)}\bar{a}_0^{(3)}$ совпадают и сокращаются). Аналогично число солитонов волны Q_1 в конечном состоянии равно числу солитонов начального состояния этой волны плюс число солитонов волны Q_2. (Следует подчеркнуть, что эти результаты приведены в качестве иллюстрации. В принципе можно ответить на любой вопрос, поскольку (2.1.46) содержит всю информацию, необходимую для реконструкции решения при $t \to +\infty$.)

Теперь мы сделаем несколько замечаний относительно случаев взрывной и распадной неустойчивостей. Когда $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = -1$ (взрывная неустойчивость), мы имеем

$$Q_3 \simeq N_{12} = N_{21}^*, \quad Q_2 \simeq N_{31} = -N_{13}^*, \quad Q_1 \simeq N_{23} = N_{32}^*, \qquad (2.1.47а)$$
$$r^{(1)} = +q^{(1)*}, \quad r^{(2)} = -q^{(2)*}, \quad r_3 = +q^{(3)*}.$$

Из результатов разд. 1.3 следует, что только Q_2 может иметь солитоны в начальный момент (поскольку $r^{(2)} = -q^{(2)*}$). Но если поле Q_2 содержало солитоны, то из (2.1.46) следует, что функции $\bar{a}_f^{(3)}$ и $\bar{a}_f^{(1)}$ будут иметь нули в комплексной плоскости. Но если $|Q_f^{(3)}|$ и $|Q_f^{(1)}|$ являются интегрируемыми, то, как следует из результатов разд. 1.3, мы приходим к противоречию, так как в этом случае $r^{(i)} = +q^{(i)*}$ $(i = 1, 3)$. Единственный способ разрешить этот парадокс — отказаться от интегрируемости. На самом

деле хорошо известно, что в случае взрывной неустойчивости за конечное время возникают сингулярности (см. также предыдущее рассмотрение солитонных решений, связанных с полной 3×3 задачей).

В случае распадной неустойчивости возможны два варианта:

(a) $\gamma_1=\gamma_3=-1$, $\gamma_2=+1$. Тогда

$$Q_1\simeq N_{23}=-N^*_{32},\quad Q_2\simeq N_{31}=-N^*_{13},\quad Q_3\simeq N_{12}=-N^*_{21},$$
$$r^{(1)}=-q^{(1)*},\quad r^{(2)}=-q^{(2)*},\quad r^{(3)}=-q^{(3)*} \tag{2.1.47b}$$

Поскольку $r^{(i)}=-q^{(i)*}$, $i=1, 2, 3$, то результаты разд. 1.3 показывают, что всегда существует единственное решение этой задачи (см. также [12]).

(b) $\gamma_1=\gamma_2=+1$, $\gamma_3=-1$. Тогда

$$Q_1\simeq N_{23}=-N^*_{32},\quad Q_2\simeq N_{31}=N^*_{13},\quad Q_3\simeq N_{12}=-N^*_{21},$$
$$r^{(1)}=-q^{(1)*},\quad r^{(2)}=-q^{(2)*},\quad r^{(3)}=q^{(3)*}. \tag{2.1.47c}$$

Таким образом, волновые пакеты Q_2 не содержат солитонов и функция $\bar a^3_f$ не имеет нулей, поэтому нет солитонов поля Q_3 (так же как в случае взрывной неустойчивости). Кроме того, законы сохранения (2.1.13) означают, что мы с необходимостью будем иметь L_2-интегрируемость огибающей, если в начальный момент она была L_2-интегрируемой. (Читателям мы посоветуем обратиться к работам Каупа [259], Захарова и Манакова [535] для более детального знакомства с задачей трехволнового взаимодействия.) Это завершает обсуждение задачи нелинейного взаимодействия трех волн.

2.1.d. Многомерные задачи рассеяния. Теперь мы опишем схему построения многомерных нелинейных эволюционных уравнений, связанных с линейной задачей рассеяния. Эта конструкция естественным образом обобщает одномерный случай, уже описанный в начале этой главы, и тесно связана с работой Абловица и Хабермана [8]. Другой подход, использующий линейное интегральное уравнение в качестве отправной точки, был предложен Захаровым и Шабатом [546]; он обсуждается ниже в этой главе и в разд. 3.6.

Мы начнем с рассмотрения следующей спектральной задачи и ассоциированной с ней временной зависимости:

$$\mathbf{V}_x=i\zeta\mathbf{V}+N\mathbf{V}+B\mathbf{V}_y, \tag{2.1.48}$$

$$\mathbf{V}_t=Q\mathbf{V}+C_1\mathbf{V}_y+C_2\mathbf{V}_{yy}+\ldots+C_m\mathbf{V}_{\underbrace{yy\ldots y}_{m\ \text{раз}}}. \tag{2.1.49}$$

Здесь $\mathbf{V}$ — это $n\times 1$-вектор и N, B, Q, C_i — $n\times n$-матрицы. Мы утверждаем, что только одно нелинейное эволюционное уравнение

отвечает каждому виду временной зависимости $\mathbf{V}_t$. Это противоположно одномерному случаю, в котором целый класс уравнений был связан с одной и той же структурой временной зависимости (т. е. $\mathbf{V}_t = Q\mathbf{V}$). Частные случаи задачи рассеяния (2.1.48) были рассмотрены Захаровым и Манаковым (1979) [537], Нижником (1973) [400] и Каупом (1979) [265], при этом были получены требуемые формулы обратной задачи рассеяния. Нелинейные уравнения, которые мы будем обсуждать, являются (с учетом этих результатов по обратной задаче рассеяния) интегрируемыми (а именно, уравнение трехволнового взаимодействия, уравнение Кадомцева — Петвиашвили и т. д.).

Здесь мы представим эту схему с помощью следующего примера: трехволновое взаимодействие в случае двух пространственных измерений (соответствующие результаты можно получить и для трех пространственных измерений [7]). Как частный случай (2.1.48—49) рассмотрим

(2.1.50) $$\mathbf{V}_x = i\zeta D\mathbf{V} + N\mathbf{V} + B\mathbf{V}_y,$$

(2.1.51) $$\mathbf{V}_t = Q\mathbf{V} + C\mathbf{V}_y.$$

Предположив, что $\zeta_t = 0$ и что B, D, C являются постоянными, получим

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{xt} &= i\zeta D(Q\mathbf{V} + C\mathbf{V}_y) + N_t\mathbf{V} + N(Q\mathbf{V} + C\mathbf{V}_y) + \\ &\quad + B(Q_y\mathbf{V} + Q\mathbf{V}_y + C\mathbf{V}_{yy}),\\ \mathbf{V}_{xt} &= Q_x\mathbf{V} + Q(i\zeta D\mathbf{V} + N\mathbf{V} + B\mathbf{V}_y) + \\ &\quad + C(i\zeta D\mathbf{V}_y + N_y\mathbf{V} + N\mathbf{V}_y + B\mathbf{V}_{yy}).\end{aligned}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}_y$ и $\mathbf{V}_{yy}$, получим

(2.1.52a) $\mathbf{V}_{yy}$: $[C, B] = 0,$

(2.1.52b) $\mathbf{V}_y$: $i\zeta [C, D] + [Q, B] + [C, N] = 0,$

(2.1.52c) $\mathbf{V}$: $i\zeta [QD] + [QN] + Q_x + CN_y - BQ_y = N_t.$

В простейшем случае

$$C = c_i\delta_{ij}, \quad B = b_i\delta_{ij}, \quad D = d_i\delta_{ij}, \quad N_{ii} = 0,$$

причем a_i, b_i, d_i — постоянные. При этом (2.1.52a) дает

$$\sum (C_{ik}B_{kj} - B_{ik}C_{kj}) = 0 = c_ib_i - b_ic_i.$$

Уравнение (2.1.52b) дает

$$i\zeta [C, D] + \sum_k (Q_{ik}B_{kj} - B_{ik}Q_{kj}) + \sum_k (C_{ik}N_{kj} - N_{ik}C_{kj}) = 0,$$

что упрощается до

(2.1.53) $$Q_{ij} = \frac{c_i - c_j}{b_i - b_j} N_{ij}, \quad i \neq j,$$
$$Q_{ii} = q_i, \quad q_i = \mathrm{const},$$

Определим

$$a_{ij}=\frac{c_i-c_j}{b_i-b_j}=a_{ji};$$

тогда $Q_{ij}=a_{ij}N_{ij}$, $i\neq j$, и (2.1.52c) дает

$$i\zeta\sum_k (Q_{ik}D_{kj}-D_{ik}Q_{kj})+\sum_k (Q_{ik}N_{kj}-N_{ik}Q_{kj})+ + Q_{ij,x}+\sum_k (C_{ik}N_{kj,y}-B_{ik}Q_{kj,y})=N_{ij},t.$$

Для $i\neq j$ мы имеем

(2.1.54) $$i\zeta(a_{ij}N_{ij}(d_j-d_i))+(q_i-q_j)N_{ij}+ \sum_{k\neq i,j}(a_{ik}-a_{kj})N_{ik}N_{kj}+a_{ij}N_{ij,x}+c_iN_{ij,y}=N_{ij},t.$$

При $i=j$ уравнения удовлетворяются автоматически. Отметим, что (2.1.54) содержит ζ. Чтобы исключить зависимость от ζ, мы возьмем $q_i=q_i(\zeta)$; точнее, пусть $q_i-q_j=i\zeta a_{ij}(d_i-d_j)$ (это уравнение удовлетворится, если мы возьмем $d_i=b_i$, $q_i=i\zeta c_i$). При таком выборе (2.1.54) сводится к

(2.1.55) $$N_{ij,x}=a_{ij}N_{ij,x}+\beta_{ij,y}N_{ij,y}+\sum_{k\neq i,j}(a_{ik}-a_{kj})N_{ik}N_{kj},$$

где

$$\beta_{ij}=c_i-b_ia_{ij}=\frac{b_ic_j-c_ib_j}{b_i-b_j}$$ (групповая скорость в направлении y),

$$a_{ij}=\frac{c_i-c_j}{b_i-b_j}$$ (групповая скорость в направлении x).

Редукция $N_{ij}=\sigma_{ij}N^*_{ji}$ совместна с уравнениями, если

$$\sigma_{ij}=-\sigma_{ik}\sigma_{kj},\quad i>k>j,$$

и a_{ij}, b_{ij} вещественны. Трехволновое взаимодействие получится, если $n=3$, $N_{12}=U_1$, $N_{13}=U_2$, $N_{23}=U_3$:

(2.1.56) $$\begin{aligned}U_{1t}&=a_{12}U_{1x}+\beta_{12}U_{1y}+\sigma_{32}(a_{13}-a_{23})U_2U_3^*,\\ U_{2t}&=a_{13}U_{2x}+\beta_{13}U_{2y}+(a_{12}-a_{23})U_1U_3,\\ U_{3t}&=a_{23}U_{3x}+\beta_{23}U_{3y}+\sigma_{21}(a_{12}-a_{23})U_1^*U_2.\end{aligned}$$

Если $\sigma_{32}>0$ и $\sigma_{21}>0$, то мы имеем взрывную неустойчивость; иначе неустойчивость будет распадной и будет существовать положительно определенный интеграл энергии.

Таким образом можно вывести много других уравнений. Например, если мы выберем временну́ю зависимость (2.1.49) в виде

(2.1.57) $$\mathbf{V}_t=Q\mathbf{V}+C_1\mathbf{V}_y+C_2\mathbf{V}_{yy}$$

с диагональными матрицами B, C_1, C_2, мы получим

$$N=\begin{pmatrix} 0 & A \\ \sigma_1 A^* & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1=\pm 1,$$

(2.1.58)

$$A_t=D_1A+WA, \quad D_0W=\sigma_1 D_1(|A|^2),$$

где

$$D_1=\frac{1}{(b_1-b_2)^2}\left[(e_1-e_2)\partial_x^2+2(b_1e_2-e_1b_2)\partial_x\partial_y+\right.$$
$$\left.+(e_1b_2^2-b_1^2e_2)\partial_y^2\right],$$
$$D_0=-\partial_x^2+(b_1+b_2)\partial_x\partial_y-b_1b_2\partial_y^2.$$

Взяв

$$b_1=-b_2, \quad e_1=-e_2=-2i, \quad W=-\frac{2(e_1-e_2)}{(b_1-b_2)}|A|^2-2iQ,$$

получим [1])

(2.1.59)

$$iA_t=\left(\frac{1}{b_1^2}A_{xx}+A_{yy}\right)+2QA-\frac{2\sigma_1}{b_1^2}|A|^2A,$$
$$Q_{xx}-b_1^2Q_{yy}=-2\sigma_1(|A|^2)_{yy},$$

или, произведя замену $Q=(2\sigma_1/b_1^2)|A|^2+\Phi_x$,

(2.1.60)

$$iA_t=\frac{1}{b_1^2}A_{xx}+A_{yy}+\frac{2\sigma_1}{b_1^2}|A|^2A+2\Phi_xA,$$
$$\Phi_{xx}-b_1^2\Phi_{yy}=-\frac{2\sigma_1}{b_1^2}(|A|^2)x.$$

Для вещественных b_1^2 эта система уравнений является длинноволновым пределом ($kh\to 0$) уравнения (4.3.27) (см. разд. 4.3), которое описывает эволюцию почти монохроматических слабонеоднородных волновых пакетов малой амплитуды на поверхности воды. (Случай произвольной глубины неинтегрируем при помощи МОЗР [28].) Анкер и Фримен [42] рассмотрели с помощью схемы Захарова — Шабата случай чисто мнимого b_1 и построили N-солитонное решение, представляющее собой плоские волны, распространяющиеся под углом друг к другу. Сатсума и Абловиц [447] показали, как можно вычислить решение типа многомерного локализованного солитона, быстро стремящегося к одной и той же константе во всех направлениях, для этого уравнения (см. разд. 3.4).

Для уравнения Кадомцева — Петвиашвили (это уравнение возникает в теории длинных слабонелинейных волн на поверхно-

[1]) Система (2.1.59) в отечественной литературе обычно называется системой Дэви — Стюартсона — *Прим. ред.*

сти жидкости, распространяющихся вдоль оси x, причем изменение по y является достаточно медленным)

$$\partial_x (U_t + 6 (UU_x) + U_{xxx}) = -3b^2 U_{yy}. \tag{2.1.61}$$

L, A-пару впервые получили Захаров и Шабат (1974) [546] и Дрюма (1974) [141]. Они обнаружили, что уравнение (2.1.61) связано с задачей рассеяния

$$v_{xx} + (\lambda + u) v + b v_y = 0. \tag{2.1.62}$$

Этот результат можно получить при помощи вышеописанной схемы, взяв

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -b & 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -u & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

и произведя соответствующие вычисления. Обратная задача рассеяния для (2.1.62) рассматривалась Захаровым и Манаковым (1979) [537]. Следует подчеркнуть, что приведенная здесь спектральная задача отличается от обычного многомерного уравнения Шрёдингера $\nabla^2 v + (\lambda + u) v = 0$, для которого обратная задача рассеяния очень трудна (см., например, Ньютон (1979) [399]).

2.2. Дискретные задачи. Много интересных физических явлений можно моделировать дискретными нелинейными уравнениями. Примерами являются колебание частиц в одномерных цепочках (Тода [486]), электрические линии на дискретных элементах (Хирота и Судзуки [229, 230], Хирота и Сатсума [226, 227]), коллапс лэнгмюровских волн в физике плазмы (Захаров [526]), разностная аппроксимация дифференциальных уравнений и т. д. Поэтому не вызывает сомнения важность того факта, что МОЗР применим к некоторым типам дискретных эволюционных уравнений.

В этой главе мы начнем изложение с так называемой цепочки Тоды, представляющей собой систему единичных масс, связанных нелинейными пружинками, возвращающая сила которых экспоненциально зависит от растяжения (эту цепочку иногда называют экспоненциальной цепочкой). Уравнения движения

$$Q_{n,tt} = e^{-(Q_n - Q_{n-1})} - e^{-(Q_{n+1} - Q_n)} \tag{2.2.1}$$

могут быть выведены из гамильтониана

$$H = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} P_j^2 + \left(e^{-(Q_n - Q_{n-1})} - 1 \right) \right\}, \tag{2.2.2}$$

где $P_j = Q_{j_t}$ (напомним, что уравнения Гамильтона имеют вид $P_{j_t} = -\partial H/\partial Q_j$, $Q_{j_t} = \partial H/\partial P_j$).

Эта цепочка систематически изучалась в работах Тоды (см., например, Тода [484, 486]); им был построен ряд точных решений как для периодической, так и для бесконечной цепочки. Флашка [155, 156], воспользовавшись теорией обратной задачи рассеяния для разностного оператора Шрёдингера, развитой Кейсом и Кацем [97] и Кэйсом [93], проинтегрировал уравнения (2.2.1) методом обратной задачи. Аналогичные результаты были получены также Манаковым [347]. Вскоре после этого Абловиц и Ладик [17, 18] предложили новую дискретную задачу рассеяния. Эта задача рассеяния является дискретным вариантом 2×2 задачи Захарова — Шабата и служит основой для построения интегрируемых дискретных уравнений (в частности, цепочки Тоды, нелинейной автодуальной решетки (Хирота [214]) и т. д.). Кроме того, эти идеи можно распространить на случай конечно-разностных уравнений (Абловиц, Ладик [17, 18]). В этом разделе мы обсудим задачу рассеяния для разностного оператора Шрёдингера и ее связь с цепочкой Тоды. При этом мы будем следовать работе Флашки [156]. Затем мы продолжим обсуждение эволюционных уравнений, связанных с разностной задачей 2×2 Захарова — Шабата. В конце раздела мы покажем, как решить обратную задачу.

2.2. а. Вывод эволюционных уравнений. Рассмотрим задачу рассеяния для оператора Шрёдингера

$$\psi_{xx} + (\lambda_c + q)\psi = 0 \tag{2.2.3}$$

(λ_c обозначает собственное значение непрерывного спектра — см. [97, 93]). Дискретизацией уравнения (2.2.3) является

$$\frac{\psi_{n+1} + \psi_{n-1} - 2\psi_n}{h^2} + (\lambda_c + q_n)\psi_n = 0, \tag{2.2.4}$$

где $\psi_n = \psi(nh)$ и т. д. Воспользовавшись подстановкой $v_n = g_n\psi_n$, где $g_n = \exp(h^2 q_n/2)$, мы получим

$$\exp\left(-\frac{h^2}{2}(q_{n+1} + q_n)\right)v_{n+1} + \exp\left(-\frac{h^2}{2}(q_n + q_{n-1})\right)v_{n-1} = \lambda v_n, \tag{2.2.5}$$

при этом мы воспользовались тем, что $\exp(h^2 q_n) \sim 1 + h^2 q_n$ и $\lambda = e^{-h^2\lambda_c}$. Определив $a_n = \exp((-h^2/2)(q_{n+1} + q_n))$, получим

$$a_n v_{n+1} + a_{n-1} v_{n-1} = \lambda v_n. \tag{2.2.6}$$

Флашка [155] использовал обобщение

$$a_n v_{n+1} + a_{n-1} v_{n-1} + b_n v_n = \lambda v_n. \tag{2.2.7}$$

Чтобы вывести уравнения цепочки Тоды из (2.2.7), мы будем следовать работе Абловица и Ладика [17]. Рассмотрим уравнение эволюции по времени

$$v_{n,t} = A_n v_{n+1} + B_n v_n. \tag{2.2.8}$$

Вычислив производную по времени от (2.2.7) и воспользовавшись (2.2.7) для исключения v_{n+2} и v_{n-1} (т. е. $v_{n+2}a_{n+1} = \lambda v_{n+1} - b_{n+1}v_{n+1} - a_n v_n$), мы получим два уравнения, приравняв нулю коэффициенты при v_{n+1} и v_n (предполагается, что $\partial\lambda/\partial t = 0$):

$$A_n(b_n - \lambda) + \frac{a_n}{a_{n+1}}(\lambda - b_{n+1})A_{n+1} + a_n(B_{n+1} - B_{n-1}) = \frac{a_{n-1,t}a_n}{a_{n-1}} - a_{n,t}, \tag{2.2.9a}$$

$$-\frac{a_n^2 A_{n+1}}{a_{n+1}} + B_n(b_n - \lambda) + (\lambda - b_n)B_{n-1} + a_{n-1}A_{n-1} = \frac{a_{n-1,t}(b_n - \lambda)}{a_{n-1}} - b_{n,t}. \tag{2.2.9b}$$

Представив A_n и B_n в виде (для примера)

$$A_n = A_n^{(0)}(t) + \lambda A_n^{(1)}(t), \quad B_n = B_n^{(0)}(t) + \lambda B_n^{(1)}(t), \tag{2.2.10}$$

и потребовав зануления коэффициентов при λ^2, λ, λ^0, получим выражения для A_n, B_n и два связанных эволюционных уравнения (например, коэффициент при λ^2 в (2.2.9a) дает $-A_n^{(1)} + a_n A_{n+1}^{(1)}/a_{n+1} = 0$, $A_\infty^{(1)} = \text{const}$), так что $A_n^{(1)} = a_n A_\infty^{(1)}$. Аналогично (2.2.9b) дает $-B_n^{(1)} + B_{n-1}^{(1)} = 0 \Rightarrow B_n^{(1)} = B_\infty^{(2)} = \text{const}$ и т. д. После элементарных алгебраических вычислений мы найдем ($A_\infty^{(i)}$, $B_\infty^{(i)}$, $i = 0, 1$, являются константами)

$$A_n = A_\infty^{(1)}a_n\lambda + A_\infty^0 a_n + A_\infty^{(1)}a_n b_n, \quad B_n = B_\infty^{(1)}\lambda + B_\infty^{(0)} + A_\infty^{(1)}(1 - a_n^2) + \sum_{k=-\infty}^{n} \partial_t \ln a_{k-1}, \tag{2.2.11}$$

и эволюционные уравнения

$$a_{n,t} = \frac{1}{2}A_\infty^0 a_n(b_{n+1} - b_n) + \frac{1}{2}A_\infty^{(1)}a_n \times (a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2 + b_{n+1}^2 - b_n^2),$$

$$b_{n,t} = A_\infty^{(0)}(a_n^2 - a_{n-1}^2) + A_\infty^{(1)}[a_n^2(b_{n+1} + b_n) - a_{n-1}^2(b_n + b_{n-1})]. \tag{2.2.12}$$

Цепочка Тоды возникает, если положить $A_\infty^{(1)}=0$, $A_\infty^{(0)}=2$,

(2.2.13)
$$a_{n,\,t}=a_n(b_{n+1}-b_n),$$
$$b_{n,\,t}=2\left(a_n^2-a_{n-1}^2\right).$$

Эти уравнения связаны с (2.2.1) следующим образом:

(2.2.14)
$$a_n=\frac{1}{2}e^{-(Q_n-Q_{n-1})/2},$$
$$b_n=-\frac{1}{2}Q_{n-1,\,t}.$$

Другую интересную цепочку уравнений можно получить, положив в (2.2.12) $A_\infty^{(0)}=0$, $b_n=0$, $A_\infty^{(1)}=1$:

(2.2.15)
$$a_{n,\,t}=\frac{1}{2}a_n\left(a_{n+1}^2-a_{n-1}^2\right);$$

выбирая $a_n=e^{-u_n/2}$, мы найдем

(2.2.16)
$$u_{n,\,t}=e^{-u_{n-1}}-e^{-u_{n+1}}$$

(Манаков [347], Кац, Ван Мёрбеке [249]). Теперь мы покажем, что оба уравнения, т. е. (2.2.16) и цепочку Тоды (2.2.1), можно связать с уравнением КдФ, переходя определенным образом к непрерывному пределу. В наиболее простом случае уравнения (2.2.16) положим $h\to 0$ и $u_n=h^2\bar{u}_n$. Тогда непрерывный предел дает

(2.2.17)
$$\bar{u}_t\sim 2h\bar{u}_x+\frac{h^3}{3}\bar{u}_{xxx}-2h^3\bar{u}\bar{u}_x.$$

Если определить

$$X=x+2ht,\qquad T=\frac{h^3}{3}t,$$

то $\bar{u}\sim\bar{u}(X,\,T)$ подчиняется уравнению КдФ

$$\bar{u}_T\sim\bar{u}_{XXX}-6\bar{u}\bar{u}_X.$$

В случае цепочки Тоды, положив $Q_n=h\bar{Q}_n$, $\tau=ht$, получим

(2.2.18)
$$\bar{Q}_{\tau\tau}=\bar{Q}_{xx}+h^2\left(\bar{Q}_{xxxx}-\bar{Q}_xQ_{xx}\right)+\dots,$$

и (2.2.18) для $w=Q_x$ сводится к уравнению Буссинеска:

$$w_{\tau\tau}=w_{xx}+h^2\left(w_{xxxx}-\partial_x\left(\frac{1}{2}w^2\right)\right)$$

(см. разд. 2.1). Уравнение КдФ получится, если искать волны, распространяющиеся в одном направлении, т. е. определить

$$Q \sim w(X, T),$$
$$X = x - \tau, \qquad T = \frac{h^2 t}{2},$$
$$u = Q_x.$$

Тогда получим

(2.2.19) $$-u_T = u_{XXX} - uu_X.$$

Перед тем как перейти к обратной задаче рассеяния для разностных операторов, мы рассмотрим дискретизацию задачи рассеяния для оператора Захарова — Шабата. Для начала попросту дискретизируем (1.2.7а), положив

$$(v_i)_x = \frac{v_{i,\,n+1} - v_{i,\,n}}{h}.$$

Таким образом, (1.2.7а) дает

(2.2.20) $$v_{1,\,n+1} = v_{1,\,n}(1 - i\zeta h) + q_n h v_{2,\,n}, \quad v_{2,\,n+1} = v_{2,\,n}(1 + i\zeta h) + r_n h v_{1,\,n},$$

где $v_{i,\,n} = v_i(hn)$, $q_n = q(hn)$, $r_n = r(hn)$. Если q_n и r_n были равны нулю, то естественно было бы определить $z = e^{-i\zeta h}$; при этом непрерывное решение естественно переходит в дискретное: $v_1 = e^{-i\zeta x} = e^{-i\zeta nh} = z^n$ и аналогично $v_2 = z^{-n}$. Поэтому здесь мы возьмем $z = e^{-i\zeta h} \sim 1 - i\zeta h$, $1/z = e^{i\zeta h} \sim 1 + i\zeta h$, и если определим $Q_n = q_n h$, $R_n = r_n h$, то получим

(2.2.21) $$v_{1,\,n+1} = z v_{1,\,n} + Q_n v_{2,\,n}, \quad v_{2,\,n+1} = \frac{1}{z} v_{2,\,n} + R_n v_{1,\,n}.$$

Имеется важное обобщение (2.2.21):

(2.2.22) $$v_{1,\,n+1} = z v_{1,\,n} + Q_n v_{2,\,n} + S_n v_{2,\,n+1}, \quad v_{2,\,n+1} = \frac{1}{z} v_{2,\,n} + R_n v_{1,\,n} + T_n v_{1,\,n+1}.$$

(Отметим, что непрерывный предел (2.2.22) также сводится к (1.2.7а).)

Вначале мы обсудим нелинейные дифференциально-разностные уравнения. Связанную с (2.2.21) или (2.2.22) эволюцию по времени мы представим в виде

(2.2.23) $$\frac{\partial}{\partial t} v_{1,\,n} = A_n v_{1,\,n} + B_n v_{2,\,n}, \quad \frac{\partial}{\partial t} v_{2,\,n} = C_n v_{1,\,n} + D_n v_{2,\,n}.$$

Аналог уравнений (2.2.9) получится, если предположить $\partial z/\partial t = 0$ и

(2.2.24) $$\frac{\partial}{\partial t}(Ev_{i,n}) = E\frac{\partial}{\partial t}(v_{i,n}), \qquad i = 1,\ 2,$$

где E — оператор сдвига $Ev_{i,n} \equiv v_{i,n+1}$. Далее для упрощения изложения мы рассмотрим случай $T_n = S_n = 0$. При этом получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(Ev_{1,n}) = z\frac{\partial}{\partial t}v_{1,n} + Q_{n,t}v_{2,n} + Q_n\frac{\partial}{\partial t}v_{2,n} =$$
$$= z(A_nv_{1,n} + B_nv_{2,n}) + Q_{n,t}v_{2,n} + Q_n(C_nv_{1,n} + D_nv_{2,n})$$

и

$$E\left(\frac{\partial}{\partial t}v_{1,n}\right) = A_{n+1}v_{1,n+1} + B_{n+1}v_{2,n+1} =$$
$$= A_{n+1}(zv_{1,n} + Q_nv_{2,n}) + B_{n+1}\left(\frac{1}{z}v_{2,n} + R_nv_{1,n}\right).$$

Проводя те же операции с $v_{2,n}$ и приравнивая коэффициенты при $v_{i,n}$, мы получим аналог уравнений (1.2.8) (которые получатся в непрерывном пределе):

(2.2.25a) $$z\Delta_nA_n = Q_nC_n - R_nB_{n+1},$$

(2.2.25b) $$\frac{1}{z}B_{n+1} - zB_n = Q_{n,t} - A_{n+1}Q_n + D_nQ_n,$$

(2.2.25c) $$zC_{n+1} - \frac{1}{z}C_n = R_{n,t} - R_n(A_n - D_{n+1}),$$

(2.2.25d) $$\frac{1}{z}\Delta_nD_n = -(Q_nC_{n+1} - R_nB_{n+1}),$$

где $\Delta_nA_n = A_{n+1} - A_n$, и т. д. Теперь мы хотим решить систему (2.2.25) так же, как это было сделано для (1.2.8). Некоторое априорное представление о структуре решения можно получить, изучая закон дисперсии линеаризованного уравнения. В непрерывном случае ключевую роль играла функция $\omega(2\zeta)$, т. е. дисперсионная кривая, отвечающая волновому вектору 2ζ линеаризованной задачи. В дифференциально-разностном случае аналогом этой функции является $\omega(z^2)$, поскольку мы ищем частное решение линеаризованной задачи в виде $Q_n = z^{2n}e^{-i\omega(z^2)t}$. В качестве примера выведем дифференциально-разностное нелинейное уравнение Шрёдингера. Его линеаризация имеет вид $iQ_{n,t} = Q_{n+1} + Q_{n-1} - 2Q_n$ (очевидная дискретизация уравнения $iq_t = q_{xx}$), при этом $\omega(z^2) = z^2 + 1/z^2 - 2$. Как и в непрерывном случае, оказывается, что величина $(A-D)_\infty = \lim\limits_{|n|\to\infty}(A_n - D_n)$ определяет зависимость данных рассеяния от времени. Эта величина пропорциональна $\omega(z^2)$. Это (или же тщательное рассмо-

трение (2.2.25)) подсказывает вид представления

$$A_n = z^2 A_n^{(2)} + A_n^{(0)},$$

(2.2.26)
$$B_n = z B_n^{(1)} + \frac{1}{z} B_n^{(-1)},$$

$$C_n = z C_n^{(1)} + \frac{1}{z} C_n^{(-1)},$$

$$D_n = D_n^{(0)} + \frac{1}{z^2} D_n^{(-2)}.$$

Отметим, что A и D зависят только от четных степеней z. Симметрия уравнений (2.2.25) позволяет заключить, что B и C следует разлагать по нечетным степеням.

Подстановка (2.2.26) в (2.2.25) и приравнивание коэффициентов при различных степенях z приводит к системе уравнений для $A_n^{(2)}$, $A_n^{(0)}$, ..., $D_n^{(0)}$, $D_n^{(-2)}$. Ниже приведен результат элементарных алгебраических вычислений:

(a) Z^3: $\Delta_n A_n^{(2)} = 0 \Rightarrow A_n^{(2)} = A_-^{(2)} = \text{const}.$

(b) Z^{-3}: $\Delta_n D_n^{(-2)} = 0 \Rightarrow D_n^{(-2)} = D_-^{(-2)} = \text{const}.$

(b) Z^2: $-B_n^{(1)} = A_-^{(2)} Q_n \Rightarrow B_n^{(1)} = A_-^{(2)} Q_n.$

(c) Z^2: $C_{n+1}^{(1)} = A_-^{(2)} R_n \Rightarrow C_n^{(1)} = A_-^{(2)} R_{n-1}.$

(b) Z^{-2}: $B_{n+1}^{(-1)} = D_-^{(-2)} Q_n \Rightarrow B_n^{(-1)} = D_-^{(-2)} Q_{n-1}.$

(c) Z^{-2}: $-C_n^{(-1)} = -D_-^{(-2)} R_n \Rightarrow C_n^{(-1)} = D_-^{(-2)} R_n.$

(a) Z: $\Delta_n A_n^{(0)} = A_-^{(2)} (Q_n R_{n-1} - Q_{n+1} R_n) \Rightarrow$
$\Rightarrow A_n^{(0)} = -A_-^{(2)} Q_n R_{n-1} + A_-^{(0)}.$

(d) Z^{-1}: $\Delta_n D_n^{(0)} = -D_-^{(-1)} (Q_n R_{n+1} - R_n Q_{n-1}) \Rightarrow$
$\Rightarrow D_n^{(0)} = -D_-^{(-2)} R_n Q_{n-1} + D_-^{(0)}.$

(a) Z^{-1}: $Q_n C_n^{(-1)} - R_n B_{n+1}^{(-1)} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow Q_n (D_-^{(-2)} R_n) - R_n (D_-^{-2} Q_n) = 0$ (выполнено).

(d) Z: $Q_n C_{n+1}^{(1)} - R_n B_n^{(1)} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow Q_n (A_-^{(2)} R_n) - R_n (A_-^{(2)} Q_n) = 0$ (выполнено).

(b) Z^0: $Q_{n,\,t} = A_-^{(2)} (Q_{n+1} - Q_{n+1} Q_n R_n) + A_-^{(0)} Q_n -$
$- D_-^{(-2)} (Q_{n-1} - Q_{n-1} Q_n R_n) - D_-^{(0)} Q_n.$

(d) Z^0: $R_{n,\,t} = D_-^{(-2)} (R_{n+1} - R_{n+1} R_n Q_n) + D_-^0 R_n -$
$- A_-^{(2)} (R_{n-1} - R_{n-1} R_n Q_n) - A_-^{(0)} R_n.$

Здесь буквы (a) — (d) обозначают соответствующее уравнение (2.2.25). Последние два соотношения дают эволюционные уравнения

(2.2.27a) $$Q_{n,t} = (1 - Q_n R_n)(Q_{n+1} A_\infty^{(2)} - Q_{n-1} D_\infty^{-2}) + (A_\infty^{(0)} - D_\infty^{(0)}) Q_n,$$

(2.2.27b) $$R_{n,t} = (1 - Q_n R_n)(R_{n+1} D_\infty^{(-2)} - R_{n-1} A_\infty^{(2)}) + (D_\infty^{(0)} - A_\infty^{(0)}) R_n.$$

Эти уравнения совместны с $R_n = \pm Q_n^*$, если $D_\infty^{(-2)} = A_\infty^{(2)*}$ и $(A_\infty^{(0)} - D_\infty^{(0)}) = -(A_\infty^{(0)} - D_\infty^{(0)})^*$. Если взять $A_\infty^{(0)} = -i/h^2$, $A_\infty^{(0)} - D_\infty^{(0)} = 2i/h^2$, то получим

(2.2.28a) $$Q_{n,t} = \left(-\frac{i}{h^2}\right)(Q_{n+1} + Q_{n-1} - 2Q_n) \pm \pm Q_n Q_n^* (Q_{n+1} + Q_{n-1}) \left(-\frac{i}{h^2}\right),$$

или если $Q_n = hq_n$, то

(2.2.28b) $$iq_{n,t} = \frac{q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n}{h^2} \pm q_n q_n^* (q_{n+1} + q_{n-1}).$$

Это уравнение мы будем называть дифференциально-разностным уравнением Шрёдингера.

Следует отметить, что подстановка (2.2.2b) в (2.2.25) дает 12 уравнений для 8 неизвестных. Два уравнения удовлетворяются тождественно, два других являются эволюционными уравнениями. Это непохоже на непрерывную теорию, в которой было 10 уравнений для 8 неизвестных. Собирая все вместе, получим

$$A_n = \left(\frac{i}{h^2}\right)(1 - z^2 \mp Q_n Q_{n-1}^*), \quad B_n = \left(\frac{i}{h^2}\right)(-Q_n z + Q_{n-1}/z),$$
$$C_n = \left(\frac{\pm i}{h^2}\right)(Q_{n-1}^* z - Q_n^*/z), \quad D_n = \left(\frac{-i}{h^2}\right)(1 - 1/z^2 \mp Q_{n-1} Q_n^*).$$

Отметим, что при $|n| \to \infty$

$$\lim_{|n| \to \infty} (A_n - D_n) = \left(\frac{i}{h^2}\right)\left(2 - z^2 - \frac{1}{z^2}\right).$$

Линейная часть (2.2.28b) имеет вид $iq_{n,t} = (q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n)/h^2$. Закон дисперсии можно найти, представив $q_n \sim z^{2n} \exp(-i\omega t)$, тогда $\omega = (z^2 + z^{-2} - 2)/h^2$. Таким образом, A_n и D_n удовлетворяют соотношению

(2.2.29) $$\lim_{|n| \to \infty} (A_n - D_n) = -i\omega(z^2).$$

Приведем некоторые интересные нелинейные дифференциально-разностные уравнения, связанные с (2.2.25).

(1) *Дискретное уравнение мКдФ*. В (2.2.27) возьмем $A_{-}^{(0)} = D_{-}^{(0)} = 0$, $A_{-}^{(2)} = D_{-}^{(-2)} = 1$, $Q_n = hq_n$, q_n вещественно $(R_n = \pm Q_n)$:

(2.2.30) $$q_{n,t} = (1 \pm h^2 q_n^2)(q_{n+1} - q_{n-1}).$$

Уравнение (2.2.30) переходит в мКдФ точно так же, как уравнение (2.2.16) переходит в КдФ. Используя (2.2.22) и подходящую зависимость от времени, можно получить другие интересные нелинейные дифференциально-разностные уравнения (вычисления в этом случае весьма громоздки, см. [17]).

(2) *Автодуальная решетка*:

$$R_n = \pm Q_n = I_n, \quad T_n = \pm S_n = -V_n,$$

(2.2.31) $$I_{n,t} = (1 \pm I_n^2)(V_{n-1} - V_n),$$

$$V_{n,t} = (1 \pm V_m^2)(I_n - I_{n+1}).$$

(3) *Цепочка Тоды* (2.1.1):

$$R_n = 0, \quad T_n = 1, \quad Q_n = u_{n,t}, \quad S_n = 1 - e^{-(u_{n+1} - u_n)},$$

$$u_{n,tt} = e^{-(u_n - u_{n-1})} - e^{-(u_{n+1} - u_n)}.$$

Эти уравнения получаются из разложений

$$A_n = A_n^{(1)} z + A_n^{(0)}, \quad B_n = B_n^{(0)} + B_n^{(-1)}/z,$$

$$C_n = C_n^{(1)} z + C_n^{(0)}, \quad D_n = D_n^{(0)} + D_n^{(-1)}/z$$

и т. д., подставленных в аналог (2.2.25), содержащий S_n, T_n. Отметим, что задача рассеяния (2.2.7) может быть получена из (2.2.22), если положить $R_n = 0$, $T_n = 1$, $Q_n = -\beta_n$, $S_n = 1 - \alpha_n$ и $\lambda = z + 1/z$.

(4) *Разностное уравнение КдФ* (2.2.16). Положив $R_n = 0$, $T_n = 1$, $Q_n = 0$, $S_n = 1 - e^{-u_n}$, найдем

$$u_{n,t} = e^{-u_{n-1}} - e^{-u_{n+1}}.$$

Эти уравнения были получены при помощи конечных разложений так же, как в разд. 1.2. Для некоторых из них в работе [109] были найдены эволюционный оператор и формулы, аналогичные полученным в разд. 1.5.

Отметим, что таким же образом можно рассматривать конечно-разностные уравнения, в которых время также является дискретной переменной. Рассмотрим, например, соотношения (2.2.21), в которых будем считать, что время дискретно: $t = m\Delta t$ (так что $v_{in}(t)$ заменим на $v_{in}^m = v_i(n\Delta x, m\Delta t)$, $Q_n(t) \to Q_n^m = Q_n(n\Delta x, m\Delta t)$ и т. д.).

Кроме этого, эволюцию в дискретном времени зададим соотношениями

(2.2.32)
$$\Delta^m v_{1,n}^m = A_n^m v_{1,n}^m + B_n^m v_{2,n}^m,$$
$$\Delta^m v_{2,n}^m = C_n^m v_{1,n}^m + D_n^m v_{2,n}^m.$$

Здесь $\Delta^m v_{i,n}^m = v_{i,n}^{m+1} - v_{i,n}^m$, $i = 1, 2$. Полагая $\Delta^m z = 0$ и приравнивая
$$\Delta^m \left(E_n v_{i,n}^m\right) = E_n \left(\Delta^m v_{i,n}^m\right)$$
(так же, как в (2.2.24), (2.2.25)), получим конечно-разностный вариант уравнений (1.2.8):

(2.2.33)
$$z\,\Delta_n A_n = Q_n^{m+1} C_n - R_n^m B_{n+1},$$
$$\frac{1}{z} B_{n+1} - z B_n = \Delta^m Q_n^m - \left(A_{n+1} Q_n^m - D_n Q_n^{m+1}\right),$$
$$z C_{n+1} - \frac{1}{z} C_n = \Delta^m R_n^m + \left(A_n R_n^{m+1} - D_{n+1} R_n^m\right),$$
$$\frac{1}{z}\,\Delta_n D_n = R_n^{m+1} B_n - Q_n^m C_{n+1},$$

где $A_n = A_n^m$ и т. д.

Дальнейшее разложение определяется дисперсионным соотношением. Метод обратной задачи [19] приводит к следующему результату:

(2.2.34)
$$\omega(z^2) = \lim_{|n| \to \infty} \frac{1 + A_n}{1 + D_n},$$

где $\omega(z^2)$ является «переходной характеристикой» или законом дисперсии линеаризованной задачи (см. также разд. П.1). Например, наиболее общее линейное шеститочечное конечно-разностное уравнение (с постоянными коэффициентами) имеет вид

(2.2.35)
$$\Delta^m Q_n^m = \left(\alpha_2 Q_{n+1}^m + \alpha_0 Q_n^m + \alpha_{-2} Q_{n-1}^m\right) -$$
$$- \left(\beta_2 Q_{n+1}^{m+1} + \beta_0 Q_m^{m+1} + \beta_{-2} Q_{n-1}^{m+1}\right).$$

Закон дисперсии, соответствующий этой задаче, получится, если искать решение в виде $Q_n^m = z^{2n} \omega^m (z^2)$; тогда

(2.2.36)
$$\omega(z^2) = \frac{1 + \alpha_2 z^2 + \alpha_0 + \alpha_{-2} z^{-2}}{1 + \beta_2 z^2 + \beta_0 + \beta_{-2} z^{-2}}.$$

Эта разностная схема является чисто «дисперсионной», или безразлично устойчивой, если $|\omega| = 1$. Это требование следует из метода обратной задачи. Достаточными условиями являются следующие равенства: $\beta_2 = \alpha_{-2}^*$, $\beta_0 = \alpha_0^*$, $\beta_{-2} = \alpha_2^*$. Таким образом,

(2.2.36) означает, что A_n в (2.2.33) имеет представления $A_n = A_n^{(2)}z^2 + A_n^{(0)} + A_n^{(-2)}z^{-2}$.

Например, одно из интересных конечно-разностных уравнений имеет вид

$$(2.2.37)\qquad i\,\frac{\Delta^m q_n^m}{\Delta t} = \frac{1}{2\,\Delta x^2}\left[\left(q_{n+1}^m - 2q_n^m + q_{n-1}^m \prod_{-\infty}^{n-1} \Lambda_k^m\right) + \left(q_{n-1}^{m+1} - 2q_n^{m+1} + q_{n+1}^{m+1} \prod_{-\infty}^{n} \Lambda_k^m\right)\right] \pm \frac{1}{4}\left[q_n^m\left(q_n^{m*}q_{n+1}^m + q_n^{m+1*}q_{n+1}^{m+1}\right) + q_n^{m+1}\left(q_{n-1}^m q_n^{m*} + q_{n-1}^{m+1}q_n^{m+1*}\right) + 2q_{n+1}^{m+1}q_n^{m*}q_n^m \prod_{-\infty}^{n} \Lambda_k^m + 2q_{n-1}^m q_n^{m+1*}q_n^{m+1} \prod_{-\infty}^{n-1} \Lambda_k^m\right] - q_n^m \sum_{-\infty}^{n} \Delta^m S_k^m - q_n^{m+1} \sum_{-\infty}^{n-1} \Delta^m S_k^{m*},$$

где

$$\Lambda_k^m = \frac{1 \pm \Delta x^2 q_k^{m+1*} q_k^{m+1}}{1 \pm \Delta x^2 q_k^{m*} q_k^m},$$

$$S_k^m = \Delta_x^2 q\left(q_{k+1}^m q_k^{m*} + q_k^m q_{k-1}^{m*}\right).$$

Отметим, что (2.2.37) представляет собой один из вариантов схемы Кранака — Никольсона. Ошибка аппроксимации имеет порядок $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$, и в линейном пределе эта схема переходит в стандартную схему Кранака — Никольсона. Следует также отметить, что:

(i) На конечном интервале $[-p, p]$ вместо $-\infty$ в суммах и произведениях следует писать $-p$.

(ii) Линеаризованная схема является чисто дисперсионной и безразлично устойчивой: $|\omega| = 1$.

(iii) Для любой линейной конечно-разностной схемы (2.2.35) мы можем найти нелинейную конечно-разностную схему, выбрав в (2.2.33) разложение для $A_n^m, \ldots, D_n^m$ соответствующим образом.

(iv) Полная конечно-разностная схема для нелинейного уравнения Шрёдингера сохраняет «$x - t$ симметрии», т. е.

в непрерывном случае $x \to -x,\ t \to -t,\ i \to -i$,

в конечно-разностном случае $n \to -n,\ m \to -m,\ i \to -i$.

(v) Точности аппроксимации дифференциального уравнения конечно-разностной схемой в линейном и нелинейном случаях совпадают.

(vi) Схемы являются *нелокальными*, т. е. зависят от всей сетки точек. С той же точностью аппроксимации и сохранением

симметрии эта схема может быть сделана локальной (для этого достаточно взять $\prod \Lambda_k^m = 1$, $\sum \Delta^m S_k^m = 0$). Хотя уравнение (2.2.37) является нелокальным, его можно переписать в виде локальной системы конечно-разностных уравнений.

(vii) Решение можно найти методом обратной задачи (см. ниже), и можно показать сходимость схемы к дифференциальному уравнению при Δx, $\Delta t \to 0$. Солитонные решения вычисляются явно.

Недавние численные эксперименты (Таха и Абловиц [470]) показали, что такие схемы являются весьма хорошими с практической точки зрения. Анализ, приведенный здесь, может быть распространен на другие интегрируемые эволюционные уравнения.

2.2. b. Теория рассеяния. Теперь опишем обратную задачу рассеяния, связанную с разностным 2×2-оператором Захарова — Шабата. Здесь имеется довольно близкая аналогия с непрерывным случаем, рассмотренным в разд. 1.3. В конце этого раздела мы перечислим результаты, относящиеся к задаче рассеяния для разностного оператора Шрёдингера, и их приложения к цепочке Тоды.

Мы будем изучать обратную задачу рассеяния, связанную с (2.2.22). Затем соответствующие результаты для (2.2.21) будут получены как частный случай при $S_n = T_n = 0$. Более подробное изложение можно найти в [17] и [18]. Функции Йоста определяются следующим образом:

$$\text{(2.2.38)}\qquad n \to -\infty: \quad \begin{matrix} \varphi_n \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} z^n, \\ \bar{\varphi} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} z^n, \end{matrix} \qquad n \to \infty: \quad \begin{matrix} \psi_n \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} z^{-n}, \\ \bar{\psi}_n \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} z^n. \end{matrix}$$

Так же как в разд. 1.3, можно показать, что для достаточно быстро убывающих при $|n| \to \infty$ потенциалов Q_n, R_n, S_n, T_n функции

$$\begin{matrix} \varphi_n z^{-n}, & \psi_n z^n & \text{аналитичны при} & |z| > 1, \\ \bar{\varphi}_n z^n, & \bar{\psi} z^{-n} & \text{аналитичны при} & |z| < 1 \end{matrix}$$

(т. е. вне и внутри единичного круга). Это легче всего показать, когда потенциалы имеют компактный носитель. В этом случае можно по индукции установить, что функции, аналитичные при $|z| > 1$, являются полиномами по $1/z$, а функции, аналитичные при $|z| < \infty$, — полиномами по z. Вронскиан задается соотно-

шением

$$W_n(\psi, \bar\psi) = \prod_{i=n}^{\infty} \frac{1 - S_i T_i}{1 - R_i Q_i} = \psi_{1n}\bar\psi_{2n} - \psi_{2n}\bar\psi_{1n}.$$

Если $T_i = -S_i^*$, $R_i = -Q_i^*$, то функция W_n положительно определена. В остальных случаях мы будем предполагать, что S_i, T_i, R_i и Q_i меньше единицы. Линейная зависимость ψ_n, $\bar\psi_n$ приводит к

(2.2.39a) $$\varphi_n = a\bar\psi_n + b\psi_n,$$

(2.2.39b) $$\bar\varphi_n = -\bar a\psi_n + \bar b\bar\psi_n,$$

а соотношение Вронского дает

(2.2.39c) $$a\bar a + b\bar b = \prod_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1 - R_i Q_i}{1 - S_i T_i}\right),$$

где a, $\bar a$, b, $\bar b$ зависят от времени как от параметра. Мы покажем, что $a\bar a + b\bar b$ не зависит от времени. Поэтому если $\prod_{-\infty}^{\infty}((1 - R_i Q_i)/(1 - S_i T_i))$ является ненулевой конечной величиной в начальный момент времени, то и вронскиан W_n является конечным и ненулевым. Разложениями (2.2.39a) мы будем пользоваться при $|z| = 1$. Разделим (2.2.39a) на a (предполагая $a(z) \neq 0$ при $|z| = 1$):

(2.2.39d) $$\frac{\varphi_n}{a} = \bar\psi_n + \frac{b}{a}\psi_n,$$

и предположим существование следующих представлений (имеющих необходимые свойства аналитичности):

(2.2.40a) $$\psi_n = \sum_{n'=n}^{\infty} K(n, n') z^{-n'},$$

(2.2.40b) $$\bar\psi_n = \sum_{n'=n}^{\infty} \bar K(n, n') z^{n'};$$

по аналогии с (1.3.17)

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x} + \int_x^{\infty} K(x, s)\, e^{i\zeta s}\, ds.$$

Подставив ψ_n, $\bar\psi_n$ в (2.2.39c) и подействовав на (2.2.39c) оператором $1/2\pi i \oint dz z^{-m-1}$ (контуром служит единичная окруж-

ность), получим

$$(2.2.41)\quad I=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\varphi_n}{a}z^{-m-1}dz=\sum_{n'=n}^{\infty}\bar{K}_n(n,\,n')\frac{1}{2\pi i}\oint z^{n'-m-1}dz+$$

$$+\sum_{n'=n}^{\infty}\bar{K}(n,\,n')\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{b}{a}(z)\,z^{-(m+n')-1}dz.$$

Заметив, что

$$\frac{1}{2\pi i}\oint z^{n'-m-1}dz=\delta(n',\,m)$$

($\delta(n,\,m)=1$ при $n=m$ и 0 в остальных случаях; $\delta(n,\,m)$ — это дельта-символ Кронекера) и определяя

$$(2.2.42)\qquad F_c(m+n')\equiv\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{b}{a}(z)\,z^{-(m+n')-1}dz,$$

получим

$$(2.2.43)\qquad I=\bar{K}(n,\,m)+\sum_{n'=n}^{\infty}K(n,\,n')\,F_c(m+n').$$

Теперь вычислим левую часть этого уравнения:

$$(2.2.44)\qquad I=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\varphi_n}{a}z^{-m-1}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\varphi_n z^{-n}}{a}z^{n-m-1}dz.$$

Функции $\varphi_n z^{-n}$ и $a(z)$ являются аналитическими в области $|z|>1$, поэтому единственные сингулярности — это точки, в которых $a(z_j)=0$. Таким образом, при $z\to\infty$ $\varphi_n z^{-n}/a\to J_{\infty,\,n}$. (Мы могли бы вычислять $J_{\infty,\,n}$ переходом к пределу $z\to\infty$ в (2.2.22), но для дальнейшего эта формула не потребуется.) Предположив, что a имеет N простых нулей z_k, в которых $\varphi_k=\tilde{c}_k\psi_k$, получим

$$(2.2.45)\qquad I=-\sum_{j=1}^{N}\frac{\varphi_n(z_j)}{a'(z_j)}z_j^{-m-1}+J_{\infty,\,n}\delta(n,\,m)=$$

$$=-\sum_{j=1}^{N}\frac{\tilde{c}_j}{a'(z_j)}\sum_{n'=n}^{\infty}K(n,\,n')\,z_j^{-(n'+m)-1}+J_{\infty,\,n}\delta(n,\,m).$$

Определив $F_D(m+n')\equiv\sum^N\tilde{c}_j z_j^{-(n'+m)-1}$, $c_j=\tilde{c}_j/a'_j$, и воспользовавшись (2.2.44), (2.2.45), получим

$$(2.2.46\text{a})\qquad \bar{K}(n,\,m)+\sum_{n'=n}^{\infty}K(n,\,n')\,F(m+n')=J_{\infty,\,n}\delta(n,\,m),$$

где

$$(2.2.46b)\qquad F(m+n') = F_c(m+n') + F_D(m+n') = \\ = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{b}{a} z^{-(n'+m)-1}\,dz + \sum_{j=1}^{N} \tilde{c}_j z_j^{-(n'+m)-1}.$$

Если мы проделаем то же самое с (2.2.39b), то получим

$$(2.2.47a)\qquad K(n, m) - \sum_{n'=n}^{\infty} \bar{K}(n, n')\,\bar{F}(m+n') = -J_{0,n}\delta(n, m),$$

$$(2.2.47b)\qquad \bar{F}(m+n') = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\bar{b}}{\bar{a}} z^{n'+m-1}\,dz - \sum_{j=1}^{N} \bar{c}_j \bar{z}_j^{n'+m-1},$$

где

$$\bar{J}_{0,n} = \lim_{z\to 0} z^n \frac{\bar{\varphi}_n}{\bar{a}}$$

(как и раньше, $J_{0,n}$ можно вычислить, но в этом нет необходимости). Соотношения (2.2.46) и (2.2.47) нам нужны только при $m > n$. Определим

$$K(n, m) = \prod_n^{\infty} \frac{1}{1 - R_i Q_i}\,\varkappa(n, m),$$

$$\bar{K}(n, m) = \prod_n^{\infty} \frac{1}{1 - R_i Q_i}\,\varkappa(n, m),$$

$$\varkappa(n, n) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \bar{\varkappa}(n, n) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При этом (2.2.46), (2.2.47) дают для $m > n$

$$(2.2.48a)\qquad \bar{\varkappa}(n, m) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} F(m+n) + \sum_{n+1}^{\infty} \varkappa(n, n')\,F(n'+m) = 0,$$

$$(2.2.48b)\qquad \varkappa(n, m) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bar{F}(m+n) - \sum_{n+1}^{\infty} \bar{\varkappa}(n, n')\,\bar{F}(n'+m) = 0.$$

Эти уравнения являются дискретным аналогом (см. (1.3.24, 25)) интегрального уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко.

Мы свяжем $K(n, m)$, $\bar{K}(n, m)$ с потенциалами, подставив $\psi_n = \sum_n^{\infty} K(n, m')\,z^{-n'}$ и т. д. в задачу рассеяния (2.2.22). Для

$K(n, m)$, $\bar{K}(n, m)$ получим конечно-разностные уравнения, и

$$Q_n = \varkappa_1(n, n+1),$$
$$R_n = -\bar{\varkappa}_2(n, n+1),$$
$$S_n = -\frac{1}{1-Q_nR_n}[\varkappa_1(n, n+2) + Q_n\varkappa_2(n, n+1)], \tag{2.2.49}$$
$$T_n = -\frac{1}{1-Q_nR_n}[\bar{\varkappa}_2(n, n+2) + R_n\bar{\varkappa}_1(n, n+1)].$$

В случае $R_n = \mp Q_n^*$ и $T_n = \mp S_n^*$ можно установить следующие свойства симметрии:

$$\bar{b} = \pm b^*, \quad \bar{a} = a^*, \quad \bar{z}_j = \frac{1}{z_j^*},$$
$$\bar{c}_j = \pm \frac{c_j^*}{z_j^{*2}}, \quad \bar{F}(n) = \pm F^*(n),$$
$$\bar{\varkappa}(n, m) = \begin{pmatrix} \varkappa_2^*(n, m) \\ \mp \varkappa_1^*(n, m) \end{pmatrix}.$$

При этом уравнение (2.2.48) дает

$$\varkappa_1(n, m) - \bar{F}(n+m) \pm \pm \sum_{n'=n+1}^{\infty} \sum_{n''=n+1}^{\infty} \varkappa_1(n, n')\bar{F}^*(n''+n') \cdot \bar{F}(n'+m) = 0, \tag{2.2.50a}$$
$$\bar{F}(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\bar{b}}{\bar{a}}(z) z^{n-1} - \sum_{j=1}^{N} \bar{c}_j \bar{z}_j^{n-1}, \tag{2.2.50b}$$
$$\varkappa_2(n, m) \pm \sum_{n'=n+1}^{\infty} \varkappa_1^*(n, n')\bar{F}(n'+m) = 0, \tag{2.2.50c}$$
$$Q_n = \varkappa_1(n, n+1), \tag{2.2.50d}$$
$$S_n = -\frac{1}{1 \pm Q_nQ_n^*}[\varkappa_1(n, n+2) + Q_n\varkappa_2(n, n+1)]. \tag{2.2.50e}$$

Рассмотрим теперь $S_n = T_n = 0$ как частный случай. Если $S_n' = T_n = 0$, то можно показать, что $a(z)$, $\bar{a}(z)$ являются четными функциями от z, а $b(z)$, $\bar{b}(z)$ — нечетными. При этом собственные значения встречаются парами, и $c_j(z_+) = c_j(z_-)$. Эти

свойства показывают, что

$$(2.2.51a)\qquad \bar F(n+m)=\begin{cases} 2\bar F_R(n+m), & m=n+2p-1,\\ 0, & m=n+2p,\end{cases}\qquad p\geqslant 1,$$

$$(2.2.51b)\qquad \bar F_R(n)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R}\frac{\bar b}{\bar a}z^{n-1}\,dz-\sum_{1}^{N/2}\bar c_j\bar z_j^{n-1},$$

где контур C_R проходит по правой половине единичной окружности. Мы возьмем

$$(2.2.51c)\qquad \varkappa_1(n,m)=\begin{cases} \varkappa_{1R}(n,m), & m=n+2p-1,\\ 0, & m=n+2p,\end{cases}\qquad p\geqslant 1,$$

и для $m=n+2p-1$ получим из (2.2.50), (2.2.51)

$$(2.2.52)\qquad \varkappa_{1R}(n,m)-2\bar F_R(n+m)\pm$$
$$\pm 4\sum_{n''=n+1}^{\infty}\sum_{n'=n+1}^{\infty}\varkappa_{1R}(n,n'')\bar F_R^*(n''+n')\bar F_R(n'+m)=0,$$

где

$$n''=n+2p''-1,\qquad n'=n+2p',$$
$$p''=1,2,\ldots,\qquad p'=1,2,\ldots .$$

Ядро $\varkappa_2(n,m)$ в этом случае также обладает свойствами симметрии:

$$(2.2.53)\qquad \varkappa_2(n,m)=\begin{cases} \varkappa_{2R}(n,m), & m=n+2p,\\ 0, & m=n+2p-1.\end{cases}$$

При $m=n+2p$, $p=1, 2, \ldots$ из (2.2.50), (2.2.51) получим

$$(2.2.54)\qquad \varkappa_{2R}(n,m)\pm 2\sum_{n'=n+1}^{\infty}\varkappa_{1R}^*(n,n')\bar F_R(n'+m)=0,$$

где

$$n'=n+2p'-1,\qquad p'=1,2,\ldots .$$

Имеется следующая связь с потенциалами:

$$(2.2.55a)\qquad Q_n=-\varkappa_{1R}(n,n+1),$$

$$(2.2.55b)\qquad S_n=0.$$

Одна и та же обратная (пространственная) задача рассеяния связана с дифференциально-разностными и конечно-разностными уравнениями. Единственное различие состоит в анализе зависимости данных рассеяния *от времени*.

(1) *Дифференциально-разностный случай.* Уравнение (2.2.23) задает эволюцию по времени. Предположим, что при $n\to\pm\infty$

$A_n \to A_\pm$, $D_n \to D_\pm$, B_n, $C_n \to 0$. Собственные функции, удовлетворяющие одновременно (2.2.22) и (2.2.23), имеют вид

$$\begin{aligned} &\varphi_n^{(t)} = \varphi_n e^{A_- t}, \quad \psi_n^{(t)} = \psi_n e^{D_+ t}, \\ &\bar\varphi_n^{(t)} = \bar\varphi_n e^{D_- t}, \quad \bar\psi_n^{(t)} = \bar\psi_n e^{A_+ t}. \end{aligned} \tag{2.2.56}$$

Действуя так же, как в разд. 1.4 (непрерывный случай), получим

$$\begin{aligned} &a = a_0 e^{(A_+ - A_-)\, t}, \quad b = b_0 e^{(D_+ - A_-)\, t}, \\ &\bar a = \bar a_0 e^{(D_+ - D_-)\, t}, \quad \bar b = \bar b_0 e^{(A_+ - D_-)\, t}, \end{aligned} \tag{2.2.57a}$$

поэтому

$$\begin{aligned} &\frac{b}{a}(t) = \left(\frac{b}{a}\right)_0 e^{(D_+ - A_+)\, t}, \\ &\frac{\bar b}{\bar a}(t) = \left(\frac{\bar b}{\bar a}\right)_0 e^{(A_+ - D_+)\, t} \end{aligned} \tag{2.2.57b}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} &c_j = c_{j,0} e^{(D_+ - A_+)(z_j)\, t}, \\ &\bar c_j = \bar c_{j,0} e^{(A_+ - D_+)(\bar z_j)\, t}. \end{aligned} \tag{2.2.57c}$$

Дисперсионное соотношение линеаризованной задачи имеет вид

$$-i\omega(z^2) = (A_+ - D_+)(z). \tag{2.2.57d}$$

(2) *Конечно-разностный случай.* Теперь эволюция задается уравнением (2.2.32). Мы опять предположим, что $A_n^m \to A_\pm$, $D_n^m \to D_\pm$, $B_n^m \to 0$, $C_n^m \to 0$ при $n \to \pm\infty$. Собственные функции, одновременно удовлетворяющие уравнениям (2.2.22) и (2.2.32), задаются соотношениями

$$\begin{aligned} &\varphi_n^{m(t)} = \varphi_n^m (1 + A_-)^m, \quad \psi_n^{m(t)} = \psi_n^m (1 + D_+)^m, \\ &\bar\varphi_n^{m(t)} = \bar\varphi_n^m (1 + D_-)^m, \quad \bar\psi_n^{m(t)} = \bar\psi_n^m (1 + A_+)^m. \end{aligned} \tag{2.2.58}$$

Как и прежде, можно получить

$$\begin{aligned} &a = a_0 \left(\frac{1 + A_+}{1 + A_-}\right)^m, \quad \bar a = \bar a_0 \left(\frac{1 + D_+}{1 + D_-}\right)^m, \\ &b = b_0 \left(\frac{1 + D_+}{1 + A_-}\right)^m, \quad \bar b = \bar b_0 \left(\frac{1 + A_+}{1 + D_-}\right)^m, \end{aligned} \tag{2.2.59a}$$

$$\frac{b}{a} = \left(\frac{b}{a}\right)_0 \left(\frac{1 + D_+}{1 + A_+}\right)^m, \quad \frac{\bar b}{\bar a} = \left(\frac{\bar b}{\bar a}\right)_0 \left(\frac{1 + A_+}{1 + D_+}\right)^m \tag{2.2.59b}$$

и

$$c_j = c_{j,0} \left(\frac{1 + D_+}{1 + A_+}\right)^m (z_j), \quad \bar c_j = \bar c_{j,0} \left(\frac{1 + A_+}{1 + D_+}\right)^m (\bar z_j). \tag{2.2.59c}$$

Здесь $a_0, \ldots, \bar{c}_{j,0}$ отвечают данным рассеяния при $m=0$. Дисперсионное соотношение линеаризованного уравнения $(Q_n^m = z^n \omega^m)$ имеет вид

(2.2.59d) $$\omega(z^2) = \frac{1+A_+}{1+D_+}.$$

Схема построения решений дифференциально-разностных и конечно-разностных уравнений описана полностью. Теперь можно вычислить частные солитонные решения. Например, в случае единственного дискретного собственного значения и отсутствия вклада от непрерывного спектра $(\bar{F}(n) = -\bar{c}\bar{z}_j^{n-1},\ S_n T_n \neq 0)$ для нахождения решения определим

$$\hat{\varkappa}_1(n) = \sum_n \varkappa_1(n, m)\,\bar{z}^{m*}$$

и сведем процедуру решения бесконечной системы алгебраических уравнений к нахождению $\hat{\varkappa}_1(n)$. Для этого подействуем оператором $\sum_m \bar{z}^{m*}$ на уравнения (2.2.50). В дифференциально-разностной задаче односолитонное решение имеет вид

(2.2.60a) $$Q_n = \left(\frac{\bar{c}_0}{\bar{c}_0^*}\right)^{1/2} \exp\left(-\left(\frac{i}{2}\right)(\omega+\omega^*)\,t + 2in\theta\right) \times \operatorname{sh} W/\operatorname{ch}\left(2nW - \frac{i}{2}(\omega^*-\omega)\,t + \varphi_0\right),$$

(2.2.60b) $$T_n = -\left(\frac{\bar{c}_0}{\bar{c}_0}\right)^{1/2} \exp\left(-\left(\frac{i}{2}\right)(\omega+\omega^*)\,t - (2n+1)\,i\theta\right) \times \operatorname{sh} W/\operatorname{ch}\left(2nW - \frac{i}{2}(\omega^*-\omega)\,t + \varphi_0 + W\right),$$

где

(2.2.60c) $$\omega = \omega(\bar{z}^2), \quad \bar{z} = e^{-W+i\theta}, \quad \varphi_0 = -\ln\left(\frac{|c_0|}{2\operatorname{ch} W}\right).$$

(Например, в случае автодуальной решетки $\omega = \pm i(z - z^{-1})$.)

Если $S_n = T_n = 0$, то

(2.2.61a) $$Q_n = \left(\frac{\bar{c}_0}{\bar{c}_0^*}\right)^{1/2} \operatorname{sh}(2W) \exp\left(2in\theta - \frac{i}{2}(\omega+\omega^*)\,t\right) \times 1/\operatorname{ch}\left(2nW - \frac{i}{2}(\omega^*-\omega)\,t + \varphi_0\right),$$

где

(2.2.61b) $$\varphi_0 = -\ln\left(\frac{|c_0|}{\operatorname{sh} 2W}\right).$$

Например, для разностного нелинейного уравнения Шрёдингера $\omega(z^2) = z^2 + z^{-2} - 2$.

В конечно-разностном случае с $T_n = S_n = 0$ мы запишем ($Q_n^m = \Delta x q_n^m$)

$$\omega(z^2) = |\omega| e^{i \operatorname{Arg} \omega},$$

$$Q_n^m = e^{i2n\theta + 2im(\operatorname{Arg}\omega) + i\theta_0} \operatorname{sh} 2W/\operatorname{ch}(2nw - nm|\omega| - \varphi_0). \tag{2.2.62}$$

В случае конечно-разностного нелинейного уравнения Шрёдингера (2.2.37) следует воспользоваться дисперсионным соотношением линеаризованного уравнения

$$\omega = \frac{1 + i\sigma(z^2 - 2 + z^{-2})}{1 - i\sigma(z^2 - 2 + z^{-2})},$$

где $\sigma = \Delta t/(\Delta x)^2$.

Так же как в разд. 1.6, можно вычислить интегралы движения. Например, при $S_n = T_n = 0$ можно показать, что

$$\ln \bar{a}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln g_n(z^2), \tag{2.2.63a}$$

где g_n удовлетворяет

$$g_{n+1}(g_{n+2} - 1) - z^2 \frac{R_{n+1}}{R_n}(g_{n+1} - 1) = z^2 R_{n+1} Q_n. \tag{2.2.63b}$$

Из (2.2.63b) при $z \to 0$ следует разложение для $g_n(z^2)$

$$g_n = \sum_{j=0}^{\infty} g_n^{(j)} z^{2j},$$

причем

$$g_n \sim 1 + z^2 R_{n-1} Q_{n-2} + z^4 R_{n-1} Q_{n-3}(1 - R_{n-2} Q_{n-2} + \ldots). \tag{2.2.64a}$$

Таким образом, $\bar{a}(z)$ является аналитической функцией при $z \to 0$ и имеет разложение

$$\ln \bar{a}(z) \sim \sum_{0}^{\infty} C_j z^{2j}, \tag{2.2.64b}$$

причем C_j являются интегралами движения, поскольку $a(z)$ не зависит от времени. Из (2.2.64a, b) получим (2.2.65)

$$C_1 = \sum_{-\infty}^{\infty} R_k Q_{k-1},$$

$$C_2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \left[R_k Q_{k-2}(1 - R_{k-1} Q_{k-1}) - \frac{1}{2} R_k^2 Q_{k-1}^2 \right]. \tag{2.2.65}$$

Величины C_j, $j = 1, 2, \ldots$, представляют собой интегралы движения. Для того чтобы вывести (2.2.63a, b), следует воспользо-

ваться задачей рассеяния и связью $\bar{a}(z)$ с собственной функцией $\bar{\varphi}_{2n}$

$$\bar{a}(z) = \lim_{n\to\infty} (-\bar{\varphi}_{2n} z^n),$$

а уравнение для g_k следует из

$$\bar{\varphi}_{2n} z^n = \sum_{-\infty}^{n} g_k.$$

Еще раз отметим, что программа решения аналогична линейному фурье-анализу, хотя на первый взгляд кажется, что в процессе решения мы пользуемся запрещенными приемами. В нелинейной задаче имеются дополнительные трудности: приходится решать либо интегральные уравнения (в непрерывном случае), либо бесконечную систему линейных алгебраических уравнений (в конечно-разностном случае).

Теперь мы приведем (для полноты картины) результаты, относящиеся к задаче рассеяния для разностного оператора Шрёдингера (2.2.7), имея в виду приложения к цепочке Тоды (Флашка [155, 156]; см. также [97, 93, 347, 387]).

Мы предположим, что $(a_n - 1/2)$ и b_n быстро убывают при $|n| \to \infty$. Положим $\lambda = (z + z^{-1})/2$ и определим решения φ_n, ψ_n асимптотическими условиями

(2.2.66)
$$\begin{aligned} \varphi_n &\sim z^n, & n &\to +\infty, \\ \psi_n &\sim z^{-n}, & n &\to -\infty \end{aligned}$$

для $|z| = 1$ (это дискретный аналог функций Йоста). Из линейной независимости функций $\varphi_n(z)$ и $\varphi_n(z^{-1})$ следует

(2.2.67)
$$\psi_n(z) = \beta(z)\varphi_n(z) + \alpha(z)\varphi_n(z^{-1}),$$

где $|\alpha|^2 = 1 + |\beta|^2$. Функцию $R(z) = \beta(z)/\alpha(z)$ называют коэффициентом отражения. Собственным значениям отвечает конечное множество вещественных точек z, принадлежащих интервалу $(-1, 1)$. Если $\lambda_j = (z_j + z_j^{-1})/2$ является вещественным собственным значением, то нормированной собственной функцией $\zeta_n(z_j)$ мы будем называть собственную функцию, удовлетворяющую условию

(2.2.68)
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n^2(z_j) = 1,$$

и при $n \to \infty$ она стремится к $\zeta_n(z_j) \sim c_0 z_j^n$. Обратную задачу можно решить, вычислив

(2.2.69a)
$$F(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint R(z) z^{n-1}\, dz + \sum_{j=0}^{N} c_j^2 z_j^n$$

и решив при $m > n$ уравнение

$$\varkappa(n, m) + F(n+m) + \sum_{n'=n+1}^{\infty} \varkappa(n, n') F(n'+m) = 0 \tag{2.2.69b}$$

относительно $\varkappa(n, m)$. Определим

$$(\varkappa(n, n))^{-2} = 1 + F(2n) + \sum_{n'=n+1}^{\infty} \varkappa(n, n') F(n'+n) \tag{2.2.70a}$$

и найдем

$$a_n = \frac{1}{2} \frac{\varkappa(n+1, n+1)}{\varkappa(n, n)} \tag{2.2.70b}$$

и

$$b_n = -\frac{1}{2} \frac{\varkappa(n, n)\varkappa(n-1, n) - \varkappa(n, n+1)\varkappa(n-1, n-1)}{\varkappa(n-1, n-1)\varkappa(n, n)}. \tag{2.2.70c}$$

Для цепочки Тоды (2.2.1), связанной с (2.2.7) посредством (2.2.13), (2.2.14), зависимость данных рассеяния от времени имеет вид

$$\begin{aligned} R(z, t) &= R(z, 0)\, e^{(z-z^{-1})t}, \\ c_j(t) &= c_j(0)\, e^{t\left(z_j - z_j^{-1}\right)t}. \end{aligned} \tag{2.2.71}$$

В случае чисто дискретного спектра $R(z, 0) = 0$, и решение можно вычислить в замкнутой форме. Односолитонное решение, отвечающее единственному собственному значению z_1, имеет вид

$$e^{-(Q_n - Q_{n-1})} - 1 = \frac{z_1^2 + z_1^{-2} - 2}{Az_1^n + \left(Az_1^n\right)^{-1}}, \tag{2.2.72a}$$

где $A = c_1 \exp\left(\left(z_1 - z_1^{-1}\right) t/2\right)$. Положив $z = \sigma e^{-W}$, $\sigma = \pm 1$, приведем его к виду

$$e^{-(Q_n - Q_{n-1})} = 1 + \operatorname{sh}^2 W / \operatorname{ch}^2 (W(n - n_0) + \sigma \operatorname{sh} W t), \tag{2.2.72b}$$

где n_0 является константой, зависящей только от c_1, z_1. Отметим, что это солитонное решение может двигаться как в положительном, так и в отрицательном направлении.

2.3. Периодические граничные условия для уравнения Кортевега — де Фриза. Чрезвычайно интересной является задача с периодическими граничными условиями для нелинейных эволюционных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния. К первым публикациям на эту тему относятся работы Лакса (1975) [320], Новикова (1974) [401], Каца и Ван Мёрбеке (1975) [250, 251], Дубровина и Новикова (1975) [144], Итса и Матвеева (1975) [240], Мак-Кина и Ван Мёрбеке (1975)

[369], Мак-Кина и Трубовица (1976) [368], Дейта и Танаки (1976) [129, 130]. Кроме здесь перечисленных, по этому вопросу было еще опубликовано много других работ, содержащих важные результаты. Обсуждение можно найти в обзорных статьях Матвеева [355] и Дубровина, Матвеева, Новикова [143]. В этой главе мы ограничимся рассмотрением задачи интегрирования уравнения КдФ в классе так называемых конечнозонных потенциалов с периодическими граничными условиями. Решение будет условно периодическим, или квазипериодическим, т. е. волной, зависящей от N фазовых переменных $\theta_i = \varkappa_i x - \omega_i t$, периодической по каждому θ_i, но, вообще говоря, с несоизмеримыми частотами ω_i. Волны, обсуждаемые в этом разделе, являются периодическими по x и почти-периодическими по t. (Грубо говоря, функция $f(t)$ является почти-периодической, если существует такой период $T(\varepsilon)$, что для любого ε имеет место неравенство $|f(t+T) - f(t)| < \varepsilon$ при всех t. Строгое определение можно найти в книге Немыцкого и Степанова [394] или в какомнибудь другом учебнике.) Мы сведем уравнение КдФ к конечномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которую можно проинтегрировать. Интегрирование потребует привлечения некоторых понятий из алгебраической геометрии и теории гиперэллиптических функций, однако здесь мы не будем вдаваться в подробности. В этом разделе мы будем следовать работе Дубровина и Новикова [144]. Изучались и другие нелинейные уравнения с периодическими граничными условиями: нелинейное уравнение Шрёдингера (Абловиц и Ма [20] [1])), уравнение sin-Гордон (Мак-Кин [367] [2])), уравнение Кадомцева — Петвиашвили (Новиков, Кричевер [402]).

Говоря математически, мы рассматриваем вопрос о построении решения уравнения КдФ

(2.3.1a) $$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

с периодическими (периода T) граничными условиями

(2.3.1b) $$u(x, t) = u(x+T, t)$$

и заданными начальными условиями $g(x)$

(2.3.1c) $$u(x, 0) = g(x).$$

Впоследствии определение функции $g(x)$ будет уточнено (т. е. $g(x)$ будет N-зонным потенциалом).

2.3. а. Прямая задача рассеяния. С уравнением (2.3.1) связана задача рассеяния для оператора Шрёдингера (см. также

[1]) См. также [6*, 7*]. — *Прим. перев.*
[2]) См. также [8*, 9*]. — *Прим. перев.*

гл. 1; обратите внимание на изменение знака)

$$v_{xx}+(E-u)v=0,\qquad E=k^2. \tag{2.3.2}$$

Определим два решения уравнения (2.3.2), $\varphi(x;\,x_0,\,k)$ и $\psi^*(x;\,x_0,\,k)$ (φ^* комплексно сопряжено с φ), таких что при $x=x_0$ (x_0 — произвольная точка внутри интервала $0\leqslant x_0\leqslant T$)

$$\begin{aligned}\varphi(x_0;\,x_0,\,k)=1,\qquad \varphi^*(x_0;\,x_0,\,k)=1,\\ \varphi_x(x_0;\,x_0,\,k)=ik,\qquad \varphi^*_x(x_0;\,x_0,\,k)=-ik.\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Если $\varphi(x_j,\,x_0,\,k)$ является решением (2.3.2), то решением является и $\varphi(x+T_j,\,x_0,\,k)$. Поскольку φ, φ^* образуют полный линейно независимый набор решений, то составленная из них матрица фундаментального решения удовлетворяет соотношению

$$\Phi(x+T;\,x_0,\,k)=\hat{T}(x_0,\,k)\,\Phi(x;\,x_0,\,k), \tag{2.3.4a}$$

где

(2.3.4b)

$$\Phi(x;\,x_0,\,k)=\begin{pmatrix}\varphi & \varphi_x\\ \varphi^* & \varphi^*_x\end{pmatrix}(x;\,x_0,\,k),\qquad \hat{T}(x_0,\,k)=\begin{pmatrix}a & b\\ b^* & a^*\end{pmatrix}(x_0,\,k).$$

При этом $\hat{T}$ часто называют *матрицей монодромии* (см. разд. 3.7). В периодической задаче она играет роль матрицы рассеяния. Вронскиан двух решений (2.3.2) не зависит от x, т. е. $W(u,\,v)=uv_x-vu_x=\text{const}$. Так как $W(\varphi,\,\varphi^*)=-2ik$, то, вычислив определители (2.3.4), получим

$$|a|^2-|b|^2=1. \tag{2.3.4c}$$

Так называемые функции Блоха $\psi_\pm(x;\,x_0,\,k)$ определяются как решения (2.3.2) при дополнительном условии

$$\psi_\pm(x_0;\,x_0,\,k)=1,\qquad \psi_\pm(x+T;\,x_0,\,k)=\lambda\psi_\pm(x;\,x_0,\,k). \tag{2.3.5}$$

Так как $\psi_\pm$ удовлетворяют уравнению (2.3.2), то они являются линейными комбинациями функций φ, φ^*:

$$\psi_\pm(x)=C\varphi(x)+D\varphi^*(x) \tag{2.3.6}$$

(остальные аргументы подразумеваются; C, D константы). Из определений (2.3.4a), (2.3.5) получим, что C, D удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}(a-\lambda)C+Db^*=0,\\ bC+(a^*-\lambda)D=0.\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Для существования нетривиального решения $(C,\,D)$ для λ должно выполняться соотношение

$$\lambda^2-\lambda(a+a^*)+|a|^2-|b|^2=0, \tag{2.3.8a}$$

или

(2.3.8b) $$\lambda^2 - 2a_R\lambda + 1 = 0,$$

где a_R — вещественная часть a. Для вещественных E $(E = k^2)$ возможны следующие случаи.

(1) Если $|a_R| > 1$, то одно из собственных значений $|\lambda|$ больше единицы, а другое меньше единицы. Поэтому функция Блоха неограничена.

(2) Если $|a_R| < 1$, то $|\lambda| = 1$ и функция Блоха ограничена. В данном случае мы обозначим $a_R(k) = \cos p(k)$ и, следовательно, $\lambda = \exp(\pm ip(k))$.

(3) Если $|a_R| = 1$, то $\lambda = \pm 1$ и функция Блоха является либо периодической, либо антипериодической.

Теперь мы определим два спектра, которые позволят восстановить потенциал u.

Основной спектр. Основной спектр состоит из собственных значений $E_i = k^2$, для которых по крайней мере одна из собственных функций является периодической или антипериодической. Точки E_i являются корнями уравнения $|a_R| = 1$. *Разрешенными зонами* являются (открытые) сегменты, расположенные между соседними E_i, в которых $|a_R| < 1$. *Запрещенными зонами* называются открытые сегменты между соседними E_i, в которых $|a_R| > 1$. Точки E_i называют границами зон. Типичная функция $a_R = a_R(E)$ показана на рис. 2.1.

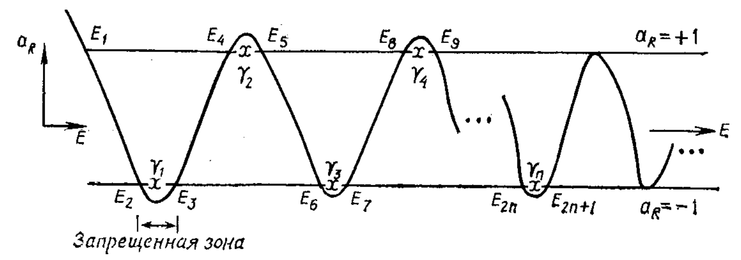


Рис. 2.1. Типичный вид функции $a_R = a_R(E)$.

На рисунке видно, что запрещенным зонам отвечают интервалы между E_{2j} и E_{2j+1}. Зависимость $a_R(E)$ иногда называют диаграммой (определителем) Флоке. Многие свойства спектра, которые мы будем обсуждать в этой главе, были тщательно рассмотрены с другой точки зрения в книге Магнуса и Уинклера [341].

Вспомогательный спектр γ_i. Определим γ_i — такие значения E, в которых

(2.3.9) $$a_I + b_I = 0.$$

Поскольку выполняется условие $|a|^2 - |b|^2 = 1$, соотношение (2.3.9) означает, что $a_R^2 = 1 + b_R^2$. Таким образом, собствен-

ные значения γ_i лежат в запрещенных зонах или на границах зон.

Вспомогательный спектр можно определить также другим способом, потребовав, чтобы собственная функция, удовлетворяющая уравнению (2.3.2) (мы будем обозначать ее $y(x;\ x_0,\ k)$) удовлетворяла фиксированным граничным условиям. Например, в этом случае

(2.3.10) $$y(x_0)=0, \quad y(x_0+T)=0.$$

Тогда из разложения $y = A\varphi + B\varphi^*$ с некоторыми ненулевыми A, B и с помощью (2.3.10) и (2.3.4) можно вывести (2.3.9).

Теперь мы перечислим спектральные свойства E_i и γ_i. Они доказываются стандартным применением в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. (Методы доказательства читатель при желании может найти в [341] или в [368].)

Спектральные свойства.

(1) Основной спектр состоит из счетного множества вещественных собственных значений. Разделим его на два множества: невырожденные границы зон E_i и вырожденные границы зон $\hat{E}_i$. В невырожденном случае $\partial a_R/\partial E|_{E=E_i} \neq 0$ (т. е. E_i является простым корнем уравнения $a_R^2 - 1 = 0$); равенство $\partial a_R/\partial E|_{E=\hat{E}_i} = 0$ выполняется для вырожденных границ зон. Каждое $\hat{E}_i$ представляет собой двойной корень уравнения $a_R^2 - 1 = 0$, корни кратности больше двух отсутствуют. $a'_R(E) \neq 0$ при $|a_R(E)| < 1$.

(2) Вспомогательный спектр также состоит из счетного множества вещественных собственных значений. Они могут лежать либо внутри запрещенных зон, либо на границах зон. Все эти собственные значения являются простыми корнями уравнения $a_I + b_I = 0$. Далее мы разделим вспомогательный спектр на два подмножества γ_i и $\hat{\gamma}_i$. Спектр $\hat{\gamma}_i$ совпадает с $\hat{E}_i$, и существует одна и только одна точка γ_i в каждой запрещенной зоне. (Эти спектральные свойства являются следствиями осцилляционных теорем в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.)

Конечнозонные потенциалы. Произвольный периодический потенциал может иметь бесконечное число невырожденных собственных значений основного спектра (простых корней уравнения $a_R^2 = 1$). Здесь мы рассмотрим конечнозонные потенциалы, т. е. потенциалы, имеющие только конечное число невырожденных собственных значений E_i, $i = 1, 2, \ldots, 2n+1$, а остальные собственные значения вырождены.

В общем случае имеется бесконечное число невырожденных собственных значений. Эта теория была распространена и на общий случай Мак-Кином и Трубовицем (1976) [368], но обобщение весьма нетривиально.

Здесь нам удобно ввести в рассмотрение функцию $\chi = -i\psi_{\pm x}/\psi_{\pm}$. Так как $\psi_{\pm}$ удовлетворяет уравнению (2.3.2), то χ удовлетворяет уравнению Риккати

(2.3.11a) $$-i\chi' + \chi^2 + u = E.$$

Таким образом, если $\chi = \chi_R + i\chi_I$, то имеем

(2.3.11b) $$\chi_I = \frac{1}{2}(\ln \chi_R)_x$$

и представление

(2.3.11c) $$\psi_{\pm}(x; x_0, E) = \left(\frac{\chi_R(x_0; x_0, E)}{\chi_R(x; x_0, E)}\right)^{1/2} \exp\left(i\int_{x_0}^{x} \chi_R(y; x_0, k)\,dy\right).$$

Ниже мы будем пользоваться следующими асимптотическими формулами (при $|E| \to \infty$, $E = k^2$):

(2.3.12a) $$\psi_{\pm} \sim \exp(ik(x - x_0)),$$

(2.3.12b) $$\chi_{\pm} \sim k\chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{k}\chi_{-1} + \frac{1}{k^2}\chi_{-2} + \dots$$

с

$$\chi_1 = \pm 1, \quad \chi_0 = 0, \quad \chi_{-1} = \mp u/2,$$

$$\chi_{-2} = \mp\left(\frac{i}{2}\right)u_x, \quad \chi_{-3} = \pm(2u_{xx} - u^2), \dots;$$

то есть,

(2.3.13) $$\chi_{\pm} \sim \pm\left(k - \frac{u}{2k} - \frac{2iu_x}{(2k)^2} + \frac{1}{2k^3}(2u_{xx} - u^2) + \dots\right).$$

Отметим, что, вообще говоря, уравнение КдФ и его высшие аналоги могут быть представлены в виде (см. Захаров, Фаддеев [532] или разд. 1.6)

(2.3.14) $$u_t = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta \sum_{m=0}^{N} C_m I_{2m+1}}{\delta u(x)},$$

где $I_{2m+1} = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{-(2m+1)}(x)\,dx$ и $\delta I/\delta u$ — производная Фреше от I.

2.3. b. Обратная задача рассеяния. Функцию χ можно выразить через данные рассеяния a, b. Для этого мы воспользуемся (2.3.6). Исходя из равенств $\psi(x = x_0) = 1$, и $\psi'(x = x_0) = i\chi'(x = x_0)$ (последнее следует из определения χ), получим

(2.3.15a) $$\psi = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\chi_0}{k}\right)\varphi + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\chi_0}{k}\right)\varphi^*,$$

где $\chi_0 = \chi(x = x_0) = \chi(x_0;\ x_0,\ k)$ [1]. Теперь, воспользовавшись соотношениями (2.3.5) при $x = x_0$ и (2.3.8b), получим

(2.3.15b) $$\chi_{0\pm} = \frac{k\left(\pm\sqrt{1-a_R^2} + ib_R\right)}{a_I + b_I} = \chi_{0R\pm} + i\chi_{0I\pm}.$$

Поэтому

(2.3.15c) $$\chi_{0R\pm} = \frac{\pm k\sqrt{1-a_R^2}}{a_I + b_I}.$$

Теперь введем другой базис функций, удобный для анализа свойств *аналитичности* данных рассеяния. Мы определим собственные функции $c(x;\ x_0,\ E)$, $s(x;\ x_0,\ E)$, такие что при $x = x_0$

(2.3.16a) $$c(x_0;\ x_0,\ E) = 1, \quad c_x(x_0;\ x_0,\ E) = 0,$$

(2.3.16b) $$s(x_0;\ x_0,\ E) = 0, \quad s_x(x_0;\ x_0,\ E) = 1.$$

Оператор трансляции можно записать в виде

(2.3.17a) $$c(x+T;\ x_0,\ E) = \alpha_{11}c(x;\ x_0,\ E) + \alpha_{12}s(x;\ x_0,\ E),$$

(2.3.17b) $$s(x+T;\ x_0,\ E) = \alpha_{21}c(x;\ x_0,\ E) + \alpha_{22}s(x;\ x_0,\ E).$$

Имеется следующая связь между базисами (2.3.3, 4) и (2.3.16, 17):

(2.3.18) $$\alpha_{11} = a_R + b_R, \quad \alpha_{22} = a_R - b_R,$$
$$\alpha_{12} = -k(a_I - b_I), \quad \alpha_{21} = \frac{a_I + b_I}{k}.$$

Преобразовав уравнение Шрёдингера (2.3.2) в интегральное уравнение Вольтерры (интегрирование проводится от x_0 до x), можно показать, что собственные функции c, s суть целые функции переменной E. Это означает, что коэффициенты α_{ij} также являются целыми функциями переменной E. В теории функций комплексного переменного доказывается, что целую функцию можно представить в виде произведения ее нулей и целой функции, не имеющей нулей. В частности,

(2.3.19a) $$1 - a_R^2(E) = g_1(E)\sum_{i=1}^{2N+1}(E - E_i)\prod_{j=1}^{\infty}(E - \hat{E}_j)^2,$$

(2.3.19b) $$\frac{(a_I + b_I)^2}{E} = g_2(E)\prod_{i=1}^{N}(E - \gamma_i)^2\prod_{j=1}^{\infty}(E - \hat{E}_j)^2.$$

Отметим, что $g_i(E)$, $i = 1,\ 2$, суть целые функции, не имеющие нулей, E_i — простые корни уравнения $1 - a_R^2 = 0$, $\hat{E}_i$ — дву-

---

[1] В предыдущем пункте буква χ_0 обозначала совсем другую величину.— *Прим. перев.*

кратные корни уравнения $1-a_R^2=0$ и простые корни уравнения $a_I+b_I=0$, γ_i — это простые корни уравнения $a_I+b_I=0$, расположенные *внутри* запрещенных зон. Таким образом, χ_{0R}^2 представляется в виде

$$\chi_{0R}^2=\frac{E\left(1-a_R^2\right)}{(a_I+b_I)^2}=\frac{\prod_{i=1}^{2N+1}(E-E_i)}{\prod_{i=1}^{N}(E-\gamma_i)^2}\,g(E), \tag{2.3.20}$$

где функция $g(E)=g_1(E)/g_2(E)$ является целой и не имеет нулей. Асимптотика $g(E)$ при $E\to\infty$ определяется по известной из (2.3.13) асимптотике χ_R:

$$\chi_R^2=E-u+O\left(\frac{1}{E}\right). \tag{2.3.21}$$

Сравнив (2.3.20) и (2.3.21), мы видим, что $\lim_{E\to\infty} g(E)=1$. Поэтому из теоремы Лиувилля следует, что

$$g(E)=\frac{g_1(E)}{g_2(E)}=1. \tag{2.3.22}$$

Используя (2.3.22), разлагая (2.3.20) и сравнивая с (2.3.21), получим формулу восстановления потенциала u (в точке $x=x_0$):

$$u=\sum_{i=1}^{2N+1}E_i-2\sum_{i=1}^{N}\gamma_i. \tag{2.3.23}$$

Теперь мы установим, что E_i не зависят от точки x_0, тогда как γ_i зависят от x_0. Кроме того, мы выведем уравнения для $\gamma_i(x_0)$. При этом потенциал u в *произвольной* точке x_0 можно будет восстановить по формуле (2.3.23).

Рассмотрим малый сдвиг точки x_0 в x_0+dx_0. Матрицу фундаментального решения $\Phi(x;x_0+dx_0,k)$ можно разложить в ряд Тейлора:

$$\Phi(x;\ x_0+dx_0,\ k)\sim\Phi(x;\ x_0,\ k)+\Phi_{x_0}(x;\ x_0,\ k)\,dx_0\equiv \equiv(I+Q\,dx_0)\,\Phi(x;\ x_0,\ k). \tag{2.3.24}$$

Так как $\Phi(x;x_0+dx_0,k)$ и $\Phi(x;x_0,k)$ являются матрицами фундаментального решения, то, как легко понять, $I+Qdx_0$ не зависит от x. Теперь из (2.3.4) и (2.3.24) получим

$$\Phi(x+T;\ x_0+dx_0,\ k)=\widehat{T}(x_0+dx_0,\ k)\,\Phi(x;\ x_0+dx_0,\ k)= =(1+Qdx_0)\,\widehat{T}(x_0,\ k)\,\overline{\Phi}(x;\ x_0,\ k). \tag{2.3.25}$$

Таким образом,

(2.3.26a) $\hat{T}(x_0 + dx_0, k)(I + Qdx_0) = (I + Qdx_0) T(x_0, k)$,

и в пределе $dx_0 \to 0$

(2.3.26b) $$\frac{\partial \hat{T}}{\partial x_0} = [Q, \hat{T}],$$

где $[Q, \hat{T}] = Q\hat{T} - \hat{T}Q$. (Читатель может отметить аналогию с (1.2.4c).)

Теперь мы вычислим $Q(x_0)$, воспользовавшись

(2.3.27) $$Q(x_0) = \Phi_{x_0}(x;\ x_0,\ k)\,\Phi^{-1}(x;\ x_0,\ k).$$

Нам удобно выбрать x равным x_0, поскольку правая часть (2.3.27) не зависит от x. Из граничных условий получим

(2.3.28a) $$\Phi(x_0;\ x_0,\ k) = \begin{bmatrix} 1 & ik \\ 1 & -ik \end{bmatrix}.$$

Аналогично, матрица

(2.3.28b) $$\Phi_{x_0} = \begin{bmatrix} \varphi_{x_0} & \varphi_{xx_0} \\ \overset{*}{\varphi}_{x_0} & \overset{*}{\varphi}_{xx_0} \end{bmatrix}$$

равна

(2.3.28c) $$\Phi_{x_0} = \begin{bmatrix} -ik & E - u(x_0) \\ ik & E - u(x_0) \end{bmatrix}.$$

При выводе (2.3.28c) мы воспользовались граничными условиями:

(a) $\varphi(x_0;\ x_0,\ E) = 1$, поэтому $(d/dx_0)\,\varphi(x_0;\ x_0,\ E) = 0$ и
$$\varphi_{x_0}(x_0;\ x_0,\ E) = -\varphi_x(x_0;\ x_0,\ E) = -ik;$$

(b) $\varphi_x(x_0;\ x_0,\ E) = ik$, поэтому $(d/dx_0)\,\varphi_x(x_0;\ x_0,\ E) = 0$ и
$$\varphi_{xx_0}(x_0;\ x_0,\ E) = -\varphi_{xx}(x_0;\ x_0,\ E) = (E - u(x_0))\,\varphi(x_0;\ x_0,\ E) = E - u(x_0).$$

Из (2.3.27), (2.3.28) следует

(2.2.29) $$Q(x_0) = -ik \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{iu(x_0)}{2k} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

И наконец, подставляя (2.3.4b) в (2.3.26b) и используя (2.3.29), получим

(2.3.30a) $$\frac{\partial a}{\partial x_0} = -ika - \frac{iu}{2k}(a - b^*) + ika - \frac{iu}{2k}(a + b),$$

(2.3.30b) $$\frac{\partial b}{\partial x_0} = -ikb + \frac{iu}{2k}(b - a^*) - ikb + \frac{iu}{2k}(a + b)$$

и комплексно сопряженные к ним выражения (мы предполагаем потенциал u вещественным). Из (2.3.20) следует, что $a_R = (a + a^*)/2$ удовлетворяет уравнению

$$\partial a_R/\partial x_0 = 0, \tag{2.3.31a}$$

которое означает, что корни (E_i) уравнения $a_R^2 = 1$ не зависят от x_0. Кроме того, теперь мы можем найти уравнения для $\gamma_i(x_0)$. Из (2.3.30) имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_0}(a_I + b_I) = -2kb_R. \tag{2.3.31b}$$

Из равенства $|a|^2 - |b|^2 = 1$, взятого в точках $E = \gamma_j$, где $(a_I + b_I)(E = \gamma_j) = 0$ (по определению γ_j (2.3.9)), следует, что

$$b_R = i\sigma_j\sqrt{1 - a_R^2}, \quad \sigma_j = \pm 1. \tag{2.3.31c}$$

Воспользовавшись (2.3.19), (2.3.22) и вычислив (2.3.31) в точках $E = \gamma_j$, получим

$$-\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N} \frac{d\gamma_j}{dx_0} = -2i\sigma_j \prod_{i=1}^{2N+1} (\gamma_j - E_i)^{1/2}, \quad j = 1, \ldots, N, \tag{2.3.32}$$

или, определив

$$R(E) = \prod_{i=1}^{2N+1} (E - E_i), \tag{2.3.33}$$

из (2.3.32) выведем

$$\frac{d\gamma_j}{dx_0} = \frac{2i\sigma_j R^{1/2}(\gamma_j)}{\prod\limits_{k=1,\ k\neq j}^{N} (\gamma_j - \gamma_k)}, \quad \sigma = \pm 1, \quad j = 1, \ldots, N. \tag{2.3.34}$$

Система уравнений (2.3.34) задает зависимости точек γ_j от x_0, которые в свою очередь определяют $u(x_0)$ при всех x_0. Величины γ_j и знаки σ_j считаются заданными в некоторой начальной точке x_0. При прохождении γ_j через границу запрещенной зоны величина σ_j будет менять знак. Точки E_i, $i = 1, 2, \ldots, 2N + 1$, являются точками ветвления. Для корня $R^{1/2}(E)$ мы сделаем разрезы вдоль запрещенных зон между E_{2j} и $E_{2j+1,\ j=1,\ldots,N}$ от $E = -\infty$ до E_1. Так возникает риманова поверхность корня $R^{1/2}(E)$.

Замечательно, что существует преобразование, позволяющее проинтегрировать систему N нелинейных дифференциальных уравнений (2.3.34). Перед тем как перейти к этому вопросу, мы вначале покажем, как вспомогательный спектр зависит от времени, если потенциал удовлетворяет уравнению КдФ. Эта

зависимость, как будет показано, также может быть представлена в виде системы N обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений.

2.3. с. Зависимость от времени. Зависимость собственных функций от времени для (2.3.1), (2.3.2), как было показано в разд. 1.4, имеет вид

(2.3.35) $$v_t = M_v, \quad M = (4E + 2u)\frac{\partial}{\partial x} - u_x.$$

В любой заданный момент t имеются две линейно независимые функции v_1, v_2, удовлетворяющие (2.3.2), (2.3.35). Мы можем разложить их по φ, φ^* следующим образом:

(2.3.36) $$v_i = f_i(t)\varphi + g_i(t)\varphi^*, \quad i = 1,\ 2.$$

Подставив (2.3.36) в (2.3.35), получим, что φ удовлетворяет уравнению

(2.3.37) $$\varphi_t - M\varphi = \lambda\varphi + \mu\varphi^*,$$

где λ, μ зависят только от t. (Аналогично φ^* удовлетворяет комплексно сопряженным уравнениям.) Теперь мы определим λ, μ. При $x = x_0$

(2.3.38) $$\varphi = 1, \quad \varphi_t = 0, \quad \varphi_x = ik, \quad \varphi_{xt} = 0$$

(для φ^* аналогично). Таким образом, из (2.3.37) получим ($x = x_0$)

(2.3.39a) $$0 = ik(4E + 2u(x_0)) - u_x(x_0) + \lambda + \mu.$$

Вычислив ∂_x от (2.3.37) в точке $x = x_0$, получим

(2.3.39b)
$$0 = iku_x(x_0) - u_{xx}(x_0) + (4E + 2u(x_0))(u(x_0) - E) + ik(\lambda - \mu).$$

Разрешив (2.3.39a, b) относительно λ, μ, найдем

(2.3.40a) $$\lambda = \frac{-i}{2k}u_{xx}(x_0) - 4ik^3 + i\frac{u^2}{k},$$

(2.3.40b) $$\mu = u_x(x_0) - 2iku(x_0) + \frac{i}{2k}u_{xx}(x_0) - \frac{i}{k}u^2.$$

Эти результаты можно записать в матричной форме

(2.3.41a) $$\Phi_t = Q\Phi + \Lambda\Phi + V,$$

где Φ определено в (2.3.4b), Q — в (2.3.27), а Λ и V имеют вид

(2.3.41b) $$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu^* & \lambda^* \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} 0 & Q\varphi_x \\ 0 & Q\varphi_x^* \end{pmatrix}.$$

Вычислив (2.3.41) в точке $x = x_0 + T$ и воспользовавшись (2.3.4), получим уравнение

$$(2.3.42\text{a})\qquad \hat{T}_t\Phi(x_0) + \hat{T}\Phi_t(x_0) = Q\hat{T}\Phi(x_0) + \Lambda\hat{T}(x_0) + V(x_0 + T),$$

которое приводится к виду

$$(2.3.42\text{b})\qquad \hat{T}_t = [\Lambda, \hat{T}],$$

где $[\Lambda, \hat{T}] = \Lambda\hat{T} - \hat{T}\Lambda$. (Опять отметим соответствие с (1.2.4c).) В терминах a, b уравнение (2.3.42b) имеет вид

$$(2.3.43)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} &= \mu b^* - \mu^* b, \\ \frac{\partial b}{\partial t} &= (\lambda - \lambda^*)\, b + \mu\,(a^* - a). \end{aligned}$$

Отсюда нетрудно вывести, что a_R и $a_I + b_I$ (напомним, что $a_R = (a + a^*)/2$ и т. д.) удовлетворяют уравнениям

$$(2.3.44\text{a})\qquad \frac{\partial a_R}{\partial t} = 0,$$

$$(2.3.44\text{b})\qquad \frac{\partial}{\partial t}(a_I + b_I) = -2\mu_R(a_I + b_I) + 2(\mu_I + \lambda_I)\, b_R.$$

Из (2.3.44) немедленно получаем, что собственные значения E_i (корни уравнения $a_R^2 = 1$) не зависят от времени. А из (2.3.44b) можно найти движение вспомогательного спектра γ_j. Воспользуемся (2.3.19) и равенством $b_R^2 = a_R^2 - 1 + a_I^2 - b_I^2$. В точках $E = \gamma_j$ получим

$$(2.3.45)\qquad -\prod_{k=1}^{\infty}(\gamma_k - \hat{E}_k)\,\gamma_j^{1/2} g_2^{1/2}(\gamma_i) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N}(\gamma_j - \gamma_k)\,\frac{\partial \gamma_j}{dt} =$$

$$= -2i\,(\lambda_I + \mu_I)\,\sigma_j' g_1^{1/2}(\gamma_j)\, R^{1/2}(\gamma_j) \prod_{k=1}^{\infty}(\gamma_j - \hat{E}_j),$$

где $\sigma_j' = \pm 1$ и $R(E)$ дается формулой (2.3.33). Воспользовавшись (2.3.40) и равенством $g_1(E)/g_2(E) = 1$, получим

$$(2.3.46)\qquad \frac{\partial \gamma_j}{dt} = \frac{4i\sigma_j'}{\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N}(\gamma_j - \gamma_k)}\,(2\gamma_j + u(x_0))\, R^{1/2}(\gamma_j), \quad j = 1, \ldots, N.$$

И наконец, воспользовавшись формулой обращения (2.3.23), преобразуем (2.3.46) к виду

$$\frac{d\gamma_j}{dt}=\frac{8i\sigma_j'}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}(\gamma_j-\gamma_k)}\left(\sum_{k=1}^{N}\gamma_k-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2N+1}E_k\right)R^{1/2}(\gamma_j). \tag{2.3.47}$$

Уравнения (2.3.34) и (2.3.47) определяют функции $\gamma(x_0, t)$, по которым мы можем восстановить потенциал $u(x_0, t)$ (2.3.23), являющийся решением уравнения КдФ. Эти системы обыкновенных дифференциальных уравнений могут быть проинтегрированы при помощи подходящего преобразования (преобразования Абеля). По заданным в некоторой точке x_0 значениям γ_j и знакам σ_j мы определим γ_j во всех точках интервала, решив систему (2.3.34). После этого мы имеем начальные данные для системы (2.3.47), которую тоже можно решить.

При $N=1$ полином $R(E)$ (2.3.33) имеет третий порядок, поэтому решение γ_j уравнений (2.3.34) и (2.3.37) является эллиптической функцией от x и t. Интегрируя, получим хорошо известную кноидальную волну:

$$u=-2(E_3-E_2)\,\mathrm{cn}^2\left(\sqrt{E_3-E_1}\,(x-2(E_1+E_2+E_3)t)+\right.$$
$$\left.+\eta_0\,|\,m\right)+E_1+E_3,$$
$$m=\frac{E_3-E_2}{E_3-E_1}$$

($\mathrm{cn}(u|m)$ — эллиптическая функция Якоби с модулем m). Эта теория позволяет расширить класс периодических по x решений уравнения КдФ и включить в него решения, выражающиеся через гиперэллиптические функции.

Геометрически мы можем представить себе γ_j движущимися вдоль невырожденных запрещенных зон $l_j=\{E_iE_{2j}\leqslant E\leqslant \leqslant E_{2j+1},\ j=1, \ldots, N\}$ в комплексной плоскости E. Отождествив соответствующим образом границы разрезов, проведенных вдоль запрещенных зон двух экземпляров комплексной плоскости, получим риманову поверхность R корня $R(E)$ (2.3.33). Точка γ_j пробегает путь, состоящий из двух участков $[l_j, +1]$ и $[l_j, -1]$. Первый отвечает верхней границе разреза с $\sigma_j=1$, второй нижней границе с $\sigma_j=-1$. Точка переходит с одной границы разреза на другую в момент прохода через концы зоны (рис. 2.2).

Теперь мы опишем процедуру интегрирования уравнений (2.3.34) и (2.3.47). Определим координаты

$$P_j=(\gamma_j,\ \sigma_j), \tag{2.3.48a}$$

т. е. γ_j с учетом знака σ_j, и преобразование (Абеля)

(2.3.48b) $$\Omega_m(E) = \sum_{k=0}^{N-1} C_{km} \frac{E^k\, dE}{R^{1/2}(E)},$$

(2.3.48c) $$\eta_m(P_1, \ldots, P_N) = \sum_{j=1}^{N} \oint_{E_{2j}}^{P_j} \Omega_m(E).$$

Обычно коэффициенты C_{km} нормируют условие (α_j — цикл, обходящий соответствующую запрещенную зону l_j)

(2.3.48d) $$\oint_{\alpha_j} \Omega_m(E) = 2\pi i \delta_{jm},$$

которое приводит к N уравнениям для N неизвестных. Из (2.3.48d) следует, что коэффициенты C_{km} вещественные (так

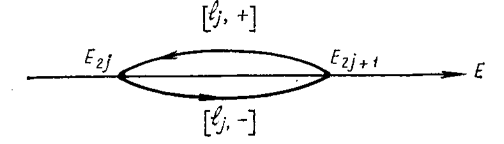


Рис. 2.2. Разрез на комплексной плоскости; движение точек γ_j.

как $R^{1/2}(E)$ является чисто мнимым для E, лежащих в запрещенной зоне). Отметим, что преобразование (2.3.48c) определено неоднозначно $\left(\text{к } \eta_m \text{ можно добавлять кратные } \oint_{\alpha_i} \Omega_m\right)$. В любом случае вычисление $d\eta_m/dx_0$ с помощью (2.3.48c), (2.3.34) после некоторых преобразований дает

(2.3.49) $$\frac{d\eta_m}{dx_0} = \sum_{j=1}^{N} \Omega_m(Q_j) \frac{d\gamma_j}{dx_0} =
= 2i \sum_{k=0}^{N-1} C_{km} \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\gamma_j^k}{\prod\limits_{\substack{n=1\\ n\neq j}}^{N} (\gamma_j - \gamma_n)} \right).$$

Однако имеет место тождество

(2.3.50) $$\sum_{j=1}^{N} \frac{\gamma_j^k}{\prod\limits_{\substack{n=1\\ n\neq j}}^{N} (\gamma_j - \gamma_n)} = \delta_{k,\, N-1},$$

где $\delta_{k,m}$ — символ Кронекера. (Это можно доказать, вычислив интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\gamma^k\,d\gamma}{\prod\limits_{n=1,\,n\neq j}^{N}(\gamma-\gamma_n)}\,d\gamma$$

по контуру, охватывающему все точки γ_n.) Учитывая (2.3.50), мы из (2.3.49) немедленно получим

$$\frac{d\eta_m}{dx_0}=2iC_{N-1,\,m}. \tag{2.3.51}$$

Итак, мы показали, что (2.3.34) сводится к интегрируемой системе (2.3.51) с помощью преобразования (2.3.48).

Аналогичным образом мы можем определить зависимость переменных η_m от времени (воспользовавшись (2.3.50)):

$$\begin{aligned}\frac{d\eta_m}{dt}&=\sum_{j=1}^{N}\Omega_m(Q_j)\frac{d\gamma_j}{dt}=\\&=8i\sum_{k=0}^{N-1}C_{km}\sum_{j=1}^{N}\frac{\gamma_j^k}{\prod\limits_{\substack{n=1\\n\neq j}}^{N}(\gamma_j-\gamma_n)}\left(\sum_{\substack{s=1\\s\neq j}}^{N}\gamma_s-\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{2N+1}E_s\right)=\\&=8i\left(\sum_{s=1}^{N}\gamma_s-\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{2N+1}E_s\right)C_{N-1,\,m}-\\&\quad-8i\sum_{k=0}^{N-1}C_{km}\sum_{j=1}^{N}\frac{\gamma_j^{k+1}}{\prod\limits_{\substack{s=1\\s\neq j}}^{N}(\gamma_j-\gamma_s)}.\end{aligned} \tag{2.3.52}$$

Имеет место следующее тождество:

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{\gamma_j^{k+1}}{\prod\limits_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{N}(\gamma_i-\gamma_j)}=\begin{cases}0,, & k=0,1,\ldots,N-3,\\ 1, & k=N-2,\\ \sum\limits_{i=1}^{N}\gamma_i, & k=N-1.\end{cases} \tag{2.3.53}$$

Первые два равенства в (2.3.53) ($k\leqslant N-2$) следуют из (2.3.50), а последнее можно доказать по индукции. С учетом (2.3.53) уравнение (2.3.52) приводится к виду

$$\frac{d\eta_m}{dt}=-8iC_{N-2,\,m}-4iC_{N-1,\,m}\sum_{j=1}^{2N+1}E_j. \tag{2.3.54}$$

Таким образом, получаем из (2.3.51), (2.3.54):

(2.3.55a) $$\eta_m = i(\varkappa_m x - \omega_{mt} + \eta_m^0),$$

(2.3.55b) $$\varkappa_m = 2C_{N-1,\,m},$$

(2.3.55c) $$\omega_m = 8C_{N-2,\,m} + 4C_{N-1,\,m} \sum_{j=1}^{2N+1} E_j.$$

Волновые числа $\varkappa_m$ и частоты ω_m в (2.3.55) вещественные (мы уже отмечали, что C_{jk}, определенные из (2.3.48d), суть вещественные коэффициенты).

Преобразование (2.3.48) обратимо (см. [144, 143]), поэтому мы можем записать

(2.3.56) $$P_j = P_j(\eta_1, \ldots, \eta_N).$$

Теперь из (2.3.23) и (2.3.48a) следует, что u имеет вид

(2.3.57) $$u(x) = f(\eta_1, \ldots, \eta_N) + \text{const}$$

(т. е. u является функцией $\eta_1, \ldots, \eta_N$). Этот результат означает, что частное решение уравнения КдФ, отвечающее N-зонному потенциалу, имеет в точности N фаз, и это решение является в общем случае условно периодическим по времени. Каждое γ_j «движется» внутри своей запрещенной зоны с неким определенным периодом. Поскольку мы с самого начала наложили условие периодичности по x, то все γ_j являются периодическими (с периодом T) функциями x.

Можно показать (см., например, [143]), что решение (2.3.57) уравнения КдФ можно выразить через подходящую алгебраическую функцию на $2N$-мерном торе, а именно

(2.3.58a) $$u = -2\frac{d^2}{dx^2}\ln\Theta_{\mathscr{W}}(\eta_1, \ldots, \eta_N) + \text{const},$$

где Θ — тэта-функция Римана,

(2.3.58b) $$\Theta(\eta_1, \ldots, \eta_N) = \sum_{M=M_1, \ldots, M_N=-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{j,\,k=1}^{N} B_{jk}M_jM_k + \sum_{k=1}^{N} M_k\eta_k\right),$$

а матрица B_{jk} определяется следующим образом:

(2.3.58c) $$B_{jk} = \oint_{\beta_k} \Omega_j(E).$$

Циклы β_k на римановой поверхности R не пересекают циклов α_j при $j \neq k$, а α_j, β_j пересекаются в одной точке E_{2j} (рис. 2.3).

Циклы α_j, β_j представляют собой циклы на деформированной N-зонной римановой поверхности. Константу в (2.3.58а) и фазы $\eta_m^{(0)}$ в (2.3.55а) также можно представить в явном виде на этой римановой поверхности. Заинтересованный читатель может обратиться к работам Итса и Матвеева [240], Матвеева [355], Дубровина, Матвеева, Новикова [143]. В действительности Итс и Матвеев [240] построили довольно общее решение (2.3.58) непосредственно (т. е. не обращаясь к описанной конструкции). Их решение является почти-периодической функцией как по x, так и по t.

Здесь мы не будем детальнее обсуждать результаты, относящиеся к периодической задаче. Однако мы должны отметить,

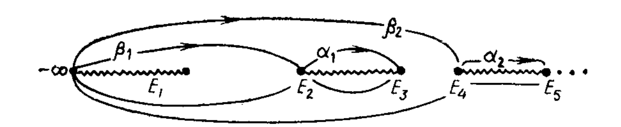


Рис. 2.3.

что в этом направлении было получено много важных результатов. В дополнение к уже перечисленным работам мы рекомендуем заинтересовавшимся читателям следующие статьи: Кричевер [292], Марченко [352], Флашка и Мак-Лафлин [159], Мейман [373], Чередник [106].

Пока эта теория не имеет широких приложений. Недавно Флашка, Форест и Мак-Лафлин [158] рассмотрели медленные модуляции этих N-зонных потенциалов. Задолго до этого Уизем [505] разработал теорию однофазных волн, а Абловиц и Бенни [4] и Абловиц [1, 2] — многофазных волн. В последней работе численное интегрирование использовалось с целью показать существование многопериодических мод (несмотря на присутствие малых знаменателей). Преимущество настоящей теории состоит в возможности построения явного аналитического представления решения.

Упражнения

Раздел 2.1

1. (а) Доказать, что функции $\varphi^{(1)}e^{-i\zeta d_1 x}$ и $\psi^{(3)}e^{-i\zeta d_3 x}$ являются аналитическими в нижней полуплоскости, а $\psi^{(1)}e^{-i\zeta d_1 x}$ и $\varphi^{(3)}e^{-i\zeta d_3 x}$ — в верхней полуплоскости.

(b) Перейти к пределу $x \to \infty$ и получить аналогичные результаты для a_{11}, b_{33}, a_{33}, b_{11}.

2. В (2.1.1) положить

$$N_{12} = N_{21}^* = \begin{cases} iQ = \text{const}, & |x| < L_1, \\ 0, & |x| > L_1, \end{cases}$$

$$N_{13} = N_{31}^* = \begin{cases} iR = \text{const}, & |x| < L_2, \\ 0, & |x| > L_2, \end{cases}$$

остальные $N_{ij} = 0$. Вычислить данные рассеяния.

3. Показать, что каждый из не зависящих от времени коэффициентов a_{11} и a_{33} дает бесконечную серию законов сохранения. Отличаются ли эти серии? Вычислите три первые плотности в каждой из серий. Имеется ли рекуррентное соотношение для вычисления n-й плотности? Разложение a_{22} также дает серию законов сохранения.

4. (a) Какие условия следует наложить, чтобы нули функций $\bar{a}_0^{(3)}$ в (2.1.46) соответствовали нулям функций $\bar{a}_0^{(3)}$?

(b) Показать, что в этом случае имеются солитоны Q_{2f}. Что происходит с Q_{1f}, Q_{3f}?

5. Обсудить различие между связанными состояниями (отвечающими дискретным собственным значениям) в задачах рассеяния 2×2 и 3×3.

Раздел 2.2

1. Аикава и Тода [34] показали, что

$$(*) \qquad \{\partial_t + (a - a^{-1})\,\partial_x\}^2 \ln(1 + au) = \\ = a^{-2}\{u(x + \sqrt{a}) + u(x - \sqrt{a}) - 2u(x)\}$$

представляет собой интегрируемое уравнение, которое содержит в себе в качестве частных случаев и цепочку Тоды, и уравнение КдФ.

(a) Показать, что преобразование

$$a_n - a_{n-1} = -\ln(1 + \alpha u_n)$$

переводит цепочку Тоды (2.2.1) в

$$(**) \qquad \partial_t^2 \ln(1 + \alpha u_n) = \alpha\left(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n\right).$$

(b) Показать, что (*) сводится к КдФ при $a \to 0$

(c) Показать, что преобразование

$$x = \sqrt{a}\,\eta + \left(a - \frac{1}{a}\right)t, \qquad \tau = a^{3/2}t$$

переводит (*) в (**). Так как уравнение (**) интегрируемо, а преобразование является простой обратимой заменой координат, то и уравнение (*) тоже интегрируемо. Какая задача рассеяния связана с ним?

2. Найти дискретизацию уравнения sin-Гордон в конусных координатах. Более сложная задача — найти дискретизацию в лабораторных координатах. Интегрируемая дискретизация этого уравнения в лабораторных координатах до сих пор не найдена. (См. [11*, 12*]. — *Перев.*)

3. Докажите разрешимость (2.2.48). См. разд. 1.3, (1.3.30) и далее.

4. (a) По аналогии с (2.2.63) — (2.2.65) найти рекуррентные формулы для бесконечной последовательности законов сохранения, если S_n, $T_n \not\equiv 0$ (см. (2.2.22)). Вычислить три первых закона сохранения. При каком выборе Q, R, S, T имеются положительно определенные плотности законов сохранения (т. е. «энергия»)? Как это связано с разрешимостью уравнения (2.2.48) в упр. 3?

(b) Найти «формулы следов» для цепочки Тоды. Как они связаны с интегралами Хенона [207]?

(c) Найти переменные действие — угол для цепочки Тоды. Дифференциально-разностные уравнения возникают как модели одномерных кристаллических решеток. Эти модели являются естественными кандидатами для квантования. Квантовомеханические эффекты часто оказываются существенными в решеточной динамике. Формулировка этой проблемы в терминах переменных действие — угол может оказаться необходимым шагом в процессе квантования (см. также разд. 4.5).

5. Имеются ли случаи, когда данные рассеяния можно вычислить явно? Если да, то попытайтесь их вычислить.

Раздел 2.3

Возможно, упражнения к этому разделу следовало бы назвать «нерешенные задачи».

1. Слово «солитон» означает ныне точное решение вполне интегрируемого эволюционного уравнения на оси $-\infty < x < \infty$, отвечающее единственному дискретному собственному значению в спектре соответствующей задачи рассеяния. Однако первоначально этот термин употреблялся Забужским и Краскалом [523] для обозначения локальной волны в их численных экспериментах с уравнением КдФ при *периодических* граничных условиях. Описать на языке (чисто дискретного) спектра периодической задачи, чем отличаются «солитоны», которые наблюдали Краскал и Забужский. Если известны оба спектра для некоторого начального условия периодической задачи для уравнения КдФ, то можно ли предсказать, сколько «солитонов» будет наблюдаться в численном эксперименте?

2. (a) Определить время возвращения N-зонного решения уравнения КдФ.

(b) Основываясь на численных экспериментах для уравнения

$$u_t + uu_x + \delta^2 u_{xxx} = 0$$

при $0 < x < L$ с периодическими граничными условиями и начальными условиями вида

$$u(x, 0) = \sin \frac{2\pi x}{L}.$$

Забужский [521] нашел эмпирическую формулу для времени возвращения

$$T_r = \frac{0{,}71}{\delta} T_b,$$

где T_b — время опрокидывания решения в уравнении с $\delta = 0$. Можно ли эту формулу вывести аналитически? При каких условиях она применима? Имеется ли какое-нибудь обобщение этой формулы для более широкого класса начальных условий?

Глава 3. Различные перспективы

Краткий обзор. В предыдущих двух главах мы видели, что некоторые нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных при определенных граничных и начальных условиях можно точно проинтегрировать методом обратной задачи рассеяния (МОЗР). Стоит отметить, что этим способом мы получаем общее решение задачи, которое пока невозможно получить никаким другим методом. Тем не менее МОЗР не является единственно возможным подходом к этим задачам. В настоящей главе мы обсудим некоторые другие точки зрения на этот круг задач.

Довольно богатое многообразие имеющихся методов мы разобьем на группы в соответствии с тем, на какие из вопросов они позволяют дать ответ. Ниже представлена попытка такого разбиения, охватывающая различные подходы, в том числе и не рассматриваемые в этой главе.

Описание задач, интегрируемых при помощи МОЗР. Задачи, которые можно решить при помощи МОЗР, обладают целым рядом уникальных свойств, к которым относятся солитоны, бесконечная серия законов сохранения, полный набор переменных типа действие — угол. В общем случае уравнения не обладают такими свойствами и, по-видимому, не могут быть решены при помощи МОЗР. Поэтому возникает естественная задача *описать* множество нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния. С практической точки зрения важно, существует ли относительно простой тест, который применим непосредственно к заданному уравнению и позволяет ответить на вопрос, можно ли это уравнение решить при помощи какой-нибудь модификации МОЗР. Это относится к уравнениям в частных производных, дифференциально-разностным уравнениям, конечно-разностным и т. д. В этой главе, однако, мы остановимся исключительно на уравнениях в частных производных.

В настоящее время принято считать, что к $1+1$-мерному уравнению применим МОЗР, если оно обладает либо преобразованием Бэклунда (разд. 3.1), либо неабелевым псевдопотен-

циалом (разд. 3.2), либо точным N-солитонным решением (вероятно, $N \geqslant 3$ является достаточным, а $N=2$ еще нет [223], разд. 3.3.6), т. е. эти условия считаются достаточными для применимости МОЗР. С другой стороны, требование, чтобы дифференциальное уравнение в частных производных обладало «свойством Пенлеве» (разд. 3.7), предложено в качестве необходимого условия интегрируемости методом обратной задачи рассеяния. Условия, являющиеся необходимыми и достаточными, не известны [1].

В многомерном случае (с размерностью большей $1+1$) Захаров и Шульман (1980) [548] предложили метод, основанный на анализе дисперсионного соотношения линеаризованного уравнения. Гипотезу о свойстве Пенлеве (разд. 3.7) можно распространить на случай большего числа измерений. В настоящее время неизвестно, связаны ли эти два подхода.

Поиск задачи рассеяния. Пусть дана система, структура которой в принципе позволяет применить метод обратной задачи. Существует ли регулярная процедура нахождения соответствующей спектральной проблемы? Иначе говоря, существует ли метод поиска спектральной проблемы, настолько эффективный, что его неуспех гарантирует отсутствие существования такой проблемы?

Исторически наиболее успешным методом поиска задач рассеяния было угадывание операторов, иногда с использованием

---

[1]) В настоящее время проблему, сформулированную авторами в этом разделе для $1+1$-мерных дифференциальных уравнений, можно считать в основном решенной. В работах А. Б. Шабата, его соавторов и учеников получены условия интегрируемости — необходимые условия существования симметрии высокого порядка или по крайней мере двух локальных законов сохранения высокого порядка (см. оригинальные работы [1*] (1979), [2*] (1980), [3*] (1983), [4*] (1985) и обзор [5*] (1984)). Условия интегрируемости являются настолько эффективными, что их можно использовать не только для проверки заданного уравнения, но и для описания всех интегрируемых систем уравнений определенного вида. Эта программа впервые была полностью реализована в работе [1*], посвященной описанию нелинейных уравнений типа Клейна—Гордона, обладающих симметриями высокого порядка. Для квазилинейных уравнений третьего порядка аналогичная задача решена в [6*], [7*]. В работе [8*] дано исчерпывающее описание уравнений вида $u_t = F(x, u, u_x, u_{xx})$, обладающих симметрией порядка три или больше. Описание всех дифференциально-разностных эволюционных уравнений вида $u_n = f(u_{n-1}, u_n, u_{n+1})$, обладающих локальными законами сохранения высокого порядка, можно найти в [3*]. Описание систем уравнений является более сложной задачей. Сейчас она полностью решена только для систем двух уравнений вида $\mathbf{u}_t = \mathbf{A}(\mathbf{u})\mathbf{u}_{xx} + \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_x)$ (условия интегрируемости получены в работе [4*], описания систем в [9*], [10*], скоро будут опубликованы исчерпывающий список и классификация этих систем). Во всех этих случаях удалось доказать, что несколько первых условий интегрируемости являются не только необходимыми, но и достаточными для описания систем с богатым набором симметрий или локальных законов сохранения высокого порядка. — *Прим. перев.*

наводящих соображений, почерпнутых из заранее известного преобразования Бэклунда (разд. 3.1). Псевдопотенциалы (разд. 3.2) представляют другой подход, опирающийся на меньшее число гипотез и в ряде случаев являющийся исчерпывающим. Чень, Ли и Ли (1979) [104] предложили метод, основанный на линеаризации, который позволяет проверить эволюционное уравнение на интегрируемость и одновременно приводит к задаче рассеяния, если таковая существует. Сатсума (1979) [446] предложил использовать солитонные решения и билинейные формы для построения преобразований Бэклунда и задач рассеяния. Геометрические и теоретико-групповые методы также использовались в ряде частных случаев.

Частные решения. Одна из привлекательных точек зрения состоит в том, чтобы отказаться от исследования общего решения и ограничиться изучением точных частных решений задачи (т. е. N-солитонных на бесконечном интервале и N-зонных потенциалов для периодической задачи). «Прямые» методы поиска этих частных решений развиты в разд. 3.3 и 3.6. Они обычно более просты, чем МОЗР, и позволяют избежать некоторых деликатных аналитических вопросов, возникающих при изучении задачи рассеяния. Прямые методы позволяют к тому же получить решения вне класса функций, в котором традиционно применяют МОЗР. Этот более широкий класс содержит рациональные решения (разд. 3.4), многомерные солитоны и лампы (разд. 3.6) и автомодельные решения, содержащие, в частности, трансценденты Пенлеве (разд. 3.7).

Что происходит? Ряд работ в этой области ставит целью не расширение класса уравнений, интегрируемых при помощи МОЗР, а выяснение вопроса, почему это «чудо» происходит. В некоторых работах предполагается, что теория групп лежит в основе этого удивительного метода (см., например, [122], [271], [60], [208]). Сходные точки зрения исходят из дифференциальной геометрии (Эстабрук (1981) [150]) и из алгебраической структуры гамильтоновых операторов (Гельфанд, Дикий (1977) [181], Адлер (1979) [31], Лебедев, Манин (1978) [322], Дикий, Дорфман, Гельфанд (1979) [140]). Дейфт и Трубовиц (1980) [137] рассматривают задачи, решаемые при помощи МОЗР, в терминах бесконечного числа связанных осцилляторов, лежащих на поверхности гиперсферы. Это описание применимо как в случае периодической задачи, так и для задачи на бесконечном интервале.

Исследование структуры. Другая точка зрения — просто принять, что рассматриваемые задачи обладают богатой структурой, последовательное изучение которой расширит нам арсенал

математических приемов и объектов. Примерами могут служить развитая Мак-Кином и Трубовицем (1976) [368] теория гиперэллиптических функций с бесконечным числом точек ветвления и работа Новикова и Кричевера (1980) [402] об обобщенных гиперэллиптических функциях.

Итак, имеется довольно много различных подходов к задачам, решаемым с помощью МОЗР. Некоторые из них мы обсудим в этой главе.

3.1. Преобразования Бэклунда. Этот раздел посвящен преобразованиям локально определенных решений уравнений в частных производных. Может случиться, что эти локальные решения допускают продолжение до глобальных решений, обсуждающихся в предыдущих главах, но эта возможность здесь не существенна. В настоящем разделе и в разд. 3.2 под решениями дифференциального уравнения в частных производных следует понимать локальные решения, определенные в некоторой открытой односвязной области, которые не обязаны удовлетворять каким-то конкретным граничным и начальным условиям. Кроме этого, считается, что решение классическое (т. е. в сильной топологии). Например, если $u(x, t)$ является решением уравнения КдФ, тогда $(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xxx})$ должны быть все определены поточечно в некоторой области и

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Для простоты мы ограничимся рассмотрением систем дифференциальных уравнений в частных производных в двумерном пространстве-времени (x, t). Различия между временной и пространственной переменными отсутствуют, так как анализ является локальным. Для обозначения дифференциальных уравнений в частных производных мы будем использовать выражения

$$D(u) = 0 \quad \text{и} \quad E(v) = 0.$$

В зависимости от контекста это могут быть одно и то же или разные уравнения.

Мы начнем с некоторых определений.

Определение. Говорят, что соотношение

$$L(u, v, u_x, v_x, u_t, v_t, \ldots; x, t) = 0$$

(или набор таких соотношений) *отображает* $E(v) = 0$ *в* $D(u) = 0$, если любое (локальное) решение уравнения $E(v) = 0$ однозначно определяет некоторое (локальное) решение уравнения $D(u) = 0$.

Пример. Из преобразования Миуры

(3 1.1) $$u = -v_x - v^2$$

следует, что

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = -\left(\frac{\partial}{\partial x} + 2v\right)(v_t - 6v_x^2 + v_{xxx}).$$

Поэтому каждое решение уравнения мКдФ отображается с помощью (3.1.1) в некоторое решение уравнения КдФ.

Пример. Преобразование Коула [114] и Хопфа [234]

(3.1.2) $$u = -2\nu \frac{\theta_x}{\theta}$$

отображает решения уравнения теплопроводности в решения уравнения Бюргерса [81], так как (3.1.2) означает, что

(3.1.3) $$u_t + uu_x - \nu u_{xx} = -\frac{2\nu}{\theta}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\theta_x}{\theta}\right)(\theta_t - \nu\theta_{xx}).$$

Отметим два момента. Во-первых, это обычное определение отображения, и нет никакой необходимости вводить новую терминологию для описания замен (3.1.1), (3.1.2). Во-вторых, эти отображения не определяют однозначно ни $D(u) = 0$, ни $E(v) = 0$. Так, уравнение

(3.1.4) $$u_t + cu_x = 0$$

отображается в себя и преобразованием (3.1.1), и (3.1.2). Фактически преобразование (3.1.1) отображает последовательность «высших» уравнений мКдФ в последовательность «высших уравнений» КдФ; аналогичное утверждение можно сделать и относительно преобразования (3.1.2) (упр. 1, 2).

Определение. Набор соотношений, включающих $\{x, t, u(x, t)\}$, $\{X, T, V\ (X, T)\}$ и производные u и V, является преобразованием Бэклунда (ПБ) между $D(u; x, t)$ и $E(V; X, T)$, если:

(i) ПБ является интегрируемым для V, если и только если $D(u) = 0$;

(ii) ПБ является интегрируемым для u, если и только если $E(V) = 0$;

(iii) по заданному u, такому, что $D(u) = 0$, ПБ позволяет определить V с точностью до конечного числа констант, причем $E(V) = 0$;

(iv) по заданному V, такому, что $E(V) = 0$, ПБ позволяет определить u с точностью до конечного числа констант, причем $D(u) = 0$.

(Напомним, что $v_x = f(x, t)$ и $v_t = g(x, t)$ называются интегрируемыми относительно v, если и только если $v_{xt} = v_{tx}$, т. е. они должны быть совместными.)

Пример. В теории комплексного переменного соотношения Коши — Римана

(3.1.5) $$u_x = v_y, \qquad v_x = -u_y$$

являются ПБ для уравнения Лапласа в себя. Чтобы убедиться в этом, исключим u из (3.1.5) и получим

$$v_{xx} + v_{yy} = 0. \tag{3.1.6}$$

По заданному v, удовлетворяющему (3.1.6), (3.1.5), можно определить u с точностью до одной константы $u_0 = u(x_0, y_0)$. Так, если соотношения (3.1.5) симметричны, то функция u также должна удовлетворять уравнению (3.1.6).

Пример. Преобразование, обсуждавшееся Бэклундом (1880) [46], имеет вид

$$\left(\frac{u+v}{2}\right)_x = a \sin\left(\frac{u-v}{2}\right), \quad \left(\frac{u-v}{2}\right)_t = \frac{1}{a}\sin\left(\frac{u+v}{2}\right). \tag{3.1.7}$$

Оно отображает решения уравнения sin-Гордон

$$\varphi_{xt} = \sin\varphi \tag{3.1.8}$$

в себя. Этот факт легко проверить перекрестным дифференцированием (3.1.7).

Пример. Задачей рассеяния для уравнения КдФ является

$$\psi_{xx} + (\zeta^2 + u)\psi = 0, \tag{3.1.9a}$$

$$\psi_t = (\alpha(\zeta) + u_x)\psi + (4\zeta^2 - 2u)\psi_x. \tag{3.1.9b}$$

Эти соотношения также являются преобразованиями Бэклунда между КдФ и уравнением

$$\psi_t + \psi_{xxx} - \alpha\psi - 6\zeta^2\psi_x - \frac{3\psi_x\psi_{xx}}{\psi} = 0. \tag{3.1.10}$$

В этом случае (3.1.10) получается исключением u при помощи (3.1.9a). Уравнение КдФ получается как условие совместности ($\psi_{xxt} = \psi_{txx}$). Отметим, что u однозначно определяется по ψ (за исключением точек, в которых ψ равно нулю), при этом ψ определяется по u с точностью до двух постоянных (ψ и ψ_x при $\{x_0, t_0\}$).

Разница между преобразованием Бэклунда и отображением состоит в следующем. При заданном v отображение однозначно определяет u, но не конкретизирует ни уравнения $D(u) = 0$, ни $E(v) = 0$. Преобразование Бэклунда не обязательно определяет u однозначно даже при заданном v, но конкретизирует и $D(u) = 0$, и $E(v) = 0$. Часто ПБ можно построить из отображения, задав подходящее эволюционное уравнение.

Пример.

$$v_x = -u - v^2, \tag{3.1.11a}$$

$$u_t = 6v^2v_x - v_{xxx} \tag{3.1.11b}$$

являются ПБ между уравнениями КдФ и мКдФ. Отметим, что (3.1.11a) есть в точности (3.1.1). При желании (3.1.11b) можно

переписать в виде, не содержащем производных по x от v, воспользовавшись несколько раз соотношением (3.1.11а).

Аналогично (3.1.9а) представляет собой отображение из ψ в u (в области, где $\psi \neq 0$).

Для сравнения приведем несколько других возможных типов преобразований.

(i) Простейшими являются точечные преобразования

(3.1.12) $$u = u(v;\ x,\ t).$$

Если задана двумерная поверхность, определяемая с помощью $v(x, t)$, то соотношение (3.1.12) определяет новую поверхность. При этом никаких свойств дифференцируемости не предполагается. Примером служит (3.1.1)[1]).

(ii) *Контактные преобразования* (или касательные преобразования, или преобразования Ли) характеризуются следующим геометрическим свойством: поверхности, в одном пространстве имеющие общую касательную в некоторой точке, отображаются в поверхности другого пространства с общей касательной в соответствующей точке. Если $v(x, t)$ отображается в $u(X, T)$, то преобразование является контактным, если

(3.1.13) $$du - u_X\, dX - u_T\, dT = (dv - v_x\, dx - v_t\, dt)\, \rho,$$

где ρ — функция от $(v, v_x, v_t; x, t)$, не имеющая нулей. Теория таких преобразований была развита в работах Ли; можно также сослаться на книгу [166]. Примером может служить преобразование годографа, используемое в газовой динамике, которое меняет роли зависимых и независимых переменных[2]). Однако эти преобразования отличаются от ПБ, поскольку в (3.1.13) не требуется, чтобы u, v удовлетворяли какому-нибудь конкретному уравнению в частных производных.

(iii) Контактные преобразования можно обобщить, потребовав сохранение контактной структуры более высокого порядка. Такие преобразования были названы *преобразованиями Ли — Бэклунда* (Андерсен, Ибрагимов [41]). Наименование может сбить с толку читателя, ибо приведенное здесь преобразование не имеет очевидной связи с определенным в этом разделе преобразованием Бэклунда (см., однако, [164], [237]).

---

[1]) Здесь авторы привели неудачный пример, так как отображение (3.1.1) содержит производную v_x. Точечное преобразование обычно определяют как отображение вида $u = u(v, x, t)$, $X = X(v, x, t)$, $T = T(v, x, t)$, причем функции u, X, T не зависят от производных $v_x, \ldots$, и якобиан преобразования отличен от нуля. В этом случае преобразование является локально обратимым по теореме о неявной функции. — *Прим. перев.*

[2]) Указанное здесь преобразование годографа относится к точечным преобразованиям (см. предыдущее примечание). Примером контактного преобразования является хорошо известное преобразование Лежандра. — *Прим. перев.*

(iv) Пирани (1979) [423] дал другое определение ПБ на языке локальных расслоений джетов.

Сейчас мы перейдем к главному вопросу. Какое отношение имеют преобразования Бэклунда к солитонам и МОЗР? Существует много ответов на этот вопрос, но наиболее фундаментальным нам кажется следующий: задача рассеяния и связанная с ней эволюция по времени, образующие в совокупности метод обратной задачи рассеяния, являются также преобразованием Бэклунда. В действительности это соответствие можно доказать довольно легко для широкого класса задач.

Теорема. *Пусть*

(3.1.14) $$v_{1x} + i\zeta v_1 = qv_2, \quad v_{2x} - i\zeta v_2 = rv_1,$$

(3.1.15) $$v_{1t} = Av_1 + Bv_2, \quad v_{2t} = Cv_1 - Av_2,$$

и пусть $\mathbf{u} = (q, r)$ *удовлетворяет системе эволюционных уравнений* $D(\mathbf{u}) = 0$ *совместно с* (3.1.14) *и* (3.1.15) *с полиномиальным законом дисперсии. Тогда для всех* ζ *соотношения* (3.1.14) *и* (3.1.15) *представляют собой преобразование Бэклунда между* $D(\mathbf{u}) = 0$ *и* $E(\mathbf{v}, \zeta) = 0$, *где* $E(\mathbf{v}, \zeta) = 0$ — *это некоторая система двух дифференциальных уравнений на* $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, *зависящая от* ζ *и не зависящая от* $\mathbf{u}$.

Доказательство. По предположению условие интегрируемости системы (3.1.14), (3.1.15) для $\mathbf{v}$ — это $D(\mathbf{u}) = 0$; это есть условие (i) в определении ПБ. Затем при заданном $\mathbf{u}$, удовлетворяющем уравнению $D(\mathbf{u}) = 0$, решение задачи рассеяния определяет $\mathbf{v}$ с точностью до двух констант (в гл. 1 они были зафиксированы, скажем, выбором граничных условий при $x \to +\infty$). Таким образом, выполнено условие (iii) в определении. При любом заданном $\mathbf{v}$, причем ни v_1, ни v_2 не обращаются в нуль в некоторой области, вектор $\mathbf{u}$ однозначно определяется с помощью (3.1.14); это условие (ii). И наконец, так как дисперсионное соотношение линеаризованного уравнения $D(\mathbf{u}) = 0$ является полиномиальным, то коэффициенты (A, B, C) можно выразить через $\mathbf{u}$ и производные по x конечного порядка (см. разд. 1.2). Затем, воспользовавшись соотношениями (3.1.14), можно выразить (A, B, C) в терминах ζ, v_1, v_2 и производных по x конечного порядка. Подставив результат в (3.1.15), получим систему $E(\mathbf{v}, \zeta) = 0$, которой должен удовлетворять вектор $\mathbf{v}$. Итак, мы продемонстрировали выполнение условия (iv) и завершили доказательство теоремы. □

Возможность представления задачи рассеяния как ПБ не ограничивается случаем эволюционных уравнений с полиномиальным дисперсионным соотношением или данным частным случаем задачи рассеяния. Мы не будем здесь пытаться доказывать более общую теорему, а некоторые примеры, выходящие за рамки этих ограничений, даны в упражнениях.

Теперь у нас имеются три различные интерпретации МОЗР:

(1) МОЗР — это обобщение преобразования Фурье, применимое для некоторых нелинейных уравнений.

(2) МОЗР — это каноническое преобразование к переменным типа действие — угол вполне интегрируемой гамильтоновой системы.

(3) МОЗР — это преобразование Бэклунда.

Справедлива каждая из этих интерпретаций, но подчеркивают они разные аспекты МОЗР. Дает ли какая-нибудь из них удовлетворительный ответ на вопрос «почему же работает МОЗР?» — это до некоторой степени зависит от вкуса читателя.

Если известно, что данное дифференциальное уравнение имеет однопараметрическое семейство ПБ (т. е. определена задача рассеяния), связывающих его с семейством других уравнений, то нет ничего удивительного в том, что можно построить ПБ этого уравнения в себя. Простейший способ сделать это предложил Чень [101, 102]. Чтобы проиллюстрировать его метод, выведем ПБ уравнения КдФ в себя, исходя из задачи рассеяния для КдФ. Если определить $v = \psi_x/\psi$, тогда (3.1.9a) дает

$$v_x = -\zeta^2 - u - v^2, \tag{3.1.16a}$$

а (3.1.10) эквивалентно

$$v_t = 6(v^2 + \zeta^2)v_x - x_{xxx}. \tag{3.1.16b}$$

Это преобразование является простым обобщением (3.1.11) и сводится к нему при $\zeta^2 = 0$. Существенным в методе Ченя является следующий момент: если v — решение уравнения (3.1.16b), то получим два различных решения u и u' уравнения КдФ из «одного и того же» v:

$$\begin{aligned} v_x &= -\zeta^2 - u - v^2, \\ (-v)_x &= -\zeta^2 - u' - (-v)^2. \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

Складывая и вычитая, получим

$$-\frac{u+u'}{2} = \zeta^2 + v^2, \qquad \frac{u-u'}{2} = -v_x. \tag{3.1.18}$$

Определим потенциальную функцию w, такую, что $u = w_x$; при этом из (3.1.18) следует, что

$$\begin{aligned} &\frac{w-w'}{2} - v, \\ -&\left(\frac{w+w'}{2}\right)_x = \zeta^2 + \left(\frac{w-w'}{2}\right)^2. \end{aligned} \tag{3.1.19}$$

Эта «x-часть» преобразования Бэклунда уравнения КдФ в себя была найдена первоначально Уолквистом и Эстабруком [496].

Вторая компонента находится подстановкой (3.1.19) в (3.1.16b):

$$\left(\frac{w-w'}{2}\right)_t + 6\left(\frac{w+w'}{2}\right)_x \left(\frac{w-w'}{2}\right)_x + \left(\frac{w-w'}{2}\right)_{xxx} = 0. \tag{3.1.20}$$

Равенства (3.1.19), (3.1.20) определяют ПБ уравнения

$$w_t + 3w_x^2 + w_{xxx} = 0 \tag{3.1.21}$$

в себя. Решение уравнения КдФ находится по формуле $u = w_x$.

Важный момент здесь состоит в том, что u' можно построить из u, поскольку замена $v \to (-v)$ сохраняет (3.1.16b), но изменяет (3.1.16a). Непосредственно воспользоваться этим трюком в задаче рассеяния нельзя, поскольку замена $\psi \to (-\psi)$ не меняет ни (3.1.10), ни (3.1.9a). В этом случае можно воспользоваться симметрией $\psi \to 1/\psi$, не меняющей соотношение (3.1.10), но изменяющей (3.1.9a). Уравнения, соответствующие (3.1.17), в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} u &= -\zeta^2 - \frac{\psi_{xx}}{\psi}, \\ u' &= -\zeta^2 + \frac{\psi_{xx}}{\psi} - 2\left(\frac{\psi_x}{\psi}\right)^2. \end{aligned} \tag{3.1.22}$$

Преобразовывая эти выражения, мы опять придем к (3.1.19).

Следует подчеркнуть, что (3.1.19) сохраняется для всех высших уравнений КдФ, которые порождены той же самой (пространственной) задачей рассеяния (3.1.9a). Компонента t преобразования, т. е. (3.1.10), определяет, какое конкретное уравнение преобразуется.

Вывод ПБ уравнения в себя, основанный на подходящей задаче рассеяния, обсуждался также в работах Абловица, Каупа, Ньюэлла и Сигура (1974) [12] и Коно, Вадати (1975) [288]. Исторически преобразования Бэклунда использовались не только для отыскания соответствующих задач рассеяния, но и для построения частных решений задач (например, солитонов). Мы видели, каким образом ПБ часто приводили к задачам рассеяния. Теперь давайте обсудим, как строить частные решения при помощи ПБ. В частности, рассмотрим однопараметрические семейства ПБ уравнений в себя, скажем (3.1.7) для уравнения sin-Гордон и (3.1.19), (3.1.20) для уравнения КдФ. Если известно одно решение уравнения, то интегрирование преобразования Бэклунда позволяет построить другое решение. В каждом изученном случае, однако, даже без этого единственного интегрирования можно обойтись, доказав «теорему о суперпозиции» (см. [311, 312]). Эту теорему впервые доказал Бьянки (1902) [64] для уравнения sin-Гордон (3.1.8). Из (3.1.7) он

вывел, что четыре решения уравнения (3.1.8) связаны формулой

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_4-\varphi_1}{4}\right)=\frac{a_1+a_2}{a_1-a_2}\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_2-\varphi_3}{4}\right), \tag{3.1.23}$$

где (a_1, a_2) — произвольные постоянные. Этот результат, как показал Лэм [309], можно использовать для получения точного N-солитонного решения. При известном ПБ уравнения в себя нетрудно найти формулу, аналогичную (3.1.23), но доказательство ее справедливости весьма утомительно. Подробности можно найти в [311, 312] (см. также разд. 3.3, где ПБ обсуждаются с точки зрения билинейных уравнений Хироты).

Грубо говоря, действие ПБ на заданное решение уравнения (скажем, КдФ) сводится к тому, что добавляется или уничтожается один солитон. Если до преобразования решение (u_0) удовлетворяло неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty}|u_0|(1+|x|)\,dx<\infty, \tag{3.1.24}$$

то можно сформулировать более точное утверждение. Мы покажем, что в результате действия на u_0 преобразованием Бэклунда порождается решение u_1, также удовлетворяющее (3.1.24), причем его спектр (как потенциала в (3.1.9a)) отличается от спектра u_0 в точности на одно дискретное собственное значение. Приведенное здесь изложение основывается на работах Дейфта и Трубовица [136] (см. также [382], в особенности статью Уолквиста), Вадати, Сануки и Коно [494], Калоджеро [89]. Отметим, что зависимость от времени никак не отражается на наших рассуждениях, и поэтому мы ее опускаем. По этой же причине полученные результаты справедливы для любого уравнения КдФ высшего порядка, связанного с задачей рассеяния (3.1.9a).

Пусть $u_0(x)$ является вещественной функцией, удовлетворяющей условию (3.1.24), и

$$\psi_{xx}+u_0\psi=-\lambda\psi,\qquad -\infty<x<\infty$$

в точках дискретных вещественных собственных значений $\lambda=-\varkappa_n^2<\ldots<-\varkappa_1^2$. Возможность $n=0$ не исключается, и, кроме того, эта задача может иметь непрерывный спектр. Пусть $\zeta^2>\varkappa_n^2$ и пусть $g(x)$ удовлетворяет уравнению

$$g_{xx}+u_0g=\zeta^2g, \tag{3.1.25}$$

причем $g(x)>\varepsilon>0$ при всех x. Дейфт и Трубовиц [136], обобщив теорему Крума [127], показали, что если определить u_1 выражением

$$u_1=u_0+2\frac{d^2}{dx^2}\ln g, \tag{3.1.26}$$

то u_1 удовлетворяет (3.1.34), а спектр задачи

(3.1.27) $$\psi_{xx} + u_1\psi = -\lambda\psi$$

имеет $n+1$ дискретных собственных значений $\lambda = -\zeta^2 < < -\varkappa_n^2 < \ldots < -\varkappa_1^2$. При этом собственная функция, отвечающая $(-\zeta^2)$, имеет вид $1/g(x)$, в чем можно убедиться непосредственной подстановкой в (3.1.27).

Чтобы связать (3.1.26) с (3.1.19), положим $v = g_x/g$. Так как $g > \varepsilon > 0$, то v определено всюду. Из (3.1.25) следует, что

$$v_x = \frac{g_{xx}}{g} - \left(\frac{g_x}{g}\right)^2,$$

т.е.

(3.1.28) $$v_x = -u_0 - (-\zeta^2) - v^2,$$

что является преобразованием Миуры. Если положить $w_x = u$, то (3.1.26) превращается в

$$(w_1)_x = (w_0)_x + 2v_x,$$

так что

$$v = \frac{w_1 - w_0}{2},$$

а из (3.1.28) получим

$$\left(\frac{w_1 + w_0}{2}\right)_x = \zeta^2 - \left(\frac{w_1 - w_0}{2}\right)^2.$$

Последнее совпадает с (3.1.19) после замены $\zeta^2 \to -\zeta^2$. Если функции u_0 и u_1 удовлетворяют (3.1.19), а каждая из них уравнению КдФ, то соотношение (3.1.20) удовлетворяется автоматически.

В рассмотренном случае мы показали, что ПБ добавляет одно собственное значение к спектру, т. е. добавляет один солитон. Напротив, если бы мы взяли u_1 в качестве заданной функции, то функция u_0 определилась бы из соотношений (3.1.19, 20) и требования $u_0 \to 0$ при $x \to \infty$. Функция u_0 также удовлетворила бы уравнению КдФ, а спектры задач рассеяния с потенциалами u_1 и u_0 отличались бы ровно на одно собственное значение. Таким образом, ПБ может добавлять или уничтожать солитоны. Дейфт и Трубовиц [136] вывели N-солитонную формулу для уравнения КдФ, воспользовавшись теоремой Крума.

С целью упростить изложение в этом разделе мы ограничились рассмотрением ПБ только для дифференциальных уравнений в частных производных. Однако близкая аналогия между непрерывными и дискретными задачами, обсуждавшаяся в разд. 2.2, наводит на мысль, что дискретные ПБ должны бы

иметь то же значение для конечно-разностных уравнений, какое непрерывные ПБ имеют для уравнений в частных производных. Работа по дискретным ПБ началась совсем недавно, но уже имеется несколько примеров дискретных ПБ уравнений в себя, построенных Ченем [101] и Хиротой [221, 224].

Мы не задавались вопросом, как определить, имеет ли наперед заданное уравнение преобразование Бэклунда в себя или в какое-нибудь другое уравнение? Этот вопрос предложил Клерен (1903) [111], но мы отложим обсуждение его метода до следующего раздела.

3.2. Псевдопотенциалы и структуры продолжения. Как и в предыдущем разделе, здесь мы интересуемся локальными решениями дифференциальных уравнений в частных производных в двумерном пространстве. Псевдопотенциалы, впервые обсуждавшиеся Уолквистом и Эстабруком [496, 497], тесно связаны с преобразованиями Бэклунда и МОЗР. Обычно теория псевдопотенциалов излагается на отличающемся от принятого в этой книге языке внешних дифференциальных форм (см., например, [384] и приведенные там ссылки), но, как отмечали Коронес [121] и Кауп [264], в этом нет большой необходимости. Изложение, принятое в этом разделе, не требует знания теории дифференциальных форм.

3.2. а. Основные концепции. В основе первой работы Уолквиста и Эстабрука лежит тот факт, что уравнение КдФ имеет бесконечный набор локальных законов сохранения

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

где $\{T_i, F_i\}$ — известные функции $u(x, t)$ производных по x конечного порядка x и t. Каждый такой закон сохранения определяет потенциальную функцию w_i:

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} = F_i, \quad \frac{\partial w_i}{\partial x} = -T_i,$$

т. е.

$$dw_i = F_i\,dt - T_i\,dx \tag{3.2.1}$$

является полным дифференциалом. При заданной функции u и ее производных функцию w_i можно определить интегрированием (3.2.1). Например, записав уравнение КдФ в виде

$$u_t + (3u^2 + u_{xx})_x = 0,$$

мы получим простейший потенциал

$$w_t = 3u^2 + v_{xx}, \quad w_x = -u, \tag{3.2.2}$$

т. е.

$$w(x, t) = -\int^{x} u(\tilde{x}, t)\, d\tilde{x}. \tag{3.2.3}$$

При подходящих ограничениях $(-w)$ удовлетворяет (3.1.21). Таким образом, для заданного решения уравнения КдФ w является функцией от $\{x, t\}$, определенной по формуле (3.2.3). С другой стороны, рассматривая всевозможные локальные решения уравнения КдФ, функцию w можно представлять себе зависящей от пяти независимых переменных $\{x, t, u, u_x, u_{xx}\}$; при этом w определяется соотношениями (3.2.2) с точностью до аддитивной константы.

Когда w зафиксировано (выбором константы), можно расширить пространство независимых переменных до $\{x, t, u, u_x, u_{xx}, w\}$ и попытаться искать новые потенциалы, определенные в этом расширенном пространстве. Это называется «продолжением» первоначального набора переменных, а последовательность потенциалов, полученных повторением продолжений, определяет *структуру продолжения* рассматриваемой задачи.

Следующий потенциал w_1 (если он существует) подчиняется уравнению вида

$$\begin{aligned} (w_1)_x &= A(x, t, u, u_x, u_{xx}, w), \\ (w_1)_t &= B(x, t, u, u_x, u_{xx}; w), \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

где A, B должны определяться из условия $(w_1)_{xt} = (w_1)_{tx}$ (условия интегрируемости) и того факта, что u является решением уравнения КдФ. Продвигаясь по этому пути, найдем последовательность уравнений вида (3.2.4), причем на каждом шаге функции A, B в правой части зависят от первоначального набора переменных и всех новых уже найденных потенциалов. Когда A и B известны, уравнения можно решить, взяв интегралы по известным функциям.

С другой стороны, если допустить, что неизвестные потенциалы входят также в правую часть, то последовательность уравнений типа (3.2.4) заменится на систему уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} \partial_x(w_i) &= A_i(x, t, u, u_x, u_{xx}; \mathbf{w}) \\ \partial_t(w_i) &= B_i(x, t, u, u_x, u_{xx}; \mathbf{w}) \end{aligned}\right\} \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{3.2.5}$$

где $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_N)$. При заданном N и известных $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ найти решение системы (3.2.5) означает решить систему дифференциальных уравнений в противоположность предыдущему случаю, когда решение получалось последовательным вычислением интегралов. Таким образом, решения системы (3.2.5) не обязательно ограничиваются обсуждавшейся выше последовательностью потенциалов. Уолквист и Эстабрук [496] назвали реше-

ния системы (3.2.5) *псевдопотенциалами*. По причинам, которые будут объяснены ниже, псевдопотенциалы, не являющиеся эквивалентными последовательности потенциалов, называются *неабелевыми*.

Примеры. (1) Преобразование Бэклунда (3.1.11) между уравнениями КдФ и мКдФ является *псевдопотенциалом*, так как его можно привести к виду (3.2.4), т. е. (3.2.5) с $N = 1$:

$$v_x = -u - v^2,$$
$$v_t = u_{xx} + 2u^2 + 2uv^2 - 2u_x v.$$

(2) Задачу рассеяния для уравнения КдФ (3.1.9) можно переписать в виде

$$\psi_x = \varphi, \quad \psi_t = (\alpha + u_x)\psi + (4\zeta^2 - u)\varphi,$$
$$\varphi_x = -(\zeta^2 + u)\psi, \quad \varphi_t = [u_{xx} - (4\zeta^2 - 2u)(\zeta^2 + u)]\psi + (\alpha - u_x)\varphi$$

Таким образом, собственная функция для (3.1.9) также является псевдопотенциалом с $N = 2$.

(3) Обобщенная задача рассеяния Захарова — Шабата (1.2.7) с A, B, C, представленными конечными рядами, также имеет вид (3.2.5) с $N = 2$. Все эти примеры неабелевы, последние два линейны по псевдопотенциалам. Следует иметь в виду, что псевдопотенциалы, преобразования Бэклунда и МОЗР являются весьма тесно внутренне связанными лежащей в их основе концепцией совместности ∂_x и ∂_t. В частности, линейная задача рассеяния (без граничных условий) для заданного дифференциального уравнения частных производных является по определению тоже псевдопотенциалом. Поэтому если доказано, что некоторое уравнение не обладает псевдопотенциалами (независимо от того, линейны они или нет), тогда отсутствует задача рассеяния, и это уравнение не может быть решено при помощи МОЗР.

Таким образом мы пришли к одной из нерешенных фундаментальных проблем:

Имеется ли систематический метод, позволяющий для заданного дифференциального уравнения в частных производных найти псевдопотенциал, если он существует, либо сделать заключение о его несуществовании?

Этот вопрос относится к системам с любым числом независимых переменных, но мы ограничимся только двумя.

3.2. b. Задачи с полиномиальным дисперсионным соотношением. Наиболее простые результаты относятся к уравнениям первого порядка по t и конечного порядка по x. В этом случае дисперсионное соотношение линеаризованного уравнения $\omega(k)$ является полиномом. Ниже мы покажем, что с учетом некоторых

ограничений на вид уравнения вопрос о нахождении псевдопотенциала всегда можно свести к некоторому вопросу из теории алгебр Ли. Важным следствием этого сведения, как мы покажем, является следующий факт: если заданное уравнение не имеет линейного псевдопотенциала, то оно не имеет никакого псевдопотенциала.

Метод Уолквиста и Эстабрука [496, 497] для нахождения псевдопотенциалов также использовался в работах [121], [123] и [264]. Он имеет много общего с существенно более старым методом Клерена (1903) [111], который использовался в работах [311], [312] и других. Для иллюстрации метода мы рассмотрим уравнение Бюргерса

$$u_t + uu_x = u_{xx}. \tag{3.2.6}$$

Мы интересуемся всевозможными (локальными) решениями уравнения (3.2.6), так что все u, u_x, u_{xx}, ... могут быть заданы независимо в некоторой точке, а их производные по t находятся с помощью (3.2.6). Если допускаются комплексные решения, то производные по x от u^* также будут независимы. Мы попытаемся найти псевдопотенциал, который зависит от u и его производных, имеющих меньший порядок, чем уравнение. Для (3.2.6) это означает

$$\left.\begin{aligned} \partial_x(q_i) &= A_i(u, u_x, \mathbf{q}) \\ \partial_t(q_i) &= B_i(u, u_x, \mathbf{q}) \end{aligned}\right\}, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{3.2.7}$$

где $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_N)$ для некоторого конечного N.

(i) Если $N = 1$, то q — скалярная функция, и (3.2.7) имеет вид ПБ.

(ii) Если A_i и B_i линейны по $\mathbf{q}$, то

$$\begin{aligned} \partial_x(q_i) &= A_{ij}q_j, \\ \partial_t(q_i) &= B_{ij}q_j, \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

где $A_{ij}(i, u_x)$ и $B_{ij}(u, u_x)$ являются $N \times N$-матрицами (в (3.2.8) подразумевается суммирование по повторяющимся индексам). Если A_{ij}, B_{ij} к тому же содержат свободный параметр (т. е. «спектральный параметр»), то (3.2.8) является кандидатом в задачи рассеяния. Ниже мы увидим, что если существует какой-нибудь псевдопотенциал, то существует линейный псевдопотенциал (с некоторой конечной размерностью).

При фиксированных **A**, **B** система (3.2.7) является совместной, если

$$(\mathbf{q})_{xt} = (\mathbf{q})_{tx}. \tag{3.2.9}$$

Это основное требование на псевдопотенциал. Важно отметить, что в гл. 1 основные уравнения (1.2.8) были получены из того же требования (интегрируемости (1.2.7)).

Для уравнения Бюргерса (3.2.6)

$$\mathbf{q}_{xt} = (u_{xx} - uu_x)\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u} + (u_{xxx} - (uu_x)_x)\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u_x} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A},$$

(3.2.10)

$$\mathbf{q}_{tx} = u_x\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial u} + u_{xx}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial u_x} + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B},$$

где $(\mathbf{A}\cdot\nabla) \equiv \sum_i A_i\partial/\partial q_i$. Так как u_{xxx} (локально) не зависит от u, u_x, u_{xx}, то необходимым условием выполнения (3.2.9) является

(3.2.11) $$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u_x} = 0.$$

Поэтому же должны быть равны коэффициенты при u_{xx}:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial u_x}(u, u_x, \mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u}(u, \mathbf{q}),$$

так что

(3.2.12) $$\mathbf{B}(u, u_x, \mathbf{q}) = u_x\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u}(u, \mathbf{q}) + \mathbf{C}(u, \mathbf{q}).$$

Таким образом, (3.2.9) сводится к

(3.2.13) $$u_x^2\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial u^2} + u_x\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial u} + uu_x\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u} + u_x\left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u}, \mathbf{A}\right] + [\mathbf{C}, \mathbf{A}] = 0,$$

где

(3.2.14) $$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \equiv (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}.$$

Для $N = 1$

$$[A, B] = B\frac{\partial A}{\partial q} - A\frac{\partial B}{\partial q} = B^2\frac{\partial}{\partial q}\frac{A}{B},$$

при этом для линейных псевдопотенциалов $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ пропорционален обычному коммутатору матриц:

(3.2.15) $$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = (A_{ij}B_{jk} - B_{ij}A_{jk})q_k$$

(доказывается вычислением).

В (3.2.13) зависимость от u_x теперь является явной. Коэффициент при u_x^2 (т. е. $\partial^2\mathbf{A}/\partial u^2$) должен быть равным нулю, поэтому

(3.2.16) $$\mathbf{A} = u\alpha(\mathbf{q}) + \beta(\mathbf{q}).$$

Приравнивая в (3.2.13) нулю коэффициент при u_x, получим

$$\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{C}(u, \mathbf{q}) + \alpha(\mathbf{q})u + [\alpha, \beta] = 0,$$

и после интегрирования по u

(3.2.17) $$\mathbf{C} = -\frac{u^2}{2}\alpha - u[\alpha, \beta] + \delta(\mathbf{q}).$$

Определим

(3.2.18) $$\gamma(q) \equiv [\alpha, \beta]$$

и подставим (3.2.16)—(3.2.18) в (3.3.13). Коэффициенты при u^2, u и 1 вместе с (3.2.18) дадут

(3.2.19) $$\begin{gathered} [\alpha, \gamma] + \frac{1}{2}\gamma = 0, \\ [\alpha, \delta] - [\beta, \gamma] = 0, \\ [\delta, \beta] = 0, \\ [\alpha, \beta] - \gamma = 0. \end{gathered}$$

Таким образом, уравнение (3.2.6) имеет псевдопотенциалы вида (3.2.7) тогда и только тогда, когда система (3.2.19) имеет нетривиальное решение. Для эволюционных уравнений первого порядка по времени и конечного порядка по x вопрос о существовании псевдопотенциалов всегда сводится к решению конечного набора соотношений типа (3.2.19). Например, читатель может проверить, что если бы мы начали с уравнения Фишера (1937) [154] (популярная модель динамики популяций; см., например, [235])

(3.2.20) $$u_t = u_{xx} + u - u^2$$

вместо уравнения (3.2.6), то аналогичные вычисления привели бы к

(3.2.21a, b, c, d) $$\begin{gathered} [\alpha, \gamma] + \alpha = 0, \\ [\alpha, \delta] + [\beta, \gamma] - \alpha = 0, \\ [\delta, \beta] = 0, \\ [\alpha, \beta] - \gamma = 0 \end{gathered}$$

вместо (3.2.19). Вычисления для уравнения КдФ проводятся по такой же схеме [497].

Нетрудно найти решение (3.2.19) при $N = 1$. Одно довольно простое решение имеет вид

(3.2.22) $$N = 1, \quad \alpha = -q/2, \quad \beta = \gamma = \delta = 0,$$

так что (3.2.7) принимает вид

(3.2.23a, b) $$q_x = -\frac{u}{2}q, \quad q_t = -\frac{1}{2}\left(u_x - \frac{u^2}{2}\right)q.$$

Читатель без труда узнает в (3.2.23a) преобразование Коула — Хопфа (3.1.2), а (3.1.23b) переходит в уравнение теплопроводности после исключения u. Отметим также, что $(\ln q)$ является потенциалом, соответствующим закону сохранения (3.2.6).

Более сложное решение системы (3.2.19) для $N=1$ имеет вид

$$\text{(3.2.24)}\qquad \begin{aligned} \alpha &= -q/2, \\ \beta &= C_1 q^2 - \frac{C_2}{2} q, \\ \gamma &= \frac{C_1}{2} q^2, \\ \delta &= \frac{C_1 C_2}{2} q^2 - \frac{C_2^2}{4} q, \end{aligned}$$

так что (3.2.7) приводится к виду

$$\text{(3.2.25)}\qquad \begin{aligned} q_x &= -\frac{u + C_2}{2} q + C_1 q^2, \\ q_t &= -\frac{1}{2}\left(u_x - \frac{u^2}{2} + \frac{C_2^2}{2}\right) q - \frac{C_1}{2}(u - C_2) q^2. \end{aligned}$$

В частном случае ($C_1 = 1/2$, $C_2 = 0$) соотношения (3.2.25) являются ПБ уравнения (3.2.6) в себя. Таким образом, уравнение Бюргерса имеет ПБ (в себя) и может быть точно решено (при помощи преобразования Коула — Хопфа) (см. упр. 2). Оно имеет решения типа бегущих волн, но не имеет солитонов и обладает (очевидно) только одним полиномиальным законом сохранения, не зависящим от x, t.

В случае (3.2.21) эта процедура не проходит, так как нет нетривиальных решений системы (3.2.21) при $N = 1$ (см. упр. 4). В общем случае ($N \neq 1$) полезно воспользоваться некоторыми понятиями из теории алгебр Ли. (Более подробные сведения об алгебрах Ли можно найти, например, в книгах [241] или [441].)

3.2. с. Алгебры Ли. Пусть $(v_1, \ldots, v_n)$ — элементы линейного векторного пространства V размерности $m \leqslant n$. Векторное пространство можно превратить в *алгебру*, определив в нем операцию «умножение», которая сопоставляет каждой паре векторов $\{v_1, v_2\}$ их произведение $(v_1 v_2) \in V$. Операция умножения должна удовлетворять условиям билинейности

$$\text{(3.2.26)}\qquad \begin{aligned} &\text{(i)}\ (v_1 + v_2) v_3 = v_1 v_3 + v_2 v_3, \quad v_1 (v_2 + v_3) = v_1 v_2 + v_1 v_3, \\ &\text{(ii)}\qquad c(v_1 v_2) = (c v_1) v_2 = v_1 (c v_2) \end{aligned}$$

для любого скаляра c.

Так как пространство имеет конечную размерность m, то эта операция полностью определяется набором m базисных векторов и $(m \times m)$-таблицей умножения этих векторов. Алгебра является *алгеброй Ли*, если операция умножения подчиняется так-

же соотношениям

$$(3.2.27)\qquad \begin{aligned}&\text{(i)}\ (v_1v_1)=0,\\ &\text{(ii)}\ (v_1v_2)v_3+(v_2v_3)v_1+(v_3v_1)v_2=0.\end{aligned}$$

Уравнение (ii) называется тождеством Якоби. Алгебра Ли называется *абелевой*, если

$$(3.2.28)\qquad v_1v_2=0$$

для любых $v_1, v_2 \in V$, и *неабелевой*, если какие-нибудь два элемента из V имеют ненулевое произведение.

Примеры. (1) Решение (3.2.22) системы (3.2.19) является абелевой алгеброй Ли в одномерном векторном пространстве с базисным вектором α.

(2) «Специальная унитарная алгебра Ли» su(2) состоит из всех комплекснозначных (2×2)-матриц с нулевым следом[1]), где «умножение» двух матриц задается их коммутатором

$$(3.2.29)\qquad [A, B]=AB-BA.$$

Базисными элементами этого векторного пространства служат

$$s_x=\frac{i}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad s_y=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad s_z=\frac{i}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

и легко проверить, что

$$[s_x, s_y]=s_z,\qquad [s_y, s_z]=s_x,\qquad [s_z, s_x]=s_y,$$

так что su(2) является неабелевой. Отметим, что задача рассеяния, рассмотренная в гл. 1 (1.2.7а), имеет вид

$$\mathbf{v}_x=X\mathbf{v},\qquad \mathbf{v}_t=T\mathbf{v},$$

где X и T являются элементами su(2).

Какое отношение все это имеет к псевдопотенциалам? По предположению векторы $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ из (3.2.19) или (3.2.21) являются элементами некоторого N-мерного пространства. Нетрудно показать, что билинейная операция $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$, определенная в (3.2.14), удовлетворяет соотношениям (3.2.26, 27). Таким образом, набор соотношений, подобных (3.2.19, 21), имеет решение, если и только если эти соотношения совместны с некоторой (конечномерной) алгеброй Ли. Еще важнее то, что поставленная задача имеет псевдопотенциал (определенного вида) тогда и только тогда, когда существует соответствующая алгебра Ли.

В настоящее время не решена следующая общая задача: можно ли частично заполненную таблицу умножения продолжить до какой-нибудь конечномерной алгебры Ли? Если это сделать удается, то можно воспользоваться теоремой Адо.

---

[1]) Кроме этого матрицы должны быть антиэрмитовыми. — *Прим. перев.*

Определения. *Представлением* абстрактной алгебры Ли называется отождествление каждого элемента алгебры с $(N \times N)$-матрицей, при котором выполнена таблица умножения. Представление называется *точным*, если единственный элемент, отождествленный с нулевой матрицей, является нулевым элементом исходного векторного пространства.

Теорема Адо. *Каждая конечномерная алгебра Ли имеет точное конечномерное представление.*

Доказательство можно найти в книге Джекобсона [241, с. 202]. Эта теорема означает, что всегда *достаточно ограничиться поиском линейных псевдопотенциалов* типа (3.2.8) и матричных решений систем соотношений типа (3.2.21). (Это относится к системам уравнений первого порядка по t и конечного порядка по x.)

Системы типа (3.2.21) всегда имеют тривиальные решения ($\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$) и почти тривиальное абелево решение

$$\alpha = \gamma = 0, \qquad [\beta, \delta] = 0.$$

Теперь мы покажем, что любая абелева алгебра Ли соответствует последовательности потенциальных функций, которая в свою очередь соответствует (в лучшем случае) последовательности законов сохранения исходного уравнения. Если дано эволюционное уравнение для u (первого порядка по t и p-го порядка по x), то мы ищем (линейный) псевдопотенциал вида (3.2.8). Произведя вычисления, аналогичные проделанным выше, мы еще больше ограничим псевдопотенциал до вида

$$\mathbf{q}_x = \sum_j^m a_j \underline{\underline{\alpha}}_j \mathbf{q}, \quad \mathbf{q}_t = \sum_j^m b_j \underline{\underline{\alpha}} \mathbf{q}, \tag{3.2.30}$$

где a_j, b_j — известные скалярные функции от $(u, u_x, \ldots, u_{(p-1)x})$, а $\underline{\underline{\alpha}}_j$ — постоянные $(N \times N)$-матрицы (элементы алгебры Ли). Система является абелевой, если (3.2.31)

$$[\underline{\underline{\alpha}}_j, \underline{\underline{\alpha}}_k] = 0 \text{ для всех } j, k.$$

Пусть λ_1 является простым собственным значением матрицы $\underline{\underline{\alpha}}_1$ и v — соответствующий собственный вектор, т. е.

$$\alpha_1 v = \lambda_1 v.$$

Если $[\alpha_1, \alpha_2] = 0$, то

$$\underline{\underline{\alpha}}_1 (\underline{\underline{\alpha}}_2 v) = \underline{\underline{\alpha}}_2 \underline{\underline{\alpha}}_1 v = \underline{\underline{\alpha}}_2 (\lambda_1 v) = \lambda_1 (\underline{\underline{\alpha}}_2 v);$$

поэтому вектор $\alpha_2 v$ должен быть кратным v, т. е.

$$\underline{\underline{\alpha}}_2 v = \lambda_2 v,$$

и v является собственным вектором матрицы $\underline{\underline{\alpha}}_2$. Таким образом, две коммутирующие матрицы имеют общий собственный

вектор. Если (скажем) $\underline{\underline{\alpha}}_1$ является диагонализуемой матрицей и имеет полный набор собственных векторов, то, как следует из (3.2.31), каждая из $\underline{\underline{\alpha}}_i$ имеет те же самые собственные векторы. Поэтому существует система координат для $\mathbf{q}$, в которой правая часть (3.2.30) является диагональной и каждая компонента $\mathbf{q}$ удовлетворяет двум скалярным уравнениям следующего вида:

$$q_x = \sum_j^m a_j \lambda_j q, \qquad q_t = \sum_j^m b_j \lambda_j q.$$

Поэтому $\ln q$ является потенциальной функцией, соответствующей закону сохранения

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum a_j \lambda_j\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(-\sum b_j \lambda_j\right) = 0.$$

Разные компоненты $\mathbf{q}$, отвечающие разным собственным значениям, приводят к разным законам сохранения. Можно показать, что абелева алгебра Ли приводит к законам сохранения даже в том случае, когда матрицы $\underline{\underline{\alpha}}_j$ являются недиагонализуемыми (см. упр. 5).

Часто утверждается, что интерес представляют лишь неабелевы псевдопотенциалы, поскольку абелевы приводят только к законам сохранения. И это правильно, если смотреть на проблему с точки зрения МОЗР, но абелевы псевдопотенциалы не следует полностью игнорировать; из них, например, следует преобразование Коула — Хопфа.

Вернемся теперь к уравнению Фишера (3.2.20). Оно имеет нетривиальный псевдопотенциал вида (3.2.7), если (3.2.21) имеет матричное неабелево решение. Но система (3.2.21) не имеет такого решения (доказательство этого факта довольно громоздко и дано в упр. 7). Поэтому (3.2.20) не имеет ни псевдопотенциалов, ни ПБ, ни линейной задачи рассеяния, зависящей только от u, u_x, т. е. вида (3.2.7). Однако совершенно неясно, в чем кроется причина неудачи: является ли она следствием внутренней структуры уравнения или же связана с выбором псевдопотенциала в форме (2.2.9). Неизвестен способ обобщить этот метод до такой степени, чтобы полученный из него отрицательный результат гарантировал, что и любой другой метод, обсуждавшийся в этой главе, также должен привести к отрицательному результату.

3.2. d. Более общие задачи. До сих пор мы ограничивались уравнениями с полиномиальными линеаризованными дисперсионными соотношениями. Для уравнений более высокого порядка псевдопотенциальный метод имеет точно такое же начало, но задача не обязательно сводится к чисто алгебраической, и может оказаться недостаточным ограничивать поиск только ли-

нейными псевдопотенциалами. Для иллюстрации рассмотрим уравнение второго порядка

$$u_{xt} = f(u), \tag{3.2.32}$$

содержащее в качестве частного случая уравнение sin-Гордон. При различных упрощающих предположениях Краскал [297], Мак-Лафлин и Скотт [371] и Рунд [436] показали, что уравнение (3.2.32) обладает особой структурой (дополнительными законами сохранения, или ПБ) тогда и только тогда, когда

$$f'' = kf \tag{3.2.33}$$

для некоторого k. Однако Михайлов [374] показал[1]), что существуют другие функции, для которых уравнение (3.2.32) принадлежат к классу интегрируемых при помощи МОЗР (см. упр. 8 разд. 3.7). Новое уравнение связано с задачей рассеяния для оператора третьего порядка, в то время как уравнения, подчиняющиеся соотношению (3.2.33), связаны с оператором второго порядка.

Попытаемся найти псевдопотенциал для (3.2.32), чтобы выяснить, можно ли обобщить условие (3.2.33). Следуя обычным правилам, рассмотрим

$$\mathbf{q}_x = \mathbf{A}(u, u_x, u_t, \mathbf{q}), \quad \mathbf{q}_t = \mathbf{B}(u, u_x, u_t, \mathbf{q}). \tag{3.2.34}$$

Условие интегрируемости ($\mathbf{q}_{xt} = \mathbf{q}_{tx}$) приводит к

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u_t} = 0 = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial u_x} \tag{3.2.35}$$

и

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u} u_t - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial u} u_x + \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u_x} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial u_t}\right) f = 0. \tag{3.2.36}$$

В этом месте появляется существенное различие между уравнениями первого (по t) порядка и уравнениями более высокого порядка: независимые переменные u, u_x, u_t, $\mathbf{q}$ не входят в соотношение (3.2.36) явно. Поэтому если случай (3.2.13) удавалось свести к изучению чисто алгебраической задачи (3.2.19), то в случае (3.2.36) такое сведéние неизвестно. Решение можно получить, наложив дополнительные ограничения на структуру функций **A**, **B** (см., например, [166], [312] или [41]). С учетом этих дополнительных ограничений (3.2.32) имеет псевдопотенциал, если выполнено (3.2.33). Но ответ на общий вопрос пока отсутствует.

3.2. е. Заключение. Перечислим вкратце, чтó же известно о псевдопотенциалах.

---

[1]) См. примечание на стр. 305. — *Прим. перев.*

(i) Приведенный здесь метод позволяет найти псевдопотенциалы для некоторых уравнений. Если найден неабелев псевдопотенциал, то обычно из него можно получить ПБ. Если он к тому же линейный и зависит от параметра, то очень вероятно, что его можно использовать для МОЗР.

(ii) Отрицательный результат, полученный для конкретного уравнения, наводит на мысль (и только), что никакой другой метод, обсуждавшийся в этой главе, также не будет работать. То же самое и для «прямых» методов построения N-солитонных формул, описанных в разд. 3.5, 3.6.

(iii) Если рассматриваемое уравнение имеет первый порядок по t и конечный порядок по x, то достаточно ограничиться поиском линейных псевдопотенциалов. Затем задачу можно свести к алгебраической, т. е. к поиску алгебры Ли определенной структуры. Представляется, что в каждом конкретном случае задача может быть решена, но пока что, по-видимому, нет никаких общих результатов.

Ситуация становится еще более запутанной, если допустить, что псевдопотенциал зависит от производных более высокого порядка или уравнение имеет более высокий порядок. В этих случаях вопрос о существовании псевдопотенциала приводит к системе дифференциально-алгебраических соотношений, причем неизвестно, можно ли без потери общности ограничиться поиском линейных псевдопотенциалов.

3.3. Прямые методы построения солитонных решений — метод Хироты. Одной из интересных областей в теории распространения нелинейных волн является развитие методов построения точных частных решений определяющих их уравнений. Хирота получил много значительных результатов в теории уравнений, допускающих солитонные решения (обзоры некоторых его работ см. в [218], [224] и [226], [227]). Следует отметить, что прямые методы практически всегда срабатывают для уравнений, интегрируемых при помощи МОЗР, а иногда даже в тех случаях, когда соответствующие задачи рассеяния неизвестны. На практике прямые методы часто побуждали к поиску соответствующих задач рассеяния и иногда приводили к таким задачам (см. [450], [393], [449] и т. д.). Прямой метод основан на следующих идеях:

(i) Произвести замену зависимой переменной (это может потребовать некоторой изобретательности, хотя имеются стандартные формы). Преобразование должно привести эволюционное уравнение к так называемой билинейной форме, квадратичной по зависимым переменным. Хирота разработал новый подход, очень удобный на этом этапе.

(ii) Рассмотреть формальные ряды теории возмущений для

этого билинейного уравнения. В случае солитонных решений эти ряды обрываются.

(iii) Использовать метод полной математической индукции для доказательства того факта, что предполагаемая солитонная формула действительно является решением.

В этом разделе мы тщательно проанализируем случай уравнения КдФ. Затем кратко приведем результаты, касающиеся других хорошо известных нелинейных волновых уравнений, и обсудим другие задачи, в которых этот метод результативен.

3.3. а. Уравнение КдФ в качестве примера. Рассмотрим уравнение КдФ

(3.3.1) $$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

В разд. 1.4 мы видели, что N-солитонное решение имеет вид

(3.3.2) $$u = 2\frac{d^2}{dx^2}\ln F,$$

где F — определитель некоторой матрицы. Этот вид подсказывает преобразование уравнения (3.3.1). Подставляя (3.3.2) в (3.3.1), один раз интегрируя и полагая константу интегрирования равной нулю, получим

(3.3.3) $$F_{xt}F - F_xF_t + F_{xxxx}F - 4F_{xxx}F_x + 3F_{xx}^2 = 0.$$

Уравнение (3.3.3) является квадратичной формой (Хирота обычно называет уравнения такого вида билинейными); такие формы обычно возникают при правильном выборе замены зависимой переменной. Для дальнейшего анализа удобно ввести оператор

(3.3.4) $$D_x^m D_t^n a \cdot b = (\partial_x - \partial_{x'})^m (\partial_x - \partial_{x'})^n a(x, t)\, b(x', t')\big|_{\substack{x'=x\\ t'=t}}.$$

Воспользовавшись этим определением, уравнение (3.3.3) можно переписать в виде

(3.3.5) $$\left(D_xD_t + D_x^4\right) F \cdot F = 0.$$

При работе с этим оператором полезны следующие легко проверяемые свойства:

(3.3.6a) $$D_x^m a \cdot 1 = \partial_x^m a,$$

(3.3.6b) $$D_x^m a \cdot b = (-1)^m D_x^m b \cdot a,$$

(3.3.6c) $$D_x^m a \cdot a = 0, \quad m \text{ — нечетное число},$$

(3.3.6d) $$D_x^m D_t^n e^{(k_1x - \omega_1 t)} \cdot e^{(k_2x-\omega_2 t)} = \\ = (k_1 - k_2)^m (-\omega_1 + \omega_2)^n e^{(k_1+k_2)x - (\omega_1+\omega_2)t}.$$

Имеется много других соотношений, содержащих оператор D,

Читатель при желании может обратиться к одной из упоминавшихся обзорных статей.

Предположим, далее, что функция F может быть представлена в виде формального ряда по степеням ε:

(3.3.7a) $$F = 1 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \ldots,$$

где

(3.3.7b) $$f^{(1)} = \sum_{i=1}^{N} e^{\eta_i}, \quad \eta_i = k_i x - \omega_i t + \eta_i^{(0)}$$

и k_i, ω_i, $\eta_i^{(0)}$ — константы. В случае уравнения КдФ (и на самом деле для всех задач, допускающих точное N-солитонное решение) этот формальный ряд обрывается. Действительно, подставив (3.3.7a) в (3.3.5), найдем

$$\left(D_x D_t + D_x^4\right)\left(1 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \ldots\right) \cdot \left(1 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \ldots\right) = 0$$

и, приравняв нулю коэффициенты при каждой степени ε, получим

(3.3.8a) $O(1)$: $\quad 0 = 0,$

(3.3.8b) $O(\varepsilon)$: $\quad 2\left(\partial_x \partial_t + \partial_x^4\right) f^{(1)} = 0,$

(3.3.8c) $O(\varepsilon^2)$: $\quad 2\left(\partial_x \partial_t + \partial_x^4\right) f^{(2)} = -\left(D_x D_t + D_x^4\right) f^{(1)} \cdot f^{(1)},$

(3.3.8d) $O(\varepsilon^3)$: $\quad 2\left(\partial_x \partial_t + \partial_x^4\right) f^{(3)} = -2\left(D_x D_t + D_x^4\right) f^{(1)} \cdot f^{(2)}.$

Первое нетривиальное уравнение (3.3.8b) является однородным. В качестве решения мы взяли (3.3.7b). Если мы попытаемся продолжить вычисление членов ряда, начав с решения (3.3.7b) при произвольном N, то, к сожалению, столкнемся с аналитическими трудностями. Чаще всего можно получить решение для $N = 1$, 2 (и иногда для 3), а затем выдвинуть гипотезу о структуре решения при произвольном N и доказать ее по индукции. При $N = 1$ возьмем $f^{(1)} = e^{\eta_1}$. Тогда из (3.3.8b) следует, что $\omega_1 = -k_1^3$. Уравнение для $f^{(2)}$ следует из соотношения (3.3.8c), которое при помощи (3.3.6d) сводится к

(3.3.9a) $$\left(\partial_x \partial_t + \partial_x^4\right) f^{(2)} = 0.$$

Таким образом,

(3.3.9b) $$f^{(2)} = 0,$$

и ряд обрывается. Поэтому при $N = 1$ имеем

$$F_1 = 1 + e^{\eta_1}, \quad \omega_1 = -k_1^3$$

и

(3.3.10) $$u = \frac{k_1^2}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{1}{2}\left(k_1 x - k_1^3 t + \eta_1^{(0)}\right).$$

При $N=2$ в качестве решения уравнения (3.3.8b) мы возьмем

(3.3.11) $$f^{(1)}=e^{\eta_1}+e^{\eta_2}, \qquad \eta_i=k_ix-k_i^3t+\eta_i^{(0)}.$$

Тогда (3.3.8c) сводится к уравнению

(3.3.12a) $$2\left(\partial_x\partial_t+\partial_x^4\right)f^{(2)}=$$
$$=-2\left((k_1-k_2)(-\omega_1+\omega_2)+(k_1-k_2)^4\right)e^{\eta_1+\eta_2},$$

имеющему решение

(3.3.12b) $$f^{(2)}=e^{\eta_1+\eta_2+A_{12}},$$

(3.3.12c) $$e^{A_{ij}}=\left(\frac{k_i-k_j}{k_i+k_j}\right)^2$$

(отметим, что $k_1\neq k_2$). Подставив $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ в (3.3.8d), убеждаемся, что правая часть (3.3.8d) равна нулю, поэтому возьмем $f^{(3)}=0$. Таким образом, при $N=2$

(3.3.13) $$F_2=1+e^{\eta_1}+e^{\eta_2}+e^{\eta_1+\eta_2+A_{12}}.$$

Функция $u=2d^2(\ln F_2)/dx^2$ соответствует двухсолитонному решению уравнения КдФ. Произведя аналогичные вычисления при $N=3$, получим

(3.3.14) $$F_3=1+e^{\eta_1}+e^{\eta_2}+e^{\eta_3}+e^{\eta_1+\eta_2+A_{12}}+e^{\eta_1+\eta_3+A_{13}}+$$
$$+e^{\eta_2+\eta_3+A_{23}}+e^{\eta_1+\eta_2+\eta_3+A_{12}+A_{13}+A_{23}},$$

где коэффициенты A_{ij} определены формулой (3.3.12c).

Основываясь на этих решениях, мы выдвигаем гипотезу о том, что структура общего N-солитонного решения имеет вид

(3.3.15) $$F_N=\sum_{\underline{\mu}=0,1}\exp\left(\sum_{i=1}^{N}\mu_i\eta_i+\sum_{1\leqslant i<j}^{N}\mu_i\mu_jA_{ij}\right),$$

где сумма по $\underline{\mu}$ пробегает по всем наборам μ_i, $i=1,\ldots,N$. Отметим, что A_{ij} связаны со сдвигами фаз солитонов при рассеянии. Рассмотрим двухсолитонный случай. Положим $0<k_1<k_2$ и определим

$$\xi_i=x-k_i^2t, \qquad i=1,\ 2.$$

Тогда

$$\xi_2=-\left(k_2^2-k_1^2\right)t+\xi_1.$$

В системе координат, связанной с первым солитоном, ξ_1 фиксировано, и мы вычислим пределы $t\to\pm\infty$. Рассмотрим вначале $t\to+\infty$, поэтому $\xi_2\to-\infty$, $e^{\eta_2}\to0$, $F_2\sim1+e^{\eta_1}$; при этом

(3.3.16) $$u\sim\frac{k_1^2}{2}\operatorname{sech}^2\frac{\eta_1}{2}.$$

Аналогично при $t \to -\infty$, $\xi_2 \to +\infty$ и $e^{\eta_2} \to +\infty$

$$F_2 \to e^{\eta_2}\left(1 + e^{\eta_1 + A_{12}}\right).$$

Из (3.3.2) следует, что два решения могут отличаться на множитель

$$u \sim \frac{k_1^2}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\eta_1 + A_{12}}{2}\right). \quad (3.3.17)$$

Таким образом, сдвиг фаз в двухсолитонном решении в результате взаимодействия определяется коэффициентом A_{12} (отметим, что точно такой же результат был получен в разд. 1.4; см. (1.4.43)). Так же можно проанализировать N-солитонный случай.

Теперь вернемся к проверке справедливости N-солитонного решения (3.3.15) [211]. Читатель должен иметь в виду, что это доказательство довольно утомительно и можно, не теряя связности изложения, переходить прямо к примеру уравнения мКдФ (3.3.32).

Теорема. *Функция* F_N *вида* (3.3.15) *удовлетворяет уравнению* (3.3.5).

Доказательство. Подставив (3.3.15) в (3.3.5) и воспользовавшись соответствующими свойствами оператора D, получим

$$\sum_{\underline{\mu}=0,1} \sum_{\underline{\nu}=0,1} \left\{ \left(\sum_i (\mu_i - \nu_i) k_i \right) \left(\sum_i (\mu_i - \nu_i)(-k_i)^3 \right) + \left(\sum_{i=1}^N (\mu_i - \nu_i) k_i \right)^4 \right\} \cdot \exp\left(\sum_i (\mu_i + \nu_i) \eta_i + \sum_{1 \leqslant i < j} (\mu_i \mu_j + \nu_i \nu_j) A_{ij} \right) = 0. \quad (3.3.18)$$

Так как μ_i, $\nu_i = 0, 1$, то очевидно, что имеются экспоненциальные члены только вида

$$\exp\left(\sum_{i=1}^n \eta_i + \sum_{i=n+1}^m 2\eta_i \right), \quad 0 \leqslant n \leqslant N, \quad n \leqslant m \leqslant N$$

(с точностью до переобозначения индексов). Затем мы покажем, что коэффициент при этом общем экспоненциальном члене равен нулю. Этот коэффициент имеет вид

$$\Delta = \sum_{\underline{\mu}} \sum_{\underline{\nu}} \left\{ -\left(\sum_{i=1}^N (\mu_i - \nu_i) k_i \right) \left(\sum_{i=1}^N (\mu_i - \nu_i) k_i^3 \right) + \left(\sum_{i=1}^N (\mu_i - \nu_i) k_i \right)^4 \right\} \cdot \exp\left(\sum_{i<j} (\mu_i \mu_j + \nu_i \nu_j) A_{ij} \right) \operatorname{cond}(\underline{\mu}, \underline{\nu}). \quad (3.3.19a)$$

Здесь $\operatorname{cond}(\underline{\mu}, \underline{\nu})$ означает

(3.3.19b) $$\operatorname{cond}(\underline{\mu}, \underline{\nu}) = \begin{cases} \text{для } i=1, \ldots, n \text{ мы берем только такие } \mu_i, \nu_i, \text{ что ①: } \mu_i+\nu_i=1, \\ 0 \leqslant n \leqslant N; \text{ для } i=n+1, \ldots, m \text{ мы берем только такие } \mu_i, \nu_i, \text{ что ②:} \\ \mu_i=\nu_i=1,\ 0 \leqslant m \leqslant N; \text{ для } i=m+1, \ldots, N \text{ мы берем только такие} \\ \mu_i, \nu_i, \text{ что ③: } \mu_i=\nu_i=0. \end{cases}$$

Обозначим

(3.3.20) $$\sigma_i = \mu_i - \nu_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

При $i > n$ $\sigma_i = 0$ (так как либо $\mu_i = \nu_i = 1$, либо $\mu_i = \nu_i = 0$). Поскольку при $i = 1, \ldots, n$ мы имеем $\mu_i + \nu_i = 1$ (из (3.3.19b), то

(3.3.21) $$\mu_i = \frac{1+\sigma_i}{2}, \qquad \nu_i = \frac{1-\sigma_i}{2}.$$

С учетом (3.2.21) все члены в (3.3.19a), за исключением экспоненциального члена, без труда преобразуются.

Используя цифровые обозначения, принятые в (3.3.19b), мы оценим член

$$T = \exp\left(\sum_{i<j}^{N} (\mu_i\mu_j + \nu_i\nu_j) A_{ij}\right) =$$
$$= \exp\left(\sum_{①<①} + \sum_{①<②} + \sum_{①<③} + \sum_{②<②} + \sum_{②<③} + \sum_{③<③}\right) \times$$
$$\times (\mu_i\mu_j + \nu_i\nu_j) A_{ij}.$$

Единственный вклад в этот показатель, зависящий от $\sigma_i\sigma_j$, определяется членом „① < ①“. Поэтому T имеет вид

(3.3.22a) $$T = \text{const} \sum_{i<j}^{n} \left(\frac{k_i - k_j}{k_i + k_j}\right)^2 (1 + \sigma_i\sigma_j) =$$

(3.3.22b) $$= \text{const} \sum_{i<j}^{n} \left(\frac{\sigma_i k_i - \sigma_j k_j}{k_i + k_j}\right);$$

последнее равенство имеет место, так как $\sigma_i = \pm 1$. Все это означает, что коэффициент Δ имеет вид $\Delta = \text{const} \times \hat{\Delta}$, где

(3.3.23) $$\hat{\Delta} = \sum_{\sigma=1} \left\{ -\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i k_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i k_i^3\right) + \left(\sum_{1}^{n} \sigma_i k_i\right)^4 \right\} \times$$
$$\times \prod_{i<j}^{n} (\sigma_i k_i - \sigma_j k_j)^2$$

(отметим, что член $\sum_{i<j}^{n}(1/(k_i+k_j)^2)$ мы перенесли в выделенную константу).

Докажем теперь по индукции, что $\hat{\Delta}=0$. Функция $\hat{\Delta}$ является полиномом по k_i, точнее $\hat{\Delta}=\hat{\Delta}(k_1, \ldots, k_n)$. Мы будем обозначать это так: $\hat{\Delta}=\hat{\Delta}_n$. Отметим также, что порядок полиномиального множителя $\sum_{i<j}^{n}(\sigma_i k_i-\sigma_j k_j)$ равен $\frac{1}{2}n(n-1)$, поэтому порядок $\hat{\Delta}$ такой, что выполнено неравенство

$$\text{(3.3.24)} \qquad \operatorname{ord}(\hat{\Delta}_n)\leqslant n^2-n+4.$$

Отметим, что

$$\text{(3.3.25a)} \qquad \hat{\Delta}(k_1)=\hat{\Delta}_1=\sum_{\sigma_1=1}\left\{-(\sigma_1 k_1)\left(\sigma_1 k_1^3\right)+\sigma_1^4 k_1^4\right\}=0,$$

$$\text{(3.3.25b)} \qquad \hat{\Delta}(k_1, k_2)=\hat{\Delta}_2=\sum_{\sigma_1,\,\sigma_2=\pm 1}\left\{-(\sigma_1 k_1+\sigma_2 k_2)\left(\sigma_1 k_1^3+\sigma_2 k_2^3\right)+\right.$$
$$\left.+(\sigma_1 k_1+\sigma_2 k_2)^4\right\}(\sigma_1 k_1-\sigma_2 k_2)^2=$$
$$=3k_1 k_2\left(k_1^2-k_2^2\right)(k_1-k_2)^2\sum_{\sigma_1,\,\sigma_2=\pm 1}\sigma_1\sigma_2=0.$$

Функция $\hat{\Delta}(k_1, \ldots, k_n)$ обладает следующими свойствами:

(i) $\hat{\Delta}_n$ — четная функция k_i, т. е.

$$\text{(3.3.26a)} \qquad \hat{\Delta}_n(k_1, \ldots, k_i, \ldots, k_n)=\hat{\Delta}(k_1, \ldots, -k_i, \ldots, k_n).$$

(ii) $\hat{\Delta}_n$ симметрична относительно перестановки k_j и k_i, т. е.

$$\text{(3.3.26b)} \qquad \hat{\Delta}_n(k_1, \ldots, k_i, \ldots, k_j, \ldots, k_n)=$$
$$=\hat{\Delta}_n(k_1, \ldots, k_j, \ldots, k_i, \ldots, k_n).$$

Соотношение (3.3.26a) легко получить, заменив $k_i\to -k_i$ и $\sigma_i\to-\sigma_i$ (немой индекс) в (3.3.23). Симметрию (3.3.26b) нужно проверить только для произведения. Но поскольку

$$\text{(3.3.27)} \qquad \prod_{1\leqslant i<j}^{n}(\sigma_i k_i-\sigma_j k_j)^2=(-1)^{(n^2-n)/2}\prod_{\substack{i,\,j=1\\ i\neq j}}(\sigma_i k_i-\sigma_j k_j),$$

то ясно, что произведение симметрично относительно перемены мест k_p и k_q.

Вычислим $\widehat{\Delta}_n$ при $k_1 = 0$:

$$(3.3.28) \quad \widehat{\Delta}_n |_{k_1=0} \equiv \widehat{\Delta}(k_1 = 0, k_2, \ldots, k_n) = \\ = \sum_{\sigma_1 = \pm 1} \sum_{\substack{\text{осталь-} \\ \text{ные} \\ \sigma = \pm 1}} \left\{ -\left(\sum_{i=2} \sigma_i k_i \right) \left(\sum_{i=2}^{n} \sigma_i k_i^3 \right) + \left(\sum_{i=2}^{n} \sigma_i k_i \right)^4 \right\} \times \\ \times \prod_{i=2}^{n} k_i^2 \sum_{2 \leqslant i < j}^{n} (\sigma_i k_i - \sigma_j k_j)^2 = 2 \left(\prod_{i=2}^{n} k_i^2 \right) \widehat{\Delta}_{n-1}$$

(отметим, что здесь $\widehat{\Delta}_{n-1} = \widehat{\Delta}(k_2, k_3, \ldots, k_n)$). Аналогично вычисление $\widehat{\Delta}_n$ при $k_1 = k_2$ дает

$$(3.3.29a) \quad \widehat{\Delta}_n |_{k_1=k_2} = \sum_{\sigma_1, \sigma_2 = \pm 1} \sum_{\substack{\text{осталь-} \\ \text{ные} \\ \sigma = \pm 1}} \left\{ -\left((\sigma_1 + \sigma_2) k_1 + \sum_{i=3}^{n} \sigma_i k_i \right) \times \right. \\ \times \left((\sigma_1 + \sigma_2) k_1^3 + \sum_{i=3}^{n} \sigma_i k_i \right) + \left. \left((\sigma_1 + \sigma_2) k_1 + \sum_{i=3}^{n} \sigma_i k_i \right)^4 \right\} \times \\ \times (\sigma_1 - \sigma_2)^2 k_1^2 \prod_{i=3}^{n} (\sigma_1 k_1 - \sigma_i k_i)^2 (\sigma_2 k_2 - \sigma_i k_i)^2 \prod_{3 \leqslant i < j} (\sigma_i k_i - \sigma_j k_j)^2.$$

Мы видим, что вклад возникает только при $\sigma_1 = -\sigma_2$, поэтому

$$(3.3.29b) \quad \widehat{\Delta}_n |_{k_1=k_2} = 8k_1^2 \sum_{(\sigma_3, \ldots, \sigma_n) = \pm 1} \left\{ -\left(\sum_{i=3}^{n} \sigma_i k_i \right) + \left(\sum_{i=3}^{n} \sigma_i k_i^3 \right) + \right. \\ \left. + \left(\sum_{i=3}^{n} \sigma_i k_i \right)^4 \right\} \times \prod_{i=3}^{n} (k_1^2 - k_i^2)^2 \prod_{3 \leqslant i < j}^{n} (\sigma_i k_i - \sigma_j k_j)^2 = \\ = 8k_1^2 \prod_{3}^{n} (k_1^2 - k_2^2) \widehat{\Delta}_{n-2},$$

где $\widehat{\Delta}_{n-2} = \widehat{\Delta}(k_3, k_4, \ldots, k_n)$. По индукции заключаем, что и $\widehat{\Delta}_n |_{k_1=0} = 0$, и $\widehat{\Delta}_n |_{k_i=k_2}$ при всех n. Поэтому $\widehat{\Delta}_n$ содержит множитель $k_1(k_1 - k_2)$, но из свойств симметрии следует, что k_1 и k_2 можно заменить на любое k_i, откуда ясно, что при любых i, j

$$\widehat{\Delta}_n |_{k_i=0} = 0, \qquad \widehat{\Delta}_n |_{k_i=k_j} = 0,$$

и поэтому полином $\widehat{\Delta}_n$ должен иметь множитель

$$\prod_{i=1}^{n} k_i \prod_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^{n} (k_i - k_j) \quad \text{или} \quad \prod_{i=1}^{n} k_i \prod_{1 \leqslant i < j}^{n} (k_i - k_j)^2.$$

Но поскольку $\widehat{\Delta}_n$ является четной функцией каждого k_i, то $\widehat{\Delta}_n$ должен содержать множитель

$$\prod_{i=1}^{n} k_i^2 \prod_{1 \leqslant i < j}^{n} (k_i^2 - k_j^2)^2. \tag{3.3.30}$$

Это означает, что порядок полинома $\widehat{\Delta}_n$ должен быть по крайней мере равен $2n^2$, т. е.

$$\operatorname{order}(\widehat{\Delta}_n) \geqslant 2n^2.$$

Но поскольку $2n^2 > n^2 - n + 4$ при всех $n \geqslant 2$, то мы приходим к противоречию, т. е. $\widehat{\Delta}_n$ не может одновременно удовлетворять неравенствам $\operatorname{order}(\widehat{\Delta}_n) \leqslant n^2 - n + 4$ и $\operatorname{order}(\widehat{\Delta}_n) \geqslant 2n^2$. Единственный выход состоит в том, что при $n \geqslant 2$

$$\widehat{\Delta}_n = 0. \tag{3.3.31}$$

При $n = 1$ формула (3.3.31) также верна (см. (3.3.25a)). Таким образом мы доказали, что функция $\widehat{\Delta}$ в (2.3.23) и поэтому Δ в (3.3.19a) равны нулю. Тем самым мы проверили, что N-солитонное решение $u = 2d^2(\ln F_N)/dx^2$ действительно удовлетворяет уравнению КдФ. □

3.3. b. Некоторые другие нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных. Обратимся теперь к другому аспекту прямого метода. Хирота [218] отмечал, что очень часто нужная замена зависимой переменной может быть выведена регулярным образом. Мы проиллюстрируем его подход на примере уравнения мКдФ

$$v_t + 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0. \tag{3.3.32}$$

Подставив $v = F/G$ в (3.3.32) и воспользовавшись определением операторов D_x, D_t, мы получим

$$\left(D_t + D_x^3\right) G \cdot F + \frac{6}{F^2}(D_x G \cdot F)\left(\frac{1}{2} D_x^2 F \cdot F - G^2\right) = 0. \tag{3.3.33}$$

Так как обе функции F и G произвольны, мы можем расщепить уравнения следующим образом:

$$\left(D_t + D_x^3\right) G \cdot F = 0, \tag{3.3.34a}$$

$$D_x^2 F \cdot F = 2G^2. \tag{3.3.34b}$$

Такой выбор расщепления обусловлен дисперсионным соотношением линеаризованного уравнения. Следующее разложение

приводит к солитонным решениям (таким, что $v \to 0$ при $|x| \to \infty$):

(3.3.35)
$$F = 1 + \varepsilon^2 F_2 + \varepsilon^4 F_4 + \ldots,$$
$$G = \varepsilon G_1 + \varepsilon^3 G_3 + \ldots.$$

Здесь каждое из разложений обрывается. Например, односолитонному решению отвечает

(3.3.36)
$$\begin{aligned} &(\partial_t + \partial_x^3) G_1 = 0, \\ &G_1 = e^{\eta_1}, \quad \eta_1 = k_1 x - k_1^3 t + \eta_1^{(0)}, \\ &\partial_x^2 F_2 = G_1^2 = e^{2\eta_1}, \\ &F_2 = \frac{1}{4k_i^2} e^{2\eta_1}, \\ &F_j = 0, \quad j \geqslant 4, \\ &G_j = 0, \quad j \geqslant 3. \end{aligned}$$

При $\varepsilon = 1$ с учетом (3.3.36) получим односолитонное решение уравнения мКдФ

(3.3.37)
$$v = \frac{e^{\eta_1}}{1 + e^{2\eta_1}/4k_1^2} = k_1 \operatorname{sech} \eta_1.$$

Функции G и F ($v = G/F$) для двухсолитонного решения можно представить в виде

(3.3.38a)
$$\begin{aligned} G &= e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + \frac{1}{4k_2^2}\left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 e^{\eta_1 + 2\eta_2} + \\ &+ \frac{1}{4k_1^2}\left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 e^{2\eta_1 + \eta_2}, \\ F &= 1 + \frac{1}{4k_1^2} e^{2\eta_1} + \frac{1}{4k_2^2} e^{2\eta_2} + \frac{2}{(k_1 + k_2)^2} e^{\eta_1 + \eta_2} + \\ &+ \frac{(k_1 - k_2)^4}{16k_1^2 k_2^2 (k_1 + k_2)^4} e^{2\eta_1 + 2\eta_2}. \end{aligned}$$

Отметим, что F можно привести к виду

(3.3.38b)
$$F = \left(\frac{1}{2k_1} e^{\eta_1} + \frac{1}{2k_2} e^{\eta_2}\right) + \\ + \left(1 - \frac{(k_1 - k_2)^2}{4k_1 k_2 (k_1 + k_2)^2} e^{\eta_1 - \eta_2}\right)^2 = \hat{g}^2 + \hat{f}^2.$$

При этом G можно переписать следующим образом:

(3.3.38c)
$$G = 2D_x \hat{g} \cdot \hat{f}.$$

Таким образом, v имеет вид

(3.3.39a) $$v = 2\frac{D_x\hat{g}\cdot\hat{f}}{\hat{f}^2+\hat{g}^2} = 2\frac{\hat{g}_x\hat{f}-\hat{g}\hat{f}_x}{\hat{f}^2(1+(\hat{g}/\hat{f})^2)}$$

или

(3.3.39b) $$v = 2\left(\operatorname{arctg}\frac{\hat{g}}{\hat{f}}\right)_x \equiv i\left(\ln\frac{\hat{f}-i\hat{g}}{\hat{f}+i\hat{g}}\right)_x.$$

Если мы определим $f=\hat{f}+i\hat{g}$, то получим формулу замены зависимой переменной:

(3.3.40) $$v = i\left(\ln\frac{f^*}{f}\right)_x.$$

Перейдя к этой новой зависимой переменной, мы получим билинейные уравнения

(3.3.41a) $$\left(D_t+D_x^3\right)f^*\cdot f=0,$$

(3.3.41b) $$D_x^2 f^* f = 0.$$

Чтобы получить N-солитонные решения, разложим f в ряд

$$f_N = 1+\varepsilon f_N^{(1)}+\varepsilon^2 f_N^2+\ \ldots,$$

подставим его в (3.3.41) и приравняем нулю коэффициенты при каждой степени ε. Одно- и двухсолитонные решения даются формулами ($\varepsilon=1$)

$$f_1 = 1+e^{\eta_1+i\pi/2},$$

(3.3.42) $$f_2 = 1+e^{\eta_1+i\pi/2}+e^{\eta_2+i\pi/2}+e^{\eta_1+\eta_2+i\pi+A_{12}},$$

$$\eta_i = k_i x - k_i^3 t+\eta_i^{(0)},\quad e^{A_{ij}} = \left(\frac{k_i-k_j}{k_i+k_j}\right)^2.$$

N-солитонное решение имеет следующую структуру:

(3.3.43) $$f_N = \sum_{\underline{\mu}=0,\,1}\exp\left(\sum_{i=1}^{N}\mu_i\left(\eta_i+i\frac{\pi}{2}\right)+\sum_{1\leqslant i<j}^{N}\mu_i\mu_j A_{ij}\right).$$

Для полноты мы приведем также результаты по уравнению sin-Гордон ([212]; см. также [99, 100]) и по нелинейному уравнению Шрёдингера [213]. Рассмотрим вначале замену зависимой переменной

(3.3.44) $$u = 2i\ln\left(\frac{f^*}{f}\right)$$

для уравнения sin-Гордон

(3.3.45) $$u_{xt} = \sin u.$$

(Читатель, вероятно, вспомнит результаты гл. 1, устанавливающие глубокую связь между уравнениями sin-Гордон и мКдФ.) Из (3.3.44) следует, что

$$\sin u = \frac{1}{2i}\left(\left(\frac{f}{f^*}\right)^2 - \left(\frac{f^*}{f}\right)^2\right), \tag{3.3.46}$$

откуда подстановкой (3.3.44) в (3.3.45) находим

$$D_x D_t f \cdot f = -\frac{1}{2}\left(f^{*2} - f^2\right) \tag{3.3.47}$$

и комплексно сопряженное уравнение. Односолитонное решение уравнения (3.3.47) получится, если взять

$$f_1 = 1 + e^{\eta_1 + i\pi/2}, \tag{3.3.48a}$$

а N-солитонное решение имеет вид

$$f_N = \sum_{\mu=0,\,1} \exp\left(\sum_{j=1}^{N} \mu_i \left(\eta_j + i\frac{\pi}{2}\right) + \sum_{1 \leqslant i < j}^{N} \mu_i \mu_j A_{ij}\right), \tag{3.3.48b}$$

где

$$\eta_i = k_i x - \omega_i t + \eta_i^{(0)},$$

$$\omega_i = \frac{1}{k_i}, \tag{3.3.48c}$$

$$e^{A_{ij}} = -\frac{(k_1 - k_2)(\omega_1 - \omega_2)}{(k_1 + k_2)(\omega_1 + \omega_2)} = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}.$$

Отметим, что если

$$f = F + iG \qquad (F,\ G \text{ вещественны}),$$

то (3.3.47) можно переписать в виде

$$D_x D_t (F \cdot F - G \cdot G) = 0, \qquad D_x D_t F \cdot G = FG \tag{3.3.49a}$$

и

$$u = 2i \ln \frac{F - iG}{F + iG} = 4 \operatorname{arctg} \frac{G}{F}. \tag{3.3.49b}$$

В случае нелинейного уравнения Шрёдингера [99]

$$iu_t + u_{xx} + |u|^2 u = 0 \tag{3.3.50}$$

возникает более сложная структура N-солитонного решения. Подставив $u = G/F$ (F вещественно) в (3.3.50), получим

$$\frac{1}{F^2}\left(iD_t + D_x^2\right) G \cdot F - \frac{G}{F^3}\left(D_x^2 F \cdot F - GG^*\right) = 0; \tag{3.3.51}$$

при этом мы расщепим уравнения следующим образом:

$$\left(iD_t + D_x^2\right) G \cdot F = 0, \qquad D_x^2 F \cdot F = GG^*. \tag{3.3.52}$$

Поэтому

$$|u|^2 = \frac{GG^*}{F^2} = \frac{D_x^2 F \cdot F}{F^2} = 2(\ln F)_{xx}. \tag{3.3.53}$$

Односолитонному решению отвечают

$$\begin{aligned} G &= e^{\eta_1}, \\ F &= 1 + e^{\eta_1 + \eta_1^* + \varphi_{1,1}^*}, \\ \eta_1 &= p_1 x - \Omega_1 t + \eta_1^{(0)}, \quad \Omega_1 = -ip_1^2, \\ e^{\varphi_{1,1}^*} &= \frac{1}{2}(p_1 + p_1^*)^{-2}. \end{aligned} \tag{3.3.54}$$

N-солитонное решение имеет вид

$$F = \sum_{\underline{\mu}=0,1} D_1(\underline{\mu}) \exp\left(\sum_{i=1}^{2N} \mu_i \eta_i + \sum_{1 \leqslant i < j}^{2N} \varphi_{ij} \mu_i \mu_j\right),$$

$$G = \sum_{\underline{\mu}=0,1} D_2(\underline{\mu}) \exp\left(\sum_{i=1}^{2N} \mu_i \eta_i + \sum_{1 \leqslant i < j}^{2N} \varphi_{ij} \mu_i \mu_j\right),$$

$$\eta_i = p_i x - \Omega_i t + \eta_i^{(0)}, \quad p_{i+N} + p_i^*, \quad \Omega_{i+N} = \Omega_i^*, \quad i = 1, \ldots, N,$$

$$\eta_{i+N} = \eta_i^*, \quad \Omega_j = -ip_j^*,$$

$$e^{\varphi_{ij}} = \begin{cases} \frac{1}{2}(p_i + p_j)^{-2} & \text{для } i = 1, 2, \ldots, N \text{ и } j = N+1, \ldots, 2N, \\ \frac{1}{2}(p_i - p_j)^{-2} & \text{для } i = N+1, \ldots, 2N \text{ и } j = N+1, \ldots, 2N, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} D_1(\underline{\mu}) &= \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i=1}^{N} \mu_i = \sum_{i=1}^{N} \mu_i + N, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \\ D_2(\underline{\mu}) &= \begin{cases} 1, & \text{если } 1 + \sum_{1}^{N} \mu_{i+N} = \sum_{1}^{N} \mu_i, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \end{aligned} \tag{3.3.55}$$

3.3. с. Дискретные эволюционные уравнения. Многие из вычислений, приведенных в предыдущих пунктах, можно распространить и на случай обсуждавшихся дискретных задач (см., например, [226, 227]). Здесь мы проанализируем случай цепочки Тоды

$$\frac{d^2 y_n}{dt^2} = e^{-(y_n - y_{n-1})} - e^{-(y_{n+1} - y_n)}. \tag{3.3.56}$$

Определим $r_n = y_n - y_{n-1}$, тогда из (4.3.56) следует

$$\frac{d^2 r_n}{dt^2} = 2e^{-r_n} - e^{-r_{n+1}} - e^{-r_{n-1}}. \tag{3.3.57}$$

Если определить

$$r_n = -\ln(1 + V_n), \tag{3.3.58}$$

то V подчиняется уравнению

$$\frac{d^2 \ln(1 + V_n)}{dt^2} = V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1}. \tag{3.3.59}$$

С физической точки зрения уравнение (3.3.59) описывает нелинейную лестничную линию передачи, и V_n является потенциалом n-го узла [229].

Воспользуемся заменой переменных

$$V_n = \frac{d^2 \ln F_n}{dt^2} \tag{3.3.60}$$

(отметим, что индекс обозначает координату узла, а не число солитонов). Подставив (3.3.60) в (3.3.59), получим билинейное (квадратичное) уравнение

$$\frac{1}{2} D_t^2 F_n \cdot F_n = F_{ntt} F_n - F_{nt}^2 = F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2. \tag{3.3.61}$$

Аналогом оператора D_x служит оператор D_n, удовлетворяющий соотношению

$$e^{D_n} a_n \cdot b_n = e^{\partial_n - \partial_{n'}} a_n b_{n'} |_{n=n'} = a_{n+1} b_{n-1}, \tag{3.3.62}$$

где $e^{\partial_n} a_n \equiv a_{n+1}$. Поэтому

$$\operatorname{ch} D_n a_n \cdot b_n = \frac{1}{2}(a_{n+1} b_{n-1} + a_{n-1} b_{n+1}). \tag{3.3.63}$$

Воспользовавшись (3.3.62), перепишем (3.3.61) в виде

$$\frac{1}{2} D_t^2 F_n \cdot F_n = (\operatorname{ch} D_n - 1) F_n F_n, \tag{3.3.64}$$

или

$$\frac{1}{2} D_t^2 F_n \cdot F_n = 2 \operatorname{sh}^2 \left(\frac{1}{2} D_n\right) F_n \cdot F_n. \tag{3.3.65}$$

Опять применима теория возмущений, т. е.

$$F_n = 1 + \varepsilon F_n^{(1)} + \varepsilon^2 F_n^{(2)} + \dots .$$

Односолитонному решению отвечает $F_n^{(j)} = 0$, $j \geqslant 2$, $F_n^{(1)} = e^{\eta_1}$. Таким образом,

$$\begin{gathered} F_{n,1} = 1 + e^{\eta_1}, \qquad \eta_1 = k_1 n - \omega_1 t, \\ \omega_1^2 = \left(2 \operatorname{sh} \frac{k}{2}\right)^2; \end{gathered} \tag{3.3.66}$$

поэтому потенциал V_n имеет вид

$$V_n = \frac{\omega_1^2}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{1}{2} \eta_1.$$

(Односолитонное решение может распространяться как вправо, так и влево.) Можно показать, что N-солитонному решению отвечает

(3.3.67a)
$$F_{n,N} = \sum_{\mu=0,1} \exp\left(\sum_{i=1}^{N} \mu_i \eta_i + \sum_{1 \leqslant i < j} A_{ij} \mu_i \mu_j \right),$$

где

$$\eta_i = p_i n - \Omega_i t + \eta_i^{(0)},$$

$$\Omega_i = 2\varepsilon_i \operatorname{sh} \frac{1}{2} p_i, \qquad \varepsilon_i = \pm 1,$$

$$e^{A_{ij}} = - \frac{(\Omega_i - \Omega_j)^2 - \left(2 \operatorname{sh} \frac{1}{2} (p_i - p_j)\right)^2}{(\Omega_i + \Omega_j)^2 - \left(2 \operatorname{sh} \frac{1}{2} (p_i + p_j)\right)^2},$$

или

(3.3.67b)
$$e^{A_{ij}} = \begin{cases} \left(\dfrac{\operatorname{sh} \frac{1}{4} (p_i - p_j)}{\operatorname{sh} \frac{1}{4} (p_i - p_j)} \right)^2, & \text{если} \quad \varepsilon_i \varepsilon_j > 0, \\ \left(\dfrac{\operatorname{ch} \frac{1}{4} (p_i - p_j)}{\operatorname{ch} \frac{1}{4} (p_i + p_j)} \right)^2, & \text{если} \quad \varepsilon_i \varepsilon_j < 0. \end{cases}$$

3.3. d. Преобразование Бэклунда в билинейной форме. Интересно при помощи прямого метода вывести преобразования Бэклунда и перестановочные соотношения для уравнения КдФ. Мы начнем с $N(f_N)$- и $(N+1)(f_{N+1})$-солитонных решений (здесь индекс обозначает число солитонов) уравнения КдФ в билинейной форме:

(3.3.68a)
$$D_x (D_t + D_x^3) f_N \cdot f_N = 0,$$

(3.3.68b)
$$D_x (D_t + D_x^3) f_{N+1} \cdot f_{N+1} = 0.$$

Мы покажем, что при заданном f_N мы можем найти f_{N+1}, решив линейное уравнение [217].

Умножив (3.3.68a) на f_{N+1}^2 и вычтя из него (3.3.68b), умноженное на f_N^2, получим

(3.3.69)
$$P = \left[D_x (D_t + D_x^3) f_N \cdot f_N\right] f_{N+1} f_{N+1} - \left[D_x (D_t + D_x^3) f_{N+1} \cdot f_{N+1}\right] f_N f_N = 0.$$

Воспользовавшись тождествами (которые можно легко проверить)

$$(3.3.70a)\qquad (D_xD_tf_N\cdot f_N)f_{N+1}f_{N+1}-f_Nf_ND_xD_tf_{N+1}\cdot f_{N+1}= \\ =2D_x[(D_tf_N\cdot f_{N+1})f_Nf_{N+1}],$$

$$(3.3.70b)\qquad f_{N+1}f_{N+1}(D_x^4f_N\cdot f_N)-f_Nf_ND_x^4f_{N+1}\cdot f_{N+1}= \\ =2D_x\left[\left(D_x^3f_N\cdot f_{N+1}\right)f_Nf_{N+1}-3\left(D_x^2f_N\cdot f_{N+1}\right)\left(D_xf_N\cdot f_{N+1}\right)\right],$$

мы получим, что P сводится к

$$(3.3.71)\qquad P=2D_x\left[\left(D_t+D_x^3\right)f_N\cdot f_{N+1}- \\ -3\left(D_x^2f_N\cdot f_{N+1}\right)\left(D_xf_N\cdot f_{N+1}\right)\right]=0.$$

Преобразование Бэклунда в билинейной форме получится, если положить

$$(3.3.72a)\qquad D_x^2f_N\cdot f_{N+1}=\lambda f_Nf_{N+1},$$

$$(3.3.72b)\qquad \left(D_t+3\lambda D_x+D_x^3\right)f_N\cdot f_{N+1}=0;$$

при этом мы удовлетворим равенству (3.3.71) (новое солитонное решение содержит параметр λ). Уравнения (3.3.72) представляют собой билинейный вариант преобразования Бэклунда, полученного в разд. 3.1.

В качестве примера мы покажем, как вычислить односолитонное решение из вакуумного состояния. «Нулевому» солитонному решению отвечает $f_0=1$; при этом $u=0$. Функция f_1, как это следует из (3.3.72), удовлетворяет уравнениям

$$(3.3.73a)\qquad \partial_x^2f_1=\lambda f_1,$$

$$(3.3.73b)\qquad \left(\partial_t+3\lambda\partial_x+\partial_x^3\right)f_1=0.$$

Решение системы (3.3.73) имеет вид

$$(3.3.74)\qquad \begin{gathered} f_1=e^{\eta_1/2}+e^{-\eta_1/2}, \\ \eta_1=k_1x-k_1^3t+\eta_1^{(0)},\qquad \lambda=\frac{k_1^2}{4}. \end{gathered}$$

Так как $u=2\partial_x^2\ln f$, то ясно, что

$$(3.3.75)\qquad f_1=e^{-\eta_1/2}\left(1+e^{\eta_1}\right)\doteq 1+e^{\eta_1}$$

(здесь $f\doteq g$ тогда и только тогда, когда $f=e^{\alpha x+\beta}g$, где α и β — константы, не зависящие от x). Два $\doteq$-эквивалентных решения f, g приводят к одному и тому же решению u; например, функция $\hat{f}_1=e^{-(1/2)\eta_1}$ эквивалентна $f_0=1$.

Легко проверить, что если мы возьмем f_1 вида (3.3.74), то преобразование Бэклунда приведет к решению

(3.3.76) $$f_2 = (k_1 - k_2)\left(e^{(\eta_1+\eta_2)/2} + e^{-(\eta_1+\eta_2)/2}\right) + (k_1 + k_2)\left(e^{(\eta_1-\eta_2)/2} + e^{-(\eta_1-\eta_2)/2}\right),$$

где $\eta_i = k_i x - k_i^3 t + \eta_i^{(0)}$. Отметим, что

$$f_2 = (k_1 - k_2)\, e^{-(\eta_1+\eta_2)/2}\left[1 - \left(\frac{k_1+k_2}{k_1-k_2}\right)e^{\eta_1} - \left(\frac{k_1+k_2}{k_1-k_2}\right)e^{\eta_2} + e^{\eta_1+\eta_2}\right] \simeq$$
$$\simeq 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_1+\eta_2+A_{12}}$$

(обычное двухсолитонное решение), где $e^{A_{12}} = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)^2$, если фазовые постоянные выбраны подходящим образом, т. е.

$$e^{\eta_i^{(0)}} \to -\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)e^{\eta_i^{(0)}}.$$

В общем случае N-солитонное решение, удовлетворяющее преобразованию Бэклунда, имеет вид

(3.3.77a) $$f_N = \sum_{\varepsilon=\pm 1} \frac{\prod\limits_{i<j}^{N} (\varepsilon_i k_i - \varepsilon_j k_j)}{\prod\limits_{i=1}^{N} \varepsilon_i k_i} \exp\left(\sum_{1}^{N} \frac{1}{2}\varepsilon_i \eta_i\right),$$

что эквивалентно N-солитонной формуле (3.3.15). Это можно показать следующим образом. В (3.3.15) возьмем $\varepsilon_i = 2\mu_i - 1$, $i = 1, 2, \ldots, N$, и выберем удобным образом фазовые множители $\eta_i^{(0)} = \eta_i^{(1)} + \eta_i^{(2)}$, где $\exp \eta_i^{(1)} = -\prod_{j=1,\ j\neq i}^{N} (k_i + k_j)/(k_j - k_i)$. Обозначив $\xi_i = k_i x - k_i^3 t + \eta_i^{(2)}$, преобразуем (3.3.15) к виду

(3.3.77b) $$F_N = \sum_{\varepsilon=\pm 1} (-1)^{N(N+1)/2} \prod_{i=1}^{N} \varepsilon_i \prod_{i<j}^{N} \left(\frac{\varepsilon_i k_i - \varepsilon_j k_j}{k_i - k_j}\right) \times \exp\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}(\varepsilon_i + 1)\,\xi_i\right).$$

При этом мы воспользовались равенствами

(3.3.77c) $$(-1)^{\sum\limits_{1}^{N} (\varepsilon_i+1)/2} = (-1)^N \prod_{i=1}^{N} \varepsilon_i,$$

(3.3.77d) $$\prod_{1\leqslant i<j}^{N}\left(\frac{k_i-k_j}{k_i+k_j}\right)^{(\varepsilon_i+1)(\varepsilon_j+1)/2}\prod_{i,\,j=1}^{N}\left(\frac{k_i+k_j}{k_i-k_j}\right)^{(\varepsilon_i+1)/2}=$$
$$=(-1)^{N(N-1)/2}\prod_{1\leqslant i<j}^{N}\frac{(\varepsilon_i k_i-\varepsilon_j k_j)}{(k_i-k_j)},$$

(3.3.77e) $$(-1)^{(\varepsilon_i+1)/2}\left(\frac{k_i-k_j}{k_i+k_j}\right)^{[(\varepsilon_i+1)(\varepsilon_j+1)/2-(\varepsilon_i+1)/2-(\varepsilon_j+1)/2]}=$$
$$=-\frac{(\varepsilon_i k_i-\varepsilon_j k_j)}{(k_i-k_j)}.$$

Применяя соотношение эквивалентности $f\triangleq g$, получим

(3.3.78) $$F_N\triangleq\sum_{\varepsilon=\pm1}\prod_{i<j}^{N}\left(\frac{\varepsilon_i k_i-\varepsilon_j k_j}{(k_i^2-k_j^2)}\right)\frac{1}{\prod_1^N\varepsilon_i k_i}\exp\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}\varepsilon_i\eta_i\right).$$

Очевидно, что выражение (3.3.78) эквивалентно (3.3.77a), так как множитель $\prod_{i<j}^{N}1/(k_i^2-k_j^2)$ является константой.

Теперь мы воспользуемся преобразованием Бэклунда (3.3.72) для того, чтобы вывести формулу, описывающую суперпозицию солитонных решений [228]. Рассмотрим вначале четыре решения f_{N-1}, f_N, $\tilde f_N$ и f_{N+1}, зависящие от параметров следующим образом:

(3.3.79) $$f_{N-1}=f_{N-1}(k_1,k_2,\ldots,k_{N-1}),\quad \tilde f_N=\tilde f_N(k_1,\ldots,k_{N-1},k_{N+1}),$$
$$f_N=f_N(k_1,\ldots,k_{N-1},k_N),\quad f_{N+1}=f_{N+1}(k_1,\ldots,k_{N-1},k_N,k_{N+1}).$$

Пусть к тому же эти решения удовлетворяют преобразованиям Бэклунда:

(3.3.80a) $$\left(D_x^2-\frac{1}{4}k_N^2\right)f_{N-1}\cdot f_N=0,$$

(3.3.80b) $$\left(D_x^2-\frac{1}{4}k_{N+1}^2\right)f_{N-1}\cdot\tilde f_N=0,$$

(3.3.80c) $$\left(D_x^2-\frac{1}{4}k_{N+1}^2\right)f_N\cdot f_{N+1}=0,$$

(3.3.80d) $$\left(D_x^2-\frac{1}{4}k_N^2\right)\tilde f_N\cdot f_{N+1}=0.$$

Умножая (3.3.80a) на $\tilde f_N f_{N+1}$ и вычитая (3.3.80b), умноженное на $f_{N-1}f_N$, получим

(3.3.81) $$\tilde f_N f_{N+1}(D_x^2 f_{N-1}\cdot f_N)-f_{N-1}f_N(D_x^2\tilde f_N\cdot f_{N+1})=0.$$

Для любых четырех гладких функций (a, b, c, d) от x выполняется тождество

(3.3.82) $$\left(D_x^2 a\cdot b\right) cd - abD_x^2(c\cdot d) = D_x\left((D_x a\cdot d)\cdot bc - (ad)\cdot(D_x c\cdot b)\right).$$

Это тождество позволяет привести (3.3.81) к виду

(3.3.83) $$D_x\left[(D_x f_{N-1}\cdot f_{N+1})\cdot \tilde{f}_N f_N + (f_{N-1}\cdot f_{N+1})\cdot(D_x\tilde{f}_N\cdot f_N)\right] = 0.$$

Аналогично из (3.3.80b) и (3.3.80c) следует

(3.3.84) $$D_x\left[(D_x f_N\cdot\tilde{f}_N)\cdot(f_{N-1}f_{N+1}) + (f_N\tilde{f}_N)\cdot(D_x f_{N-1}\cdot f_{N+1})\right] = 0.$$

Вычитая (3.3.84) из (3.3.83) и замечая, что $D_x a\cdot b = -D_x b\cdot a$, получим соотношение

(3.3.85) $$D_x(D_x f_{N-1}\cdot f_{N+1})\cdot(f_N\tilde{f}_N) = 0,$$

означающее, что величина $D_x f_{N-1}\cdot f_{N+1}$ пропорциональна $f_N\tilde{f}_N$, т. е.

(3.3.86) $$D_x f_{N-1}\cdot f_{N+1} = Cf_N\tilde{f}_N.$$

Постоянная C определяется любыми тремя солитонными решениями (при любом взаимном расположении солитонов). Выражение (3.3.86) называют формулой суперпозиции солитонов. По заданному $f_0 = 1$ мы, воспользовавшись преобразованием Бэклунда, вычислим f_1, а затем с помощью (3.3.86) найдем $f_N(N \geqq 2)$.

Весьма поучительно вывести задачу рассеяния и временну́ю зависимость для уравнения КдФ из преобразования Бэклунда в билинейной форме. Определим

(3.3.87a) $$u = 2(\log f_N)_{xx} = 2\,\frac{f_{Nxx}f_N - f_{Nx}^2}{f_N^2},$$

(3.3.87b) $$\psi = \frac{f_{N+1}}{f_N}$$

и заметим, что

(3.3.88a) $$\frac{D_x f_{N+1}\cdot f_N}{f_N^2} = \psi_x,$$

(3.3.88b) $$\frac{D_x^2 f_{N+1}\cdot f_N}{f_N^2} = \psi_{xx} + u\psi,$$

(3.3.88c) $$\frac{D_x^3 f_{N+1}\cdot f_N}{f_N^2} = \psi_{xxx} + u\psi.$$

Воспользовавшись (3.3.72), мы получим пару уравнений для одной функции ψ, необходимую для МОЗР:

(3.3.89a) $$\psi_{xx} + u\psi = \lambda\psi,$$

(3.3.89b) $$\psi_t + 3\lambda\psi_x + \psi_{xxx} + u\psi_x = 0$$

(отметим, что (3.3.89b), воспользовавшись (3.3.89a), можно привести к виду $\psi_t = A\psi + B\psi$). Таким образом, мы видим, что из уравнения и его N-солитонного решения можно вывести и преобразование Бэклунда, и пару операторов, необходимых для МОЗР.

3.3. е. Замечания о некоторых многомерных задачах. Наконец, мы хотим отметить, что описанный прямой метод нахождения солитонных решений применялся и к некоторым многомерным нелинейным уравнениям. Мы обсудим вкратце два примера.

Первым рассмотрим двумерный вариант уравнения КдФ, т. е. так называемое уравнение Кадомцева — Петвиашвили (КП):

$$(3.3.90a) \qquad (u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + \alpha u_{yy} = 0, \qquad \alpha = \pm 1.$$

Подставив $u = 2(\log f)_{xx}$ в (3.3.90a), получим

$$(3.3.90b) \qquad \left(D_x D_t + D_x^4 + \alpha D_y^2\right) f \cdot f = 0.$$

Сатсума (1976) [445], воспользовавшись описанным выше методом, показал, что N-солитонное решение имеет вид

$$(3.3.91a) \qquad f = \sum_{\mu=0} \exp\left[\sum_{1 \le i < j}^{N} \mu_i \mu_j A_{ij} + \sum_{i=1}^{N} \mu_i \eta_i\right],$$

где

$$\eta_i = k_i (x + p_i y - C_i t), \quad C_i = k_i^2 + \alpha p_i^2,$$

$$(3.3.91b) \qquad e^{A_{ij}} = \frac{3(k_i - k_j)^2 - \alpha (p_i - p_j)^2}{3(k_i + k_j)^2 - \alpha (p_i - p_j)^2}.$$

Это N-солитонное решение представляет собой набор N плоских взаимодействующих друг с другом волн.

Майлз [375, 376] исследовал некоторые условия, при которых две такие плоские волны резонансно порождают третью. Точнее говоря, он отметил, что сдвиг фаз, возникающий при взаимодействии двух солитонов, может быть произвольно большим. Идею Майлза можно легко понять на примере двухсолитонного решения (3.3.90) при $\alpha = +1$. Отметим, что $e^{A_{ij}} = 0$, если выбрать волновые векторы, удовлетворяющие соотношению

$$(3.3.92a) \qquad \sqrt{3}(k_1 - k_2) \pm (p_1 - p_2) = 0;$$

при этом двухсолитонное решение принимает вид

$$(3.3.92b) \qquad f = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2}.$$

Если предположить, что $k_i > 0$, $i = 1, 2$, то при $x \to -\infty$ решение может быть нетривиальным лишь в окрестности характери-

стик $\eta_1 = \text{const}$ или $\eta_2 = \text{const}$; при этом $u \sim (k_i^2/2)\,\text{sech}^2 \frac{1}{2}\eta_i$, т. е. имеем два плоских солитона. Однако при $x \to +\infty$ решение будет отличным от нуля лишь при $\eta_1 - \eta_2 = \text{const}$. (Отметим, что $f \sim e^{\eta_2}(1 + e^{\eta_1 - \eta_2}) \hat{=} (1 + e^{\eta_1 - \eta_2})$.) Таким образом, в результате их взаимодействия возникает только одна плоская волна — солитон $u = (k_3^2/2)\,\text{sech}^2 \frac{1}{2}\eta_3$, где

$$\eta_3 = \eta_1 - \eta_2,$$

$$k_3 = k_1 - k_2, \qquad k_3 p_3 = k_1 p_1 - k_2 p_2, \qquad C_3 = \frac{k_1 C_1 - k_2 C_2}{k_1 - k_2}.$$

Если

$$\omega_i = k_i C_i$$

(дисперсионное соотношение), то можно проверить, что из (3.3.92а) получаем

$$\omega_3 = \omega_1 - \omega_2.$$

Таким образом, $\underline{k}_3 = \underline{k}_1 - \underline{k}_2$ и $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$, т. е. мы имеем случай тройного резонанса, и два солитона при $x \to -\infty$ порождают третий при $x \to +\infty$! Отметим, что аналогичное резонансное взаимодействие возникает в бесстолкновительной плазме [514].

Интересно отметить, что метод Хироты в некотором ограниченном смысле срабатывает для уравнения sin-Гордон в $(2+1)$-пространстве-времени [1]:

$$u_{xx} + u_{yy} - u_{tt} = \sin u \tag{3.3.93}$$

[213]; (см. также [328], [82] и [506]). Произведя замену зависимой переменной

$$u = i \log\left(\frac{f^*}{f}\right) \tag{3.3.94a}$$

в уравнении (3.3.93), получим

$$(D_x^2 + D_y^2 - D_t^2)\, f \cdot f = \frac{1}{2}(f^2 - f^{*2}). \tag{3.3.94b}$$

Обнаружено, что формула

$$f = \sum_{\mu=0,1} \exp\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\mu_j \eta_j + i\frac{\pi}{2}\right) + \sum_{1 \le i < j} \mu_i \mu_j A_{ij}\right) \tag{3.3.95a}$$

---

[1]) На самом деле, двумерность пространственной переменной в найденных решениях является фиктивной и устраняется переходом в подходящую систему координат. — *Прим. ред.*

при

$$\eta_i = k_i x + p_i y - \omega_i t + \eta_i^{(0)}; \qquad k_i^2 + p_i^2 - \omega_i^2 = 1, \tag{3.3.95b}$$

$$e^{A_{ij}} = -\frac{(k_i - k_j)^2 + (p_i - p_j)^2 - (\omega_i - \omega_j)^2}{(k_i + k_j)^2 + (p_i + p_j)^2 - (\omega_i + \omega_j)^2} \tag{3.3.95c}$$

удовлетворяет уравнению (3.3.94b) для произвольных k_i, p_i при $N = 1, 2$. Однако при $N = 3$ на это решение следует наложить дополнительное ограничение

$$\det \begin{vmatrix} k_1 & p_1 & \omega_1 \\ k_2 & p_2 & \omega_2 \\ k_3 & p_3 & \omega_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.3.95d}$$

Случаи $N > 3$ были рассмотрены в работе [280].

В заключение отметим, что: а) Хирота и Вадати (1979) [231] показали, как можно вывести линейное интегральное уравнение Гельфанда — Левитана из прямого метода; б) Хирота (1979) [223] предъявил примеры уравнений, для которых можно построить двух- (но не более) «солитонные» решения в) Накамура [392, 393] воспользовался прямым методом для построения решений с одним и многими (двумя) периодами; г) Оиши (1979) [403] показал, как с точки зрения прямого подхода можно рассматривать детерминанты Фредгольма и «непрерывный спектр».

3.4. Рациональные решения нелинейных эволюционных уравнений. Оказывается, что дифференциальные уравнения, которым посвящена настоящая книга, допускают в качестве решений некоторый класс функций, рациональных по пространственной переменной x. Эти рациональные решения впервые были получены в работе Эро, Мак-Кина и Мозера [36] (последующие результаты можно найти, например, в работах Адлера и Мозера [32], Абловица и Сатсумы [24]). В этом разделе мы будем следовать методу Абловица и Сатсумы [24]. (i) Для уравнения КдФ рациональные решения можно получить, вычисляя длинноволновый предел одномерных солитонных решений, найденных прямыми методами (скажем, методом Хироты). В частности, мы проведем вычисления для небольшого числа первых солитонных решений, а затем покажем, как осуществить этот предельный переход на языке преобразования Бэклунда (в билинейной форме) для уравнения КдФ. В результате получим рекуррентную формулу, позволяющую получить весь класс рациональных решений уравнения КдФ. Эти рациональные решения имеют полюсы на вещественной оси x. (ii) Эту же конструкцию можно применить для построения (рациональных)

солитонов уравнений мКдФ, Буссинеска и Кадомцева — Петвиашвили (К—П). Для уравнения мКдФ существуют вещественные несингулярные рациональные решения, что согласуется с результатами работы Оно [409].

В последнем случае (уравнение К—П) имеется частное решение, являющееся вещественной несингулярной функцией, убывающей степенным образом во всех направлениях. Это решение обладает солитонными свойствами. Мы будем называть такой многомерный солитон *лампом*. Точное солитонное решение впервые получено в работе Манакова и др. [350]. Следует отметить, что приводимые здесь методы применимы и для многомерных задач [447], имеющих физические приложения.

Мы начнем с уравнения КдФ

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{3.4.1}$$

Как было показано в разд. 3.3, уравнение (3.4.1) имеет N-солитонное решение вида

$$u = 2(\ln F_N)_{xx}, \tag{3.4.2}$$

где функция F_N удовлетворяет уравнению

$$D_x(D_t + D_x^3) F_N \cdot F_N = 0. \tag{3.4.3}$$

Напомним определение оператора D,

$$D_x^n D_t^m a \cdot b = (\partial_x - \partial_{x'})^n (\partial_t - \partial_{t'})^m a(x, t) b(x', t')\big|_{\substack{x'=x\\ t'=t}} \tag{3.4.4}$$

(см. также разд. 3.3) и то, что функцию F_N можно найти разложением в (формальный) ряд

$$F_N = 1 + \varepsilon F_N^{(1)} + \varepsilon^2 F_N^{(2)} + \ldots . \tag{3.4.5}$$

Подстановка (3.4.5) в (3.4.3) и приравнивание нулю коэффициентов при степенях ε дает систему уравнений на функции $F_N^{(k)}$. Это разложение обрывается, если $F_N^{(1)}$ выбрать в виде

$$F_N^{(1)} = \sum_{i=1}^{N} \exp(\eta_i), \quad \eta_i = k_i x - k_i^3 t + \eta_i^{(0)}, \tag{3.4.6}$$

где k_i, $\eta_i^{(0)}$ — произвольные константы (в конце мы положим $\varepsilon = 1$). В разд. 3.3 получены солитонные решения для $N = 1$, 2, 3:

$$F_1 = 1 + e^{\eta_1}, \tag{3.4.7a}$$

$$F_2 = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}}, \tag{3.4.7b}$$

$$\begin{aligned} F_3 = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta} + e^{\eta_3} + e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}} + e^{\eta_1 + \eta_3 + A_{12}} + \\ + e^{\eta_2 + \eta_3 + A_{23}} + e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + A_{12} + A_{23} + A_{13}}, \end{aligned} \tag{3.4.7c}$$

$$\ldots$$

При произвольном N имеет место формула

(3.4.8a) $$F_N = \sum_{\underline{\mu}=0,1} \exp\left(\sum_{i<j}^{N} A_{ij}\mu_i\mu_j + \sum_{i=1}^{N} \mu_i\eta_i \right),$$

где A_{ij} в (3.4.7) и (3.4.8a) удовлетворяют соотношению

(3.4.8b) $$\exp A_{ij} = \left(\frac{k_i - k_j}{k_i + k_j} \right)^2 .$$

Формулы (3.4.7a—c) являются частными случаями (3.4.8). Кроме того, отметим, что из (3.4.7a) и (3.4.2) получается обычное односолито́нное решение, имеющее вид

(3.4.9) $$u = \left(\frac{k_1^2}{2} \right) \operatorname{sech}^2 \frac{1}{2} \left(k_1 x - k_1^3 t + \eta_1^{(0)} \right).$$

К рациональным решениям можно перейти благодаря имеющемуся произволу выбора постоянных $\eta_i^{(0)}$. Например, если в (3.4.9) мы выберем $e^{\eta_i^{(0)}} = -1$, то получится сингулярное решение

(3.4.10) $$u = -\left(\frac{k_1^2}{2} \right) \Big/ \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} \left(k_1 x - k_1^3 t \right).$$

Переходя к пределу $k_1 \to 0$ (т. е. к «длинноволновому» пределу), мы получим

(3.4.11) $$u = -2/x^2.$$

Решение (3.4.11) является первым представителем класса рациональных решений. Оказывается, что при подходящем выборе фазовых постоянных можно получить нетривиальный предел для любой функции F_N.

Обсудим теперь приемы вычислений функций F_N. С этой целью вернемся к рассмотрению (3.4.7a). Обозначив $\alpha_i = \exp\left(\eta_i^{(0)}\right)$, перепишем (3.4.7a) в виде

(3.4.12) $$F_1 = 1 + \alpha_1 e^{\xi_1}, \quad \xi_1 = k_1 \left(x - k_1^2 t \right).$$

При $k_1 \to 0$ имеем

$$F_1 = 1 + \alpha_1 (1 + \xi_1) + O\left(k_1^2\right).$$

Выбрав $\alpha_1 = -1$, получим

$$F_1 = -k_1 (x + O(k_1)).$$

Так как u определяется по формуле (3.4.2), то

$$F_1 \triangleq x + O(k_1)$$

(здесь, как и прежде, две функции f и g считаются эквивалентными, $f \doteq g$, тогда и только тогда, когда $f = e^{ax+b}g$, a, b не зависят от x).

В пределе $k_1 \to 0$, $F_1 \doteq \Theta_1$, где

(3.4.13) $$\Theta_1 = x.$$

Отсюда по формуле (3.4.2) получается рациональное решение (3.4.11). Таким же образом можно преобразовать F_2 (и все высшие F_N).

При $N > 1$ будем считать, что все $k_i \to 0$ одинаково быстро (т. е. $k_i = \varepsilon \bar{k}_i$, $\bar{k}_i = O(1)$). Для F_2 получим

(3.4.14) $$F_2 = 1 + \alpha_1 e^{\xi_1} + \alpha_2 e^{\xi_2} + \alpha_1\alpha_2 e^{\xi_1 + \xi_2 + A_{12}}.$$

При k_1, $k_2 \to 0$ мы потребуем равенства нулю коэффициентов при членах порядка $O(1)$ и $O(k)$ в F_2:

$$O(1): \quad 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1\alpha_2 e^{A_{12}} = 0.$$

$$O(k): \quad k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + (k_1 + k_2)\alpha_1\alpha_2 e^{A_{12}} = 0.$$

Решением этих уравнений служит

$$\alpha = -\alpha_2 = \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2}.$$

Оказывается, что при этом члены разложения порядка $O(k^2)$ также отсутствуют, и в результате получается

(3.4.15a) $$F_2 = -\frac{1}{6} k_1 k_2 (k_1 + k_2)[x^3 + 12t + O(k)].$$

Так как $k \to 0$, то F_2 эквивалентно Θ_2:

(3.4.15b) $$\Theta_2 = x^3 + 12t, \quad u = 2(\ln \Theta_2)_{xx}.$$

Функция Θ_2 имеет три нуля, поэтому u имеет три полюса. В трехсолитонном случае, если мы выберем

$$\alpha_1 = \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} \cdot \frac{k_3 + k_1}{k_3 - k_1},$$

$$\alpha_2 = \frac{k_2 + k_3}{k_2 - k_3} \cdot \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2},$$

$$\alpha_3 = \frac{k_3 + k_1}{k_3 - k_1} \cdot \frac{k_2 + k_3}{k_2 - k_3},$$

то найдем функцию

(3.4.16a) $$F_3 = -\frac{1}{360} k_1 k_2 k_3 (k_1 + k_2)(k_2 + k_3)(k_3 + k_1)[(x^6 + 60x^3 t - 720t^2) + O(k)],$$

которая в пределе $k \to 0$ эквивалентна функции Θ_3

(3.4.16b) $$\Theta_3 = x^6 + 60x^3 t - 720t^2,$$

имеющей шесть нулей. В принципе этот прием срабатывает при любом количестве солитонов, но вычисления становятся весьма громоздкими. Поэтому мы воспользуемся преобразованием Бэклунда (в билинейной форме) для вывода рекуррентной формулы, порождающей рациональные решения.

Вначале мы слегка преобразуем формулу N-солитонного решения (3.4.8а). Напомним формулу (3.3.78) из разд. 3.3:

$$F_N \triangleq \hat{F}_N = \sum_{\varepsilon=\pm 1} \prod_{i<j}^{N} \frac{(\varepsilon_i k_i - \varepsilon_j k_j)}{\left(k_i^2 - k_j^2\right)} \cdot \frac{\exp\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \varepsilon_i \eta_i\right)}{\prod_{i=1}^{N} \varepsilon_i k_i}. \tag{3.4.17}$$

Так, например,

$$\hat{F}_1 = \frac{1}{k_1}\left(e^{\eta_1/2} - e^{-\eta_1/2}\right) = -\frac{1}{k_1} e^{-\eta_1/2}\left(1 - e^{\eta_1}\right),$$

что эквивалентно (3.4.17). Преимущество формулы (3.4.17) состоит в том, что в пределе $k_1 \to 0$ она непосредственно переходит в полином от x. Эту формулу можно переписать (здесь и далее мы опускаем крышку ^ над $\hat{F}_N$) следующим образом:

$$F_N = \frac{g_N}{\prod_{i<j}^{N} \left(k_i^2 - k_j^2\right) \prod_{l=1}^{N} k_l}, \tag{3.4.18}$$

где

$$g_N = \sum_{\varepsilon=\pm 1} \prod_{i=j} (\varepsilon_i k_i - \varepsilon_j k_j) \prod_{i=1}^{N} \varepsilon_i \exp\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \varepsilon_i \eta_i\right) \tag{3.4.19}$$

Отметим следующие важные свойства функции g:

(i) $$g_N(k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots, k_j, \ldots, k_N) = -g_N(k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots, k_j, \ldots k_N)$$

при $i < j$ (функция g_N антисимметрична по аргументам)

(ii) $g_N(k_1 = 0, k_2, \ldots, k_N) = 0$;

(iii) $g_N(k_1 = k_2, k_3, \ldots, k_N) = g_N(k_1 = -k_2, k_3, \ldots, k_N) = 0$.

Свойства (i)—(iii) означают, что функция g_N имеет в качестве множителя

$$\prod_{i<j}^{N} \left(k_i^2 - k_j^2\right) \prod_{i=1}^{N} k_i.$$

Таким образом, первый член разложения функции F_N при $k_i \to 0$ по крайней мере порядка $O(1)$, и

(3.4.20) $$F_N = a_N \Theta_N(x) + O(k).$$

Ниже мы покажем, что $a_N \neq 0$. Кроме того, так как каждый k_i входит в фазовый множитель выражения (3.4.17) с множителем x, то для того, чтобы функция F_N имела по крайней мере первый порядок, нужно, чтобы полином $\Theta_N(x) = x^P + \ldots$ имел старшую степень

$$P = N + N\left(\frac{N-1}{2}\right) = \frac{N(N+1)}{2}.$$

Теперь мы выведем рекуррентную формулу для Θ_N. Мы воспользуемся формулой

(3.4.21) $$D_x F_{N-1} \cdot F_{N+1} = C F_N \tilde{F}_N,$$

выведенной в разд. 3.3 из преобразования Бэклунда. Функции F_{N-1}, F_{N+1}, F_N и $\tilde{F}_N$, являющиеся многосолитонными решениями, зависят от параметров следующим образом:

$$\begin{aligned}
F_{N-1} &= F_{N-1}(k_1, \ldots, k_{N-1}), \\
F_N &= F_N(k_1, \ldots, k_{N-1}, k_N), \\
\tilde{F}_N &= \tilde{F}_N(k_1, \ldots, k_{N-1}, k_{N+1}), \\
F_{N+1} &= F_{N+1}(k_1, \ldots, k_{N-1}, k_N, k_{N+1}).
\end{aligned}$$

Константа C определяется любыми тремя солитонными решениями, заданными формулой (3.4.17). Например, если взять

$$\begin{aligned}
F_0 &= 1, \\
F_1 &= \frac{1}{k_1}\left(e^{\eta_1/2} - e^{-\eta_1/2}\right), \\
F_2 &= \frac{1}{k_1 k_2 \left(k_1^2 - k_2^2\right)} \left[(k_1 - k_2)\left(e^{(\eta_1+\eta_2)/2} - e^{-(\eta_1+\eta_2)/2}\right) + \right. \\
&\qquad \left. + (k_1 + k_2)\left(e^{-(\eta_1-\eta_2)/2} - e^{(\eta_1-\eta_2)/2}\right)\right],
\end{aligned}$$

то $C = -1/2$.

Далее будем пользоваться формулой суперпозиции

(3.4.22) $$D_x F_{N+1} \cdot F_{N-1} = \frac{1}{2} F_N \tilde{F}_N.$$

Из (3.4.20) и (3.4.22) можно получить рекуррентную формулу для a_N и Θ_N. Подставив (3.4.20) в (3.4.22), получим

(3.4.23) $$a_{N+1} a_{N-1} D_x \Theta_{N+1} \Theta_{N-1} = \frac{1}{2} a_N^2 \Theta_N^2.$$

Так как $\Theta_N(x)$ является полиномом по x, то соотношение (3.4.23) можно выполнять для каждой степени по отдельности, и в частности для старшей степени $x^{N(N+1)/2}$. Поэтому a_N удовлетворяет рекуррентному соотношению

(3.4.24) $$a_{N+1}a_{N-1}(4N+2) = a_N^2,$$

а Θ_N удовлетворяет

(3.4.25) $$D_x\Theta_{N+1}\Theta_{N-1} = (2N+1)\Theta_N^2$$

(см. также [32]). В наших предыдущих вычислениях для нескольких первых солитонов мы уже вывели

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{6}, \quad a_3 = \frac{1}{360},$$

$$\Theta_0 = 1, \quad \Theta_1 = x, \quad \Theta_2 = x^3 + 12t, \quad \Theta_3 = x^6 + 60x^3t - 720t^2.$$

Из рекуррентной формулы следует, что коэффициент $a_N \neq 0$ при всех $N \geqslant 0$. Можно воспользоваться соотношением (3.4.25) и Θ_0, Θ_1 для вычисления Θ_2, Θ_3 и всех высших Q_N, если дополнить его уравнением эволюции по времени. Для этого можно использовать либо исходное нелинейное уравнение в частных производных (в нашем случае уравнение КдФ), либо уравнение временной зависимости (3.3.72b), найденное из преобразования Бэклунда (положив при этом $\lambda = (1/4)k_{N+1}^2$ и устремив $k \to 0$):

(3.4.26) $$\left(D_t + D_x^3\right)\Theta_N \cdot \Theta_{N+1} = 0.$$

К частному решению Θ_{N+1} можно добавить Θ_{N-1}, умноженное на произвольный множитель, но мы берем этот множитель равным нулю. В описанном предельном переходе для каждой фиксированной степени k полином является однородной функцией по (x^3) и t. Например, мы знаем, что старшим порядком Θ_3 является x^6. Таким образом, полином Θ_3 должен иметь следующий общий вид: $x^6 + \alpha x^3t + \beta t^2$. Мы определяем коэффициенты $\alpha = 60$, $\beta = -720$ при помощи (3.4.25), (3.4.26). Хотя, разумеется, можно добавить к Θ_3 член C_x и соотношения (3.4.25), (3.4.26) останутся при этом выполненными, но мы берем $C = 0$, так как этот член не может возникнуть в результате предельного перехода.

Поскольку каждой степени x^3 соответствует степень t, то все решения удовлетворяют автомодельному уравнению для $w(z)$, где

$$u = \frac{1}{(3t)^{2/3}}w(z), \qquad z = \frac{x}{(3t)^{1/3}},$$

$$w''' + 6ww' - (2w + zw') = 0.$$

Поэтому автомодельное решение также обладает классом рациональных решений. Итак, мы показали, что рациональные решения возникают в результате предельных переходов в солитонных решениях и что их можно вычислить при помощи преобразования Бэклунда, и получили непосредственную связь между солитонами и автомодельными решениями. Частные элементарные решения можно получить и для других уравнений, включая классические трансценденты Пенлеве [149] (обзор), [35], [72]. Эти авторы также вывели преобразования Бэклунда между решениями таких нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (см. также [165]).

Как мы уже отмечали, методы, которым мы пользовались, можно без труда распространить и на другие нелинейные эволюционные уравнения, обладающие солитонными решениями. Здесь мы лишь обсудим результаты, полученные при вычислении предельных переходов в солитонных решениях (i) уравнения К—П (двумерного уравнения КдФ); (ii) уравнения Буссинеска; (iii) уравнения мКдФ с ненулевыми граничными условиями.

Уравнение К—П имеет вид

(3.4.27a) $$\partial_x (u_t + 6uu_x + u_{xxx}) + \alpha u_{yy} = 0,$$

где α — постоянная, зависящая от дисперсионных свойств системы. Мы ищем убывающие решения уравнения (3.4.27a) $u \to 0$ при $|x| \to \infty$ следующего вида [445]:

(3.4.27b) $$u = 2 (\ln F_N)_{xx}.$$

Подстановка (3.4.27b) в (3.4.27a) дает

(3.4.28) $$\left(D_x D_t + D_x^4 + \alpha D_y^2\right) F_N \cdot F_N = 0.$$

N-солитонное решение можно вычислить прямым методом (см. разд. 3.3). Здесь мы обсудим только случаи $N = 1, 2$. Одно- и двухсолитонные решения имеют вид

(3.4.29a) $$F_1 = 1 + e^{\eta_1},$$

(3.4.29b) $$F_2 = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}},$$

где

(3.4.29c) $$\eta_i = k_i \left(x + P_i y - \left(k_i^2 + \alpha P_i^2\right) t\right) + \eta_i^{(0)},$$

(3.4.29d) $$\exp A_{ij} = \frac{3 (k_i - k_j)^2 - \alpha (P_i - P_j)^2}{3 (k_i + k_j)^2 - \alpha (P_i - P_j)^2}.$$

Взяв $e^{\eta_i^{(0)}} = -1$, $k_i \to 0$ (причем $P_i = O(1)$, $k_1/k_2 = O(1)$), получим

(3.4.30a) $$F_1 = -k_1\theta_1 + O(k_1^2),$$

(3.4.30b) $$F_2 = k_1k_2(\theta_1\theta_2) + \frac{12}{\alpha(P_1 - P_2)^2} + O(k^3),$$

где

(3.4.30c) $$\theta_i = x + P_i y - \alpha P_i^2 t,$$

и мы воспользовались

(3.4.30d) $$\exp A_{12} \sim 1 + \frac{12k_1k_2}{\alpha(P_1 - P_2)^2}.$$

Итак, мы получили следующие рациональные решения (u определяется по формуле (3.4.27b)):

(3.4.31a) $$\hat{F}_1 = \theta_1,$$

(3.4.31b) $$\hat{F}_2 = \theta_1\theta_2 + B_{12}, \quad B_{12} = \frac{12}{\alpha(P_1 - P_2)^2}.$$

Хотя решения $\hat{F}_1$ и $\hat{F}_2$ имеют в общем случае сингулярности, но существует и несингулярное решение F_2, если $\alpha = -1$ и $P_2 = P_1^*$. В этом случае

(3.4.31c) $$\hat{F}_2 = \theta_1\theta_1^* - \frac{12}{(P_1 - P_1^*)^2}.$$

Положив $P_1 = P_R + iP_I$, получим

(3.4.32a) $$u = 2\partial_x^2 \ln\left[(x' + P_R y')^2 + P_I^2 (y')^2 + \frac{3}{P_I^2}\right],$$

где

$$x' = x - (P_R^2 + P_I^2)t,$$
$$y' = y + 2P_R t.$$

Выражение (3.4.32a) можно переписать в виде

(3.4.32b) $$u = \frac{4\left(-(x' + P_R y')^2 + P_I^2 (y')^2 + 3/P_I^2\right)}{\left((x' + P_R y')^2 + P_I^2 (y')^2 + 3/P_I^2\right)^2}.$$

Итак, мы имеем решение, представляющее собой двумерный солитон (ламп), убывающее как $O(1/x^2, 1/y^2)$ при $|x|, |y| \to \infty$ и двигающееся со скоростью $v_x = P_R^2 + P_I^2$, $v_y = -2P_R$ (см. рис. 3.1). При $N = 4$ можно построить двухламповое решение.

Здесь мы приведем результаты вычислений для $N = 3$, 4:

(3.4.33a) $F_3 = \theta_1\theta_2\theta_3 + B_{12}\theta_3 + B_{23}\theta_1 + B_{31}\theta_2$,

(3.4.33b) $F_4 = \theta_1\theta_2\theta_3\theta_4 + B_{12}\theta_3\theta_4 + B_{13}\theta_2\theta_4 + B_{14}\theta_2\theta_3 + B_{23}\theta_1\theta_4 + B_{24}\theta_1\theta_3 + B_{34}\theta_1\theta_2 + B_{12}B_{34} + B_{13}B_{24} + B_{14}B_{23}$,

где θ_i определены формулой (3.4.30c), $B_{ij} = 12/(\alpha(P_i - P_j)^2)$. Взяв $\alpha = -1$, $P_3 = \overset{*}{P_1}$, $P_4 = \overset{*}{P_2}$ в (3.4.33b), получим двухламповое решение. Отметим, что при этих предложениях F_4 является положительной функцией и приводит к решению u (3.4.27b), убывающему как $O(1/x^2, 1/y^2)$ при $|x|, |y| \to \infty$. В результате взаимодействия двух лампов не происходит сдвига фаз. Эти результаты согласуются с ответами, полученными в работе Манакова

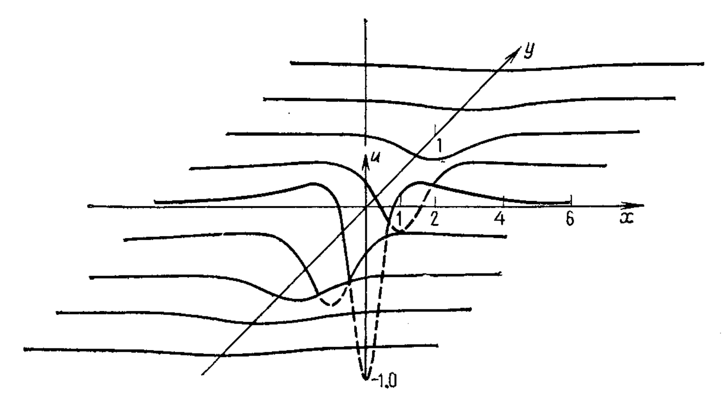


Рис. 3.1. Ламп — локализованный солитон (3.4.32). Пространственная картина в фиксированный момент времени, $P_R = 0$, $P_I = 1/8$, $\alpha = -1$.

и др. [350]. В общем случае, когда $N = 2M$, этот метод дает формулу для M-лампового решения (см. [447]). Конечно, используемый здесь метод не дает, к сожалению, ясного представления о роли этих решений в общей задаче с начальными условиями, т. е. о их типичности, устойчивости и т. д. Недавняя работа Захарова и Манакова [537] показала, однако, что для быстро убывающих начальных условий (быстрее чем $O(1/x^2, 1/y^2)$) уравнение К—П (3.4.27a) является интегрируемым при помощи МОЗР (см. также результаты Манакова, Сантини и Тахтаджяна [349] по вычислению асимптотик на большие времена). Постоянных солитонных решений обнаружено не было. Это, по-видимому, указывает на тот факт, что такие решения, вероятно, не играют сколько-нибудь важной роли для уравнения (3.4.27a) (в противоположность тому, как это было в одномерном случае, т. е. для уравнения КдФ).

Нашим вторым примером является уравнение Буссинеска

(3.4.34) $$u_{tt}-u_{xx}-3(u^2)_{xx}-u_{xxxx}=0.$$

Отметим, что уравнение (3.4.34) является частным случаем обсуждавшегося уравнения К—П. Тем не менее рациональные решения, которые будут вычислены, принадлежат другому классу.

Отметим, что используемый нами метод работает одинаково хорошо при обоих возможных знаках дисперсии. При положительном знаке последнего члена в уравнении (3.4.34) задача поставлена корректно на бесконечном интервале (несмотря на это, при изменении знака это уравнение остается изоспектральным потоком). Следует также отметить, что уравнение (3.4.34) возникает в различных физических задачах (например, волны на поверхности воды) как длинноволновое приближение. Таким образом, с учетом физического происхождения этого уравнения, задача поставлена вполне корректно.

Следуя Хироте [213], положим

(3.4.35) $$u=2(\ln F_N)_{xx}$$

и найдем билинейное уравнение

(3.4.36) $$\left(D_t^2-D_x^2-D_x^4\right)F_N\cdot F_N=0.$$

Первые два солитонных решения даются (как обычно) формулами

(3.4.37a) $$F_1=1=e^{\eta_1},$$

(3.4.37b) $$F_2=1+e^{\eta_1}+e^{\eta_2}+e^{\eta_1+\eta_2+A_{12}},$$

где

(3.4.37c) $$\eta_i=k_ix+\varepsilon_ik_i\sqrt{1+k_i^2}\,t+\eta_i^{(0)},\quad \varepsilon_i=\pm 1,$$

и

(3.4.37d) $$e^{A_{12}}=\frac{3(k_1-k_2)^2+\left(\varepsilon_1\sqrt{1+k_1^2}-\varepsilon_2\sqrt{1+k_2^2}\right)^2}{3(k_1+k_2)^2+\left(\varepsilon_1\sqrt{1+k_1^2}-\varepsilon_2\sqrt{1+k_2^2}\right)^2}.$$

При $N=1$, взяв $e^{\eta_1^{(0)}}=-1$ и устремив $k_1\to 0$, получим

(3.4.38) $$F_1\sim -k_1(x\pm t).$$

Для двухсолитонного решения

(3.4.39a), (3.4.39b) $$e^{A_{12}}\sim\begin{cases}\left(\dfrac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2\left(1+\dfrac{1}{3}k_1k_2\right) & \text{при } \varepsilon_1\varepsilon_2=1,\\ 1-3k_1k_2 & \text{при } \varepsilon_1\varepsilon_2=-1.\end{cases}$$

В случае $\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1$ мы возьмем

$$e^{\eta_1^{(0)}} = \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} + \frac{1}{6} k_1 k_2, \tag{3.4.40a}$$

$$e^{\eta_2^{(0)}} = \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} + \frac{1}{6} k_1 k_2 \tag{3.4.40b}$$

и найдем

$$F_2 \sim -\frac{1}{6} k_1 k_2 (k_1 + k_2) \{(x \pm t)^3 + (x \pm t) \mp 6t\}. \tag{3.4.41}$$

Интересно отметить, что F_2 дает другое рациональное решение в случае $\varepsilon_1\varepsilon_2 = -1$. В этом случае возьмем $e^{\eta_1^{(0)}} = e^{\eta_2^{(0)}} = -1$ и, воспользовавшись (3.4.39), получим

$$F_2 \sim k_1 k_2 (x^2 - t^2 - 3). \tag{3.4.42}$$

Таким образом, несколько первых рациональных решений уравнения Буссинеска получаются по формуле (3.4.35), где F_N — одна из следующих функций:

$$x \pm t, \quad x^2 - t^2 - 3, \quad (x \pm t)^3 + (x \pm t) \mp 6t.$$

Полиномы более высокого порядка можно получить, действуя таким же образом. Несомненно, что преобразование Бэклунда приведет к рекуррентной формуле между рациональными решениями, но никто таких вычислений до сих пор не проделал.

Рассмотрим, наконец, уравнение

$$v_t + 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0 \tag{3.4.43}$$

с ненулевыми асимптотическими граничными условиями $v \to v_0$ при $|x| \to \infty$. Следуя [217] и [226], имеем

$$v = v_0 + i \left(\ln \frac{G_N}{F_N} \right)_x. \tag{3.4.44}$$

Подставив (3.4.44) в (3.4.43) и расщепляя возникшее уравнение, получим

$$\left(D_t + 6v_0^2 D_x + D_x^3\right) F_N \cdot F_N = 0, \tag{3.4.45a}$$

$$\left(D_x^2 - 2iv_0 D_x\right) G_N \cdot F_N = 0. \tag{3.4.45b}$$

Чтобы найти солитонные решения, выпишем разложение

$$F_N = 1 + \varepsilon F_{N,1} + \varepsilon^2 F_{N,2} + \ldots, \tag{3.4.46a}$$

$$G_N = 1 + \varepsilon G_{N,1} + \varepsilon^2 G_{N,2} + \ldots. \tag{3.4.46b}$$

Подставим (3.4.46) в (3.4.45) и приравняем нулю коэффициенты при разных степенях ε. Начав в $F_{N,1} = e^{\eta_1 + \varphi_1}$, $G_{N,1} = e^{\eta_1 + \psi_1}$,

мы получим односолитонное решение

(3.4.47a) $$F_1 = 1 + e^{\eta_1 + \varphi_1},$$

(3.4.47b) $$G_1 = 1 + e^{\eta_1 + \psi_1},$$

где

(3.4.47c) $$\eta_i = k_i x - \left(6v_0^2 k_i + k_i^3\right) t + \eta_i^{(0)},$$

(3.4.47d) $$e^{\varphi_j} = 1 - ik_j/2v_0,$$

(3.4.47e) $$e^{\psi_j} = 1 - ik_j/2v_0.$$

Подставив (3.4.47) в (3.4.44), получим явную формулу односолитонного решения

(3.4.48) $$v = v_0 + \frac{k_1^2}{\left(\sqrt{4v_0^2 + k_1^2}\,\operatorname{ch}\eta_1 + 2v_0\right)},$$

которая была получена также в работе Оно [410]. Чтобы получить двухсолитонное решение, мы начнем с

$$F_{N,1} = \sum_{i=1}^{2} e^{\eta_i + \varphi_i}, \qquad G_{N,1} = \sum_{i=1}^{2} e^{\eta_i + \psi_i}$$

и найдем

(3.4.49a) $$F_2 = 1 + e^{\eta_1 + \varphi_1} + e^{\eta_2 + \varphi_2} + e^{\eta_1 + \eta_2 + \varphi_1 + \varphi_2 + A_{12}},$$

(3.4.49b) $$G_2 = 1 + e^{\eta_1 + \psi_1} + e^{\eta_2 + \psi_2} + e^{\eta_1 + \eta_2 + \psi_1 + \psi_2 + A_{12}},$$

где

(3.4.49c) $$e^{A_{12}} = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2.$$

Как и раньше, рациональные решения могут быть получены переходом к пределу $k_i \to 0$ при подходящем выборе фазовых постоянных. Для $N = 1$ выберем $e^{\eta_1^0} = -1$ и получим

(3.4.50a) $$F_1 \sim -k_1\left(x - 6v_0^2 t + \frac{i}{2v_0}\right),$$

(3.4.50b) $$G_1 \sim -k_1\left(x - 6v_0^2 t - \frac{i}{2v_0}\right),$$

что приводит к рациональному решению

(3.4.51) $$v = v_0 - \frac{4v_0}{4v_0^2\left(x - 6v_0^2 t\right)^2 + 1}.$$

Это решение также было получено в работе Оно [410] и представляет собой несингулярный одномерный алгебраический

солитон. Для $N=2$, взяв

$$e^{\eta_1^{(0)}} = -e^{\eta_2^{(0)}} = \frac{k_1+k_2}{k_1-k_2}\left(1+\frac{k_1k_2}{8v_0^2}\right)$$

и устремив $k_i \to 0$, мы получим, что

(3.4.52a) $$F_2,\ G_2 \sim -\frac{1}{6}k_1k_2(k_1+k_2)\cdot\left[\xi^3+12t-\right.$$
$$\left.-\frac{3}{4v_0^2}\xi \pm \frac{3i}{2v_0}\left(\xi^2+\frac{1}{4v_0^2}\right)\right],$$

где

(3.4.52b) $$\xi = x - 6v_0^2 t,$$

и верхний (нижний) знак относится к функции $F_2(G_2)$. Подставив (3.4.52a) в (3.4.44), видим, что это решение также представляет собой несингулярный алгебраический солитон

(3.4.53) $$v = v_0 - \frac{12v_0\left(\xi^4+\left(3/2v_0^2\right)\xi^2-3/16v_0^4-24\xi t\right)}{4v_0^2\left(\xi^3+12t-\left(3/4v_0^2\right)\xi\right)^2+3\left(\xi^2+1/4v_0^2\right)^2}.$$

3.5. Проблема N тел и нелинейные эволюционные уравнения. Взгляд, который мы часто излагаем в этой книге, состоит в том, что различные редукции «интегрируемых» нелинейных эволюционных уравнений также являются (в некотором смысле) «интегрируемыми». Например, автомодельная редукция приводит к уравнениям типа Пенлеве (см. разд. 3.7), решения которых выражаются либо через классические трансценденты Пенлеве, либо через специальные гиперэллиптические функции (см. разд. 2.3). Здесь мы обсудим другой пример проявления этого принципа. Занимаясь поиском (разложений по полюсам) алгебраических решений различных нелинейных эволюционных уравнений, мы получим конечномерные динамические системы — системы обыкновенных уравнений, т. е. задачи N тел. Эти динамические системы представляют самостоятельный интерес.

Идея исследовать движение полюсов решений нелинейных эволюционных уравнений весьма стара. Например, ее использовали при изучении движения точечных вихрей в гидродинамике (см., например, Онзагер (1949) [411]). Для уравнений, связанных с МОЗР, такой анализ впервые проделал Краскал (1974) [297] для уравнения КдФ. Он отметил, что любой солитон представим в виде конечного набора полюсов и поэтому взаимодействие солитонов можно было бы описывать как взаимодействие полюсов. Сикстан (1976) [482] дальше развил эти идеи, а Эро, Мак-Кин и Мозер (1977) [36] показали, как рациональные и эллиптические решения можно было бы

рассматривать с точки зрения разложений по конечным наборам полюсов (см. также [110]).

В этом разделе мы остановимся на разложении по полюсам (т. е. на рациональных решениях) трех нелинейных эволюционных уравнений: так называемом уравнении Бенджамина — Оно (Б—О), уравнении КдФ и промежуточном уравнении (промежуточном в том смысле, что уравнения КдФ и Б—О могут быть получены из него предельными переходами). Все эти уравнения возникают в теории длинных внутренних волн в стратифицированной жидкости. Следует отметить, что Мозер [386, 387] рассматривал интересную конечномерную систему, принадлежащую другому классу. Она получается из конечной цепочки Тоды (разд. 2.2) со свободными концами. Здесь мы не будем углубляться в эту задачу.

В каждом из перечисленных случаев мы выведем уравнение соответствующей динамической системы. Но только первый пример будет проинтегрирован нами в явном виде. Мы получим решение динамической системы, изучавшейся в работах Калоджеро [86, 87], Сазерленда [469] и Мозера [386, 387].

Хотя решения соответствующих нелинейных эволюционных уравнений являются рациональными функциями пространственной переменной x, мы выделили эту тему в отдельный раздел, так как в отличие от предыдущего здесь основная задача — получить и изучить некоторые интересующие нас динамические системы.

Мы начнем с уравнения Б—О, впервые предложенного Бенджамином [53] и позднее выведенного при помощи формального асимптотического разложения в работе Оно [409]; это — нелинейное сингулярное интегродифференциальное уравнение

(3.5.1) $$u_t + 2uu_x + H(u_{xx}) = 0,$$

где $H(u)$ является преобразованием Гильберта

(3.5.2) $$H(u) = \frac{1}{\pi} \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x')}{x'-x}\,dx'.$$

Символ $\fint f(x)\,dx$ означает интеграл в смысле главного значения. Следуя [95] и [105], будем искать движение полюсов (разложение по полюсам) решения этого уравнения:

(3.5.3) $$u = \sum_{j=1}^{N} \frac{i}{x - x_j(t)} + \sum_{j=1}^{N} \frac{-i}{x - x_j^*(t)}.$$

Такой подход отчасти мотивируется тем, что уравнение (3.5.1) имеет известное рациональное решение в виде уединенной

волны

$$u = \frac{2C}{1 + [C(x - Ct - x_0)]^2} = iC\left[\frac{1}{C(x - Ct - x_0) + i} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{C(x - Ct - x_0) - i}\right], \tag{3.5.4}$$

найденное Бенджамином [53]. Отметим, что преобразование Гильберта переводит полюс в полюс, т. е.

$$H\left(\frac{1}{x - x_j}\right) = \frac{i}{x - x_j}, \quad \operatorname{Im} x_j > 0.$$

Подставив (3.5.3) в (3.5.1), получим

$$\sum_j \frac{1}{(x - x_j)^2}\left\{i\overset{\circ}{x}_j + 2\left(\sum_{k \neq j} \frac{1}{(x - x_k)} - \sum_k \frac{1}{\left(x - x_k^*\right)}\right)\right\} +$$
$$+ \sum_j \frac{1}{\left(x - x_j^*\right)^2}\left\{-i\overset{\circ}{x}{}_j^* + 2\left(\sum_{k \neq j} \frac{1}{\left(x - x_k^*\right)} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \sum_k \frac{1}{(x - x_k)}\right)\right\} = 0, \tag{3.5.5}$$

где $\overset{\circ}{x} \equiv dx/dt$.

Имеется несколько способов получить уравнение движения полюсов. Рациональную функцию можно разложить на простые дроби, что дает

$$\frac{1}{(x - a)^2 (x - b)} = \frac{A}{(x - a)^2} + \frac{B}{(x - a)} + \frac{C}{(x - b)}, \tag{3.5.6a}$$

где

$$A = \frac{1}{a - b}, \quad B = \frac{-A}{a - b}, \quad C = \frac{1}{(a - b)^2}. \tag{3.5.6b}$$

Затем, воспользовавшись (3.5.6), тождеством

$$\sum_j \sum_{k \neq j} \frac{1}{(x_k - x_j)(x - x_k)(x - x_j)} = 0 \tag{3.5.7a}$$

и тождеством

$$\sum_j \sum_k \frac{1}{\left(x_k^* - x_j\right)\left(x - x_j\right)\left(x - x_k\right)} +$$
$$+ \sum_j \sum_k \frac{1}{\left(x_k - x_j^*\right)\left(x - x_j^*\right)\left(x - x_k^*\right)} = 0, \tag{3.5.7b}$$

получим

$$\sum_j \frac{1}{(x-x_j)^2}\left\{i\overset{\circ}{x}_j + 2\left(\sum_{k\neq j}\frac{1}{x_j-x_k} - \sum_k \frac{1}{x_j-x_k^*}\right)\right\} + \sum_j \frac{1}{(x-x_j^*)^2}\left\{-i\overset{\circ *}{x}_j + 2\left(\sum_{k\neq j}\frac{1}{x_j^*-x_k^*} - \sum_k \frac{1}{x_j^*-x_k}\right)\right\} = 0. \tag{3.5.8}$$

В результате мы имеем динамическую систему (задачу N тел)

$$i\overset{\circ}{x}_j + 2\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}\frac{1}{x_j-x_k} - \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{x_j-x_k^*}\right) = 0 \tag{3.5.9}$$

и комплексно-сопряженную систему уравнений. Отметим, что систему (3.5.9) можно вывести из (3.5.5), положив $x = x_j + \varepsilon$ и вычислив разложение по $\varepsilon \to 0$.

Замечательно, что система (3.5.9) может быть преобразована к гамильтоновой форме. Вычислив вторую производную по времени от (3.5.9) и перегруппировав члены, получим

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}\overset{\circ\circ}{x}_j = -2\Bigg(&\sum_{k\neq j}\frac{1}{(x_j-x_k)^3} - \\ &-\sum_{k\neq j}\sum_{l\neq k,\,j}\frac{1}{(x_k-x_j)(x_k-x_l)(x_j-x_l)} - \\ &-\sum_{k}\sum_{l\neq k}\frac{1}{(x_k^*-x_j)(x_j-x_l^*)(x_k^*-x_l^*)} + \\ &+\sum_{k\neq j}\sum_{l}\frac{1}{(x_k-x_j)(x_k-x_l^*)(x_j-x_l^*)} + \\ &+\sum_{k}\sum_{l\neq k}\frac{1}{(x_k^*-x_j)(x_j-x_l)(x_k^*-x_l)} - \\ &-\sum_{k}\frac{1}{(x_k^*-x_j)^3} + \sum_{k}\frac{1}{(x_k^*-x_j)^3}\Bigg). \end{aligned} \tag{3.5.10}$$

Можно проверить, что второй и третий члены в правой части равны *нулю*, а члены с четвертого по седьмой в сумме также дают нуль. Остается гамильтонова задача N тел с парным взаимодействием

$$\overset{\circ\circ}{x}_j = 8\sum_{k\neq j}\frac{1}{(x_j-x_k)^3} \tag{3.5.11}$$

и гамильтонианом

$$H=\frac{1}{2}\sum_j \mathring{x}_j^2+2\sum_j\sum_{k\neq j}\frac{1}{(x_k-x_j)^2}.$$

Систему (3.5.11) изучали многие авторы: Калоджеро [86, 87], Сазерленд [469], Мозер [386, 387], Ольшанецкий и Переломов [405, 406, 407], Каждан, Костант и Стернберг [271]. В связи с уравнением Б—О см. работы Кэйса [95, 96] и Чена, Ли и Перейры [105].

Далее нам удобно будет изменить масштаб времени по формуле $t\to 2t$; при этом

(3.5.12) $$\overset{\circ\circ}{x}_j=2\sum_{k\neq j}\frac{1}{(x_j-x_k)^3}.$$

Интегрирование задачи N тел более общего вида было дано Мозером [386, 387]. Рассмотрим $L-A$ пару

(3.5.13a) $$L\psi=\lambda\psi,$$

(3.5.13b) $$\psi_t=A\psi,$$

где L, A — матрицы

(3.5.14a) $$L_{kj}=\delta_{kj}\mathring{x}_j+\frac{i(1-\delta_{kj})}{x_k-x_j},$$

(3.5.14b) $$A_{kj}=-i\delta_{kj}\sum_{l\neq k}\frac{1}{(x_k-x_l)^2}+\frac{i(1-\delta_{kj})}{(x_k-x_j)^2}.$$

Предположив $\lambda_t=0$, мы получим эволюционное решение $L_t=[L, A]$, или, после некоторых вычислений,

(3.5.15) $$\delta_{kj}\overset{\circ\circ}{x}_j=\frac{(1-\delta_{kj})}{x_k-x_j}\Big(\sum_{l\neq j}(x_k-x_l)^{-2}-\sum_{l\neq j}(x_j-x_l)^{-2}\Big)+\sum_l\frac{(1-\delta_{kl})(1-\delta_{lj})}{(x_k-x_l)(x_l-x_j)}\Big(\frac{-1}{(x_k-x_l)}+\frac{1}{(x_l-x_j)}\Big).$$

При $k=j$ эта система уравнений совпадает с (3.5.11); при $k\neq j$ и правая, и левая части (3.5.15) равны нулю.

Таким образом, динамическая система (3.5.12) является *изоспектральной*. Отсюда немедленно следует наличие N интегралов движения (переменных действия). Чтобы в этом убедиться, обозначим

(3.5.16a) $$I_n=\operatorname{tr}(L^n),\qquad n=1,\ \ldots,\ N;$$

тогда

(3.5.16b) $$\frac{dI_n}{dt}=0,$$

так как следы (tr) от L^n выражаются через собственные значения матрицы L. Дополнительный набор N величин (угловые переменные) также может быть найден [405, 406, 407]. Непосредственным вычислением убеждаемся, что уравнения движения можно записать в виде

$$X_t = [AX] + L, \tag{3.5.17}$$

где $X_{kj} = \delta_{kj} x_j$, а матрицы L, A определены в (3.5.14). Отметим, что $[AX] = i(1 - \delta_{kj})/(x_j - x_k)$.

Далее по индукции можно проверить, что

$$\frac{d}{dt}(XL^{n-1}) = [A,\ XL^{n-1}] + L^n. \tag{3.5.18}$$

Обозначив

$$J_n = \operatorname{tr}(XL^{n-1}), \tag{3.5.19}$$

мы получим

$$\frac{dJ}{dt} = I_n. \tag{3.5.20}$$

При этом мы воспользовались равенством $\operatorname{tr}[A, B] = 0$ для любых A, B. Таким образом,

$$J_n(t) = I_n + J_n(0). \tag{3.5.21}$$

Итак, мы имеем два набора из N переменных, каждый заданный в явном виде в любой момент времени. Это полностью определяет движение полюсов.

Например, рассмотрим случай $N = 2$:

$$\operatorname{tr} L = I_1 = \overset{\circ}{x}_1 + \overset{\circ}{x}_2, \tag{3.5.22a}$$

$$\operatorname{tr} L^2 = I_2 = \overset{\circ}{x}{}_1^2 + \overset{\circ}{x}{}_2^2 + \frac{2}{(x_1 - x_2)^2}, \tag{3.5.22b}$$

$$\operatorname{tr} X = J_1 = x_1 + x_2 = I_1 t + J_1(0), \tag{3.5.22c}$$

$$\operatorname{tr} LX = J_2 = x_1\overset{\circ}{x}_1 + x_2\overset{\circ}{x}_2 = I_2 t + J_2(0). \tag{3.5.22d}$$

Из (3.5.22d) получим

$$\frac{d}{dt}(x_1^2 + x_2^2) = 2(x_1\overset{\circ}{x}_1 + x_2\overset{\circ}{x}_2) = 2I_2 t + 2J_2(0). \tag{3.5.23a}$$

Таким образом,

$$x_1^2 + x_2^2 = I_2 t^2 + 2J_2(0)\,t + x_1^2(0) + x_2^2(0). \tag{3.5.23b}$$

С помощью (3.5.22c) мы приходим к алгебраическому уравнению для $x_1(t)$ или для $x_2(t)$ (Z равно либо x_1, либо x_2):

$$2Z^2 - 2J_1(t)\,Z + J_1^2(t) = I_2 t^2 + 2J_2(0)\,t + x_1^2(0) + x_2^2(0). \tag{3.5.23c}$$

Мы не будем здесь заниматься более тщательным анализом его решения. Вместо этого покажем, что собственные значения оператора

(3.5.24) $$M(t, t_0) = X(t_0) + (t - t_0) L(t_0)$$

совпадают с полюсами $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$. Приводя матрицу (3.5.24) к диагональному виду, получим расположения полюсов в каждый момент времени t. Рассмотрим

(3.5.25) $$K(t) = U^{-1}(t) X(t) U(t),$$

где $U(t_0) = I$. Так как A является антиэрмитовой матрицей, т. е. $A^{\dagger} \equiv (A^*)^T = -A$, то матрица $U(t)$, удовлетворяющая уравнению

(3.5.26a) $$\frac{dU}{dt} = AU,$$

является унитарной:

$$U^{\dagger}U = I.$$

Таким образом,

(3.5.26b) $$\frac{d}{dt}\left(U^{-1}\right) = \frac{d}{dt} U^{\dagger} = -U^{-1}A,$$

и прямое вычисление приводит к

(3.5.27) $$\frac{dK}{dt} = U^{-1}(\overset{\circ}{X} + [X, A]) U.$$

Из (3.5.17) следует

(3.5.28) $$\frac{dK}{dt} = U^{-1}LU.$$

Продифференцируем это равенство еще раз по времени и воспользуемся соотношениями (3.5.26) и $L_t = [AL]$. В результате получим

(3.5.29a) $$\frac{d^2K}{dt^2} = 0.$$

Поэтому

(3.5.29b) $$K(t) = C_1 + (t - t_0) C_2,$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования. Из (3.5.25) и (3.5.28), учитывая равенство $U(t_0) = I$, мы получим

(3.5.29c) $$K(t_0) = U^{-1}(t_0) X(t_0) U(t_0) = X(t_0) = C_1,$$

(3.5.29d) $$\frac{dK}{dt}(t_0) = U^{-1}(t_0) L(t_0) U(t_0) = L(t_0) = C_2.$$

Таким образом,

(3.5.29e) $$K(t) = X(t_0) + (t - t_0) L(t_0) \equiv M(t, t_0).$$

Соотношение (3.5.25) позволяет выразить $X(t)$ через $K(t)$:

(3.5.29f) $$X(t)=UM(t,\ t_0)U^{-1}.$$

Собственные значения матриц $X(t)$ и $M(t, t_0)$ совпадают, так как

(3.5.30a) $$0=\det(\lambda I-X(t))=\det(U(\lambda I-M(t,\ t_0))U^{-1}).$$

Матрица $X_{kj}(t)$ имеет вид $X_{kj}(t)=\delta_{kj}x_k(t)$, поэтому

(3.5.30b) $$\det(\lambda I-X(t))=\prod_{k=1}^{N}(\lambda-x_k(t)).$$

Это доказывает, что собственные значения матрицы $M(t, t_0)$ совпадают с положениями полюсов, т. е. с $x_k(t)$. При этом, заметив, что

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln\det(\lambda I-X(t))\,|_{\lambda=x}=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{x-x_i(t)},$$

можно представить многополюсное решение уравнения Бенджамина — Оно в виде

(3.5.31) $$u=i\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln\det(I\lambda-M(2t,\ 2t_0))\,|_{\lambda=x}-$$
$$-i\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln\det(I\lambda+M^*(2t,\ 2t_0))\,|_{\lambda=x}.$$

(Отметим, что в последней формуле мы изменили масштаб времени, чтобы полученное решение удовлетворяло уравнению Б—О, записанному в виде (3.5.1).) Итак, мы описали динамику полюсов в решении уравнения Б—О. Эти решения представляют взаимодействия солитонов, что наводит на мысль о возможности решения уравнения Б—О методом обратной задачи рассеяния. Ниже в этом разделе мы кратко обсудим некоторые результаты и опишем линейный аналог задачи рассеяния, связанный с уравнением Б—О.

Для уравнения КдФ (см. [36])

(3.5.32) $$u_t+6uu_x+u_{xxx}=0$$

конечнополюсное решение имеет вид

(3.5.33) $$u=-2\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{(x-x_i(t))^2}.$$

Подстановка (3.5.33) в (3.5.32) дает

(3.5.34) $$\sum_{i=1}^{N}\frac{-2}{(x-x_i)^3}\left[-\overset{\circ}{x}_i-12\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{1}{(x-x_j)^2}\right]=0.$$

Используя разложение рациональных функций на простые дроби или просто положив $x = x_I + \varepsilon$, $\varepsilon \to 0$ и приравняв нулю члены порядка $O(1/\varepsilon^3)$, $O(1/\varepsilon^2)$, мы получим

$$\overset{\circ}{x}_I = -12 \sum_{\substack{j=1 \\ j=I}}^{N} \frac{1}{(x_I - x_j)^2} \tag{3.5.35a}$$

и дополнительную связь на расположение полюсов

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq I}}^{N} \frac{1}{(x_I - x_j)^3} = 0. \tag{3.5.35b}$$

Следует отметить, что это решение уравнения КдФ соответствует рациональному решению, найденному в разд. 3.4.

Продифференцировав (3.3.35a), мы можем привести эту систему к гамильтоновой форме задачи N тел:

$$\overset{\circ\circ}{x}_I = -(12)^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq I}}^{N} \frac{1}{(x_I - x_j)^5} \tag{3.5.36}$$

(см., например, [110]). Заменив рациональные функции эллиптическими, разложение (3.5.33) можно обобщить; при этом

$$\overset{\circ}{x}_I = -12 \sum_{\substack{j=1 \\ j=I}}^{N} \mathcal{P}(x_I - x_j), \tag{3.5.37a}$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq I}}^{N} \mathcal{P}'(x_I - x_j) = 0, \tag{3.5.37b}$$

где $\mathcal{P}$ — эллиптическая функция Вейерштрасса. Вычислив производную по времени, мы получим гамильтонову систему

$$\overset{\circ\circ}{x}_I = -(12)^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j=I}}^{N} \mathcal{P}'(x_I - x_j)\,\mathcal{P}(x_I - x_j) \tag{3.5.38a}$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \overset{\circ\circ}{x}{}_j^2 + \frac{(12)^2}{2} \sum_{i} \sum_{j=i} \mathcal{P}^2(x_i - x_j). \tag{3.5.38b}$$

Все предыдущие формулы для рациональных функций могут быть получены из соответствующих формул для эллиптических функций, если заменить $\mathcal{P}(x)$ на x^{-2} (т. е. устремить оба периода эллиптических функций к бесконечности. — *Перев.*).

Теперь мы кратко обсудим результаты о разложении по полюсам (см. [448]) для промежуточного уравнения, описывающего длинные гравитационные волны в стратифицированной жидкости конечной глубины [246], [301, 302]. Буквой δ обозначим параметр, характеризующий отношение глубины жидкости к длине волны. Уравнение движения будем записывать в виде

(3.5.39a) $$u_t + 2uu_x + \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) T(u_{xx}) = 0,$$

где

(3.5.39b) $$T(u_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{1}{2\delta} \operatorname{cth} \frac{\pi(x-\xi)}{2\delta} + \frac{1}{2\delta} \operatorname{sgn}(x-\xi)\right] u_\xi d\xi.$$

Это уравнение можно также переписать в виде

(3.5.40a) $$u_t + 2uu_x + \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi)\, u(\xi)\, d\xi = 0,$$

где

(3.5.40b) $$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(k)\, e^{ikx}\, dk,$$
$$C(k) = -k \operatorname{cth} k\delta + \frac{1}{\delta}.$$

Для волн на мелкой воде $\delta \to 0$, и уравнение (3.5.39) или (3.5.40) переходит в уравнение КдФ

(3.5.41) $$u_t + 2uu_x + \frac{1}{3} u_{xxx} = 0.$$

Для волн на глубокой воде $\delta \to \infty$, и в пределе получится уравнение Б—О:

(3.5.42) $$u_t + 2uu_x + H(u_{xx}) = 0$$

($H(u)$ обозначает, как и раньше, преобразование Гильберта от u). Задачу построения N-солитонных решений уравнения (3.5.39) рассматривали Джозеф и Эгри [247] и Чень, Ли [103]. Прежде чем заняться разложением решений уравнений (3.5.39), (3.5.40) по полюсам, мы перепишем их в билинейной форме (см. разд. 3.3). В (3.5.40), формально заменив k на $-i\partial/\partial x$, получим следующее дифференциально-разностное уравнение:

(3.5.43) $$u_t + 2uu_x + \frac{1}{\delta}\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) u_x -$$
$$- i\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \operatorname{cth}\left(i\delta \frac{\partial}{\partial x}\right) u_{xx} = 0.$$

Замена зависимой переменной

$$u = -2i\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\operatorname{sh}\left(i\delta\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}\ln f(x) = -i\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{f(x+i\delta)}{f(x-i\delta)} \tag{3.5.44}$$

$\left(e^{\pm i\delta\frac{\partial}{\partial x}}f(x) = f(x\pm i\delta)\right)$ позволяет привести уравнение (3.5.43) к билинейной форме

$$\left(\frac{\delta}{1+\delta}iD_t + \frac{1}{\delta}iD_x + D_x^2\right)f^+\cdot f^- = 0, \tag{3.5.45}$$

где

$$f^{\pm} \equiv f(x\pm i\delta), \tag{3.5.46}$$

а операторы D_t, D_x определены в разд. 3.3 (см. (3.3.4)).

При этих преобразованиях следует соблюдать определенные предосторожности. Например, подстановка (3.5.44) в (3.5.39) или (3.5.40) приводит к (3.5.45) только в том случае, когда выполнено следующее условие.

Условие А. *Функция* $f(x+i\delta)$ *не имеет нулей в полосе* $-2\delta \leqslant \operatorname{Im} x \leqslant 0$.

Если выполнено условие А, то

$$\int \frac{i}{2\delta}\operatorname{cth}\frac{\pi(x-\xi)}{\delta}\frac{\partial}{\partial\xi}\ln\frac{f(\xi+i\delta)}{f(\xi+i\delta)}d\xi = -\frac{\partial}{\partial x}\ln f(x+i\delta)f(x-i\delta) + \text{const}$$

(предполагается, что f ведет себя достаточно хорошо на бесконечности).

Для простейшего нетривиального солитонного решения функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = 1 + \exp\left(k_1 x - \omega_1 t + \eta_1^{(0)}\right),$$
$$\omega_1 = \left(1+\frac{1}{\delta}\right)\left(\frac{1}{\delta}k_1 - k_1^2\operatorname{ctg}\delta k_1\right), \tag{3.5.47}$$

k_1, $\eta_1^{(0)}$ — произвольные параметры. Требование $0 < k_1\delta < \pi$ необходимо для выполнения условия А. Подставив (3.5.47) в (3.5.44), получим

$$u = \left(1+\frac{1}{\delta}\right)\frac{k_1\sin\delta k_1}{\left(\cos\delta k_1 + \operatorname{ch}\left\{k_1 x - \omega_1 t + \eta_1^{(0)}\right\}\right)}. \tag{3.5.48a}$$

Решение (3.5.48а) в пределе $\delta \to 0$ переходит в решение уравнения КдФ

$$u = \frac{k_1^2}{2}\operatorname{sech}^2\frac{1}{2}\left\{k_1 x - \frac{1}{3}k_1^3/t + \eta_1^{(0)}\right\}. \tag{3.5.48b}$$

При $\delta \to \infty$ можно перейти к пределу, если одновременно устремить $k_1 \to 0$. Положив $\delta k_1 = \pi - k_1/C_1$, C_1 — вещественная положительная постоянная, получим рациональное решение уравнения Б—О:

(3.5.48c) $$u = \frac{2C_1}{\left(1 + C_1^2\left(x - C_1 t\right)^2\right)}.$$

Используя (3.5.45), можно получить N-солитонное решение уравнения (3.5.39), но мы не будем здесь этим заниматься (см. [447]).

Обсудим теперь динамические системы, описывающие движение полюсов промежуточного уравнения (3.5.39). На практике более удобно пользоваться этим уравнением, представленным в билинейной форме (3.5.45). Предполагаем, что

$$f(x) = \prod_{j=1}^{N} (x - x_j(t)), \quad |\operatorname{Im} x_j| > \delta,$$

т. е.

$$u = -i\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{1}{(x - x_j(t) + i\delta)} - \frac{1}{(x - x_j(t) - i\delta)}\right]$$

(потребуем $|\operatorname{Im} x_j| > \delta$, чтобы удовлетворить условию А). Подставив $f(x)$ в (3.5.45), получим

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{(x - x_j)^2 + \delta^2} \left\{\mathring{x}_j + 2(1 + \delta) \sum_{k \neq j} \frac{1}{((x - x_k)^2 + \delta^2)}\right\} = 0.$$

Воспользовавшись разложением на простые дроби, это соотношение можно переписать в виде

$$\sum_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{(x - x_j + i\delta)} - \frac{1}{(x - x_j - i\delta)}\right) \mathring{x}_j +$$
$$+ 4(1 + \delta) \sum_{j=1}^{N} \sum_{k \neq j} \left\{\left(\frac{1}{(x - x_j + i\delta)(x_k - x_j)(x_k - x_j + 2i\delta)}\right) -\right.$$
$$\left. - \frac{1}{(x - x_j - i\delta)(x_k - x_j)(x_k - x_j - 2i\delta)}\right\} = 0,$$

из которого немедленно получим

(3.5.49a) $$\mathring{x}_j + 4(1 + \delta) \sum_{k \neq 1} \frac{1}{(x_k - x_j)(x_k - x_j + 2i\delta)} = 0,$$

(3.5.49b) $$\mathring{x}_j + 4(1 + \delta) \sum_{k \neq j} \frac{1}{(x_k - x_j)(x_k - x_j - 2i\delta)} = 0$$

для $j = 1, \ldots, N$. Складывая (3.5.49a, b), получим

$$\text{(3.5.50a)} \qquad \overset{\circ}{x}_j + 4(1+\delta) \sum_{k \neq j} \frac{1}{(x_k - x_j)^2 + 4\delta^2} = 0;$$

вычитание дает

$$\text{(3.5.50b)} \qquad \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} \frac{1}{(x_k - x_j)\left((x_k - x_j)^2 + 4\delta^2\right)} = 0.$$

Система (3.5.50) представляет собой динамическую систему со связями. При $\delta \to 0$ мы получим динамическую систему, соответствующую уравнению КдФ (3.5.35):

$$\text{(3.5.51a)} \qquad \overset{\circ}{x}_j + 4 \sum_{k \neq j} (x_k - x_j)^{-2} = 0,$$

$$\text{(3.5.51b)} \qquad \sum_{k \neq 1} (x_k - x_j)^{-3} = 0.$$

Отличие в коэффициентах связано с разным выбором масштабов времени в уравнениях (3.5.52) и (3.5.41) (t в (3.5.41) следует заменить на $3t$).

При $\delta \to \infty$ обозначим $\hat{x}_j = x_j - i\delta$ для $j = 1, 2, \ldots, M$ (здесь $\operatorname{Im} x_j > \delta$, поэтому $\hat{x}_j$ лежат в верхней полуплоскости) и $\hat{x}_j = x_j + i\delta$ для $j = M+1, M+2, \ldots, N$ (здесь $\operatorname{Im} x_j < -\delta$, поэтому $\hat{x}_j$ лежат в нижней полуплоскости).

При $\delta \to \infty$ получим

$$\text{(3.5.52a)} \qquad \frac{1}{2i} \overset{\circ}{\hat{x}} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{M} \frac{1}{\hat{x}_k - \hat{x}_j} - \sum_{k=M+1}^{N} \frac{1}{\hat{x}_k - \hat{x}_j} \quad \text{при } j = 1, 2, \ldots, M,$$

$$\frac{1}{2i} \overset{\circ}{\hat{x}}_j = \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{\hat{x}_k - \hat{x}_j} - \sum_{\substack{k=M+1 \\ k \neq j}}^{N} \frac{1}{\hat{x}_k - \hat{x}_j} \quad \text{при } j = M+1, \ldots, N$$

(3.5.52b)

— динамическую систему без связей. Если $N = 2M$ и $\hat{x}_j = \hat{x}^*_{j+M}$ для $j = 1, \ldots, M$, то получим систему

$$\text{(3.5.53)} \qquad \frac{1}{2i} \overset{\circ}{\hat{x}}_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{M} \frac{1}{\hat{x}_k - \hat{x}_j} - \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{\hat{x}_j - \hat{x}^*_k},$$

которая после комплексного сопряжения и переобозначения совпадает с (3.5.9) (отметим, что в (3.5.53) точки $\hat{x}_j$, $j=1, \ldots, M$, лежат в верхней полуплоскости, а в (3.5.9) точки x_j лежат в нижней полуплоскости).

Вычислив производную по времени от (3.5.52) (после простых алгебраических вычислений, использующих тождества, аналогичные (3.5.7)), получим

$$\overset{\infty}{\hat{x}}_j = 8 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{M} (\hat{x}_j - \hat{x}_k)^{-3} \text{ при } j=1, 2, \ldots, M, \tag{3.5.54a}$$

$$\overset{\infty}{\hat{x}}_j = 8 \sum_{\substack{k=M+1 \\ k \neq j}}^{N} (\hat{x}_j - \hat{x}_k)^{-3} \text{ при } j=M+1, \ldots, N. \tag{3.5.54b}$$

Следует отметить, что в этом пределе ($\delta \to \infty$) функции f^+, f^- имеют следующие разложения по полюсам: $f^+ = \prod_{j=1}^{M}(x-\hat{x}_j)$, $f^- = \prod_{j=M+1}^{N}(x-\hat{x}_j)$. В результате вычислений мы получили систему (3.5.54), показывающую, что полюсы в верхней полуплоскости не влияют на движение полюсов в нижней полуплоскости, и наоборот.

Для уравнения (3.5.39) можно построить преобразование Бэклунда и аналог преобразования Миуры [448, 449]. Обозначив $W_x = u$, перепишем (3.5.39) в виде

$$W_t + W_x^2 + \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) T W_{xx} = 0. \tag{3.5.55}$$

Преобразование Бэклунда имеет вид

$$(W + W')_x = \lambda + iT\,(W' - W)_x - i\delta^{-1}\,(W' - W) + \mu e^{i\delta(W'-W)/(1+\delta)}, \tag{3.5.56a}$$

$$\begin{aligned}(W' - W)_t = &- \left\{\frac{1}{\delta}\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) + \lambda\right\}(W' - W)_x + \\ &+ i\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)(W' - W)_{xx} - i\,(W' - W)_x\, T\,(W' - W)_x + \\ &+ i\delta^{-1}\,(W' - W)(W' - W)_x,\end{aligned} \tag{3.5.56b}$$

где λ, μ — произвольные параметры. Если W удовлетворяет (3.5.55), то и W', определенное по (3.5.56), также удовлетворяет (3.5.55). Обозначив $V = W' - W$ (и использовав $W_x = u$), можно переписать (3.5.56) и получить обобщение преобразования Миуры:

$$V_x + 2u = \lambda + iT\,(V_x) - i\delta^{-1}V + \mu e^{iV(\delta/1+\delta)}, \tag{3.5.57a}$$

$$\begin{aligned}V_t = &- \left(\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)\delta^{-1} + \lambda\right) V_x + \\ &+ i\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)(V_{xx} + 2u_x) - iV_x T\,(V_x) + i\delta^{-1} V V_x .\end{aligned} \tag{3.5.57b}$$

Подставив $V_x + 2u$ из (3.5.57a) в правую часть (3.5.57b), получим модифицированное уравнение внутренних волн

$$V_t + \lambda V_x + \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) T(V_{xx}) + \left\{\mu e^{i(\delta/1+\delta)V} + iT(V_x) - \frac{i}{\delta} V\right\} V_x = 0, \tag{3.5.58}$$

имеющее то же дисперсионное соотношение, что и промежуточное уравнение (3.5.39). Другой способ — разрешить (3.5.57a) относительно u и воспользоваться тождеством

$$T(V_x) T(V_{xx}) - V_x V_{xx} - T(V_x T(V_x))_x = \delta^{-1} (VT(V_{xx}) - T(VV_x)). \tag{3.5.59}$$

Тогда (прямо из (3.5.39)) получим

$$\begin{aligned} u_t + 2uu_x + T(u_{xx}) = \left[\frac{1}{2} i \frac{\partial}{\partial x} T \cdot - i\delta^{-1} + \mu i \frac{\delta}{1+\delta} e^{i(\delta/1+\delta)V} - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial x}\right] \cdot \left[V_t + \lambda V_x + \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) T(V_{xx}) + \right. \\ \left. + \left\{\mu e^{i(\delta/1+\delta)V} + iT(V_x) - \frac{i}{\delta} V\right\} V_x\right]. \end{aligned} \tag{3.5.60}$$

Таким образом, уравнение (3.5.58) играет ту же роль для промежуточного уравнения (3.5.39), какую модифицированное уравнение КдФ играет по отношению к уравнению КдФ.

Наложив условие $V(\pm\infty) = 0$ и воспользовавшись равенством $\int_{-\infty}^{\infty} fT(f)\,dx = 0$, получим, что $\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} V\,dx = 0$. Это означает, что уравнение (3.5.39) имеет бесконечную серию законов сохранения. Подставляя $V = -i(1 + 1/\delta)(\chi + \ln(-\lambda/\mu))$ в (3.5.57a), получим

$$e^{\chi} - 1 = \lambda^{-1}\left[i\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)\chi_x + \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) T(\chi_x) - \delta^{-1}\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)\chi - 2u\right]. \tag{3.5.61}$$

Подставив χ в виде разложения $\chi = \sum_1^{\infty} \lambda^{-n}\chi_n$ при $\lambda \to \infty$ и приравняв в (3.5.61) коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим рекуррентную формулу для определения χ_n.

Функции χ_n, как нетрудно понять, являются плотностями интегралов движения уравнения (3.5.39). Первые четыре χ_n имеют вид

$$\chi_1 = u, \quad \chi_2 = u^2, \quad \chi_3 = u^3 + \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \frac{3}{2} uTu_x,$$

$$\begin{aligned} \chi_4 = u^4 + 3\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) u^2 Tu_x + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)^2 u_x^2 + \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)^2 (Tu_x)^2 + \\ + \frac{3}{2}\delta^{-1}\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) uTu_x. \end{aligned}$$

Плотности χ_n в пределе $\delta \to 0$ переходят в плотности интегралов движения для уравнения КдФ, а при $\delta \to \infty$ — соответственно для Б—О.

Формальную линейную задачу можно получить, определив

$$\ln \frac{\psi^+}{\psi^-} = i \frac{\delta}{1+\delta} V, \tag{3.5.62a}$$

$$(\ln \psi^+\psi^-)_x = \frac{\delta}{1+\delta} [-T(V_x) + \delta^{-1}V]. \tag{3.5.62b}$$

В пределе $\delta \to \infty$ при подходящем V это эквивалентно расщеплению функции V на функции, аналитически продолжаемые в верхнюю (—) и нижнюю (+) полуплоскости, так как $\ln \psi^\pm = \pm (i \mp H) V$. Подстановка (3.5.62) в (3.5.57а) дает

$$\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \psi_x^- - i \left(u - \frac{\lambda}{2}\right) \psi^- = - \frac{i}{2} \mu \psi^+. \tag{3.5.63}$$

Оператор, определяющий эволюцию по времени, также можно найти, см. [449].

При $\delta \to 0$, полагая $V = 2(1+\delta)(\ln \varphi)_x$, $\lambda = (1 + 1/\delta) k \cos k\delta$, $\mu = (1 + 1/\delta) k/\sin(k\delta)$ и переходя к пределу, получим, что (3.5.63) переходит в задачу рассеяния для оператора Шрёдингера

$$\varphi_{xx} - \left(\frac{k^2}{4} - u\right) \varphi = 0, \tag{3.5.64}$$

а при $\delta \to \infty$ получим

$$\psi_x^- - i \left(u - \frac{\lambda}{2}\right) \psi^- = - \frac{i}{2} \mu \psi^+. \tag{3.5.65}$$

Уравнения (3.5.63, 65) представляют собой задачи Римана — Гильберта. Для конечного δ функции $\psi^\pm$ являются граничными значениями функций, аналитических в полосах (+; $-2\delta < \operatorname{Im} x < 0$), (—; $0 < \operatorname{Im} x < 2\delta$) и периодически продолженных. Недавно эти линейные задачи позволили применить МОЗР для построения точных решений рассматриваемых уравнений (см. [284]). В этом же направлении были сделаны работы Накамуры [393] и Бока, Краскала [68].

3.6. Прямые методы, использующие линейное интегральное уравнение. В предыдущих разделах была установлена связь между нелинейными эволюционными уравнениями и линейным интегральным уравнением (уравнение типа Гельфанда, Левитана, Марченко). В этом разделе мы обсудим схему вывода эволюционных уравнений непосредственно из линейного интегрального уравнения. Этот вывод применим как в случае уравнений в частных производных, так и для обыкновенных дифференциальных уравнений (см. также разд. 3.7). Нам нужно потребовать лишь достаточно быстрого убывания решений на одной из

бесконечностей (например) при $x \to \infty$, с тем чтобы интегральные операторы были определены. Следует, однако, отметить, что в общем случае решения, достаточно быстро убывающие на $x \to +\infty$, могут иметь особенности в конечных точках, либо неограниченно расти при $x \to -\infty$, либо медленно убывать при $x \to -\infty$. Во всех этих случаях классический анализ, основанный на аналитических свойствах функций Йоста, неприменим, так как при этом требуется «хорошее» поведение потенциала на всей прямой (см., например, [152], [136]). Благодаря этой свободе класс решений, который может быть получен прямым методом, гораздо шире возможностей МОЗР. Например, таким образом можно описывать автомодельные решения, подчиняющиеся обыкновенным дифференциальным уравнениям, связанным с рассматриваемыми эволюционными уравнениями.

Этот метод впервые использовался для нелинейных эволюционных уравнений Захаровым и Шабатом (1974) [546] (см. также [459]). Блазек [66] и Корний [117] использовали аналогичные идеи применительно к обратной задаче рассеяния; Корний [119, 120] получил ряд дальнейших результатов, применяя их для решения нелинейных эволюционных уравнений. В этом разделе мы будем следовать изложению Абловица, Рамани и Сигура [23]; затем обсудим работу Захарова и Шабата [546], основанную на несколько другой точке зрения.

Рассмотрим линейное интегральное уравнение

$$K(x, y) = F(x, y) + \int_x^\infty K(x, z)\, N(x; z, y)\, dz, \quad y \geqslant x. \tag{3.6.1}$$

Кроме явно указанных аргументов (x, y, z), функции F, N, K в (3.6.1) могут зависеть от других параметров $(t, \lambda, \ldots)$. Производные по этим параметрам могут появиться в дифференциальных уравнениях, которым удовлетворяют F, K, но уравнение (3.6.1) следует рассматривать при фиксированных значениях этих дополнительных параметров.

В каждом конкретном случае функция N явно выражается через F. Например:

(А) $N(x; z, y) = F(z, y)$ (уравнение КдФ, высшие КдФ, Буссинеска, Кадомцева — Петвиашвили ...)

(Б) $N(x; z, y) = \pm \int_x^\infty F(z, s) F(s, y)\, ds$ (уравнения мКдФ, высшие мКдФ, sin-Гордон ...)

(В) $N(x; z, y) = \pm \int_x^\infty F^*(z, s) F(s, y)\, ds$ (нелинейное уравнение Шрёдингера, связанные с ним высшие уравнения ...)

При обычном подходе функция F строится по известным данным рассеяния, полученным из решения «прямой задачи рассеяния»; при этом рассеивающий потенциал $u(x)$ восстанавливается по функции K (например, $u(x)=K(x,x)$, или $u(x)=$ $=(d/dx)K(x,x)$). Здесь мы отвлечемся от подобной интерпретации, а вместо этого потребуем, чтобы функция F удовлетворяла некоторому (обыкновенному или в частных производных) линейному дифференциальному уравнению.

Определим оператор A_x:

(3.6.2)
$$A_x f(y)=\begin{cases}\int\limits_x^\infty f(z)\,N(x;\,z,\,y)\,dz; & y\geqslant x,\\ 0 & ;\quad y<x.\end{cases}$$

Предположим, что при каждом конкретном выборе N можно доказать обратимость оператора $(I-A_x)$. Точнее говоря, при достаточно больших x имеется пространство функций, на котором оператор $(I-A_x)$ обратим, а оператор $(I-A_x)^{-1}$ непрерывен. Кроме того, мы предположим, что оператор, полученный из (3.6.2) дифференцированием по x или y, также определен на этом функциональном пространстве. Можно показать, что эти ограничения выполняются во многих задачах (см., например, [23]).

Учитывая эти предположения и тот факт, что функция F подчиняется некоторому линейному дифференциальному уравнению, мы покажем в этом разделе, что (определенная выше) функция $u(x)$ подчиняется нелинейному дифференциальному уравнению. Мы будем говорить, что это нелинейное уравнение решается методом обратной задачи рассеяния, хотя связи с прямой задачей рассеяния устанавливаться не будет.

Схематически этот подход можно сформулировать следующим образом.

(i) Функция F удовлетворяет двум линейным дифференциальным обыкновенным (или в частных производных) уравнениям

(3.6.3)
$$L_iF=0,\quad i=1,\ 2.$$

(ii) Функция K связана с F уравнением (3.6.1), которое мы можем переписать в виде

(3.6.1′)
$$(I-A_x)K=F.$$

(iii) Действуя операторами L_i, $i=1,\ 2$, на это уравнение, получим

(3.6.4)
$$L_i(I-A_x)K=0,\quad i=1,\ 2.$$

Это можно переписать в виде

$$(I - A_x)(L_i K) = R_i, \quad i = 1, 2, \tag{3.6.5}$$

где R_i, $i = 1, 2$ содержит все остальные члены (3.6.5). При этом (3.6.1) и (3.6.3) выбраны таким образом, что R_i можно представить в виде

$$R_i = (I - A_x) M_i(K), \quad i = 1, 2, \tag{3.6.6}$$

где $M_i(K)$ — нелинейный функционал от K.

(iv) Таким образом,

$$(I - A_x)[L_i K - M_i(K)] = 0, \quad i = 1, 2.$$

Но оператор $I - A_x$ обратим, поэтому функция K должна удовлетворять нелинейным дифференциальным уравнениям

$$L_i K - M_i(K) = 0, \quad i = 1, 2. \tag{3.6.7}$$

Следовательно, каждое решение линейного интегрального уравнения (3.6.1) служит также решением нелинейного дифференциального уравнения (3.6.7).

Основными составными частями этого подхода являются линейное интегральное уравнение (3.6.1) и два линейных дифференциальных оператора L_i, $i = 1, 2$. Два линейных оператора отвечают линейной задаче рассеяния (скажем, при $i = 1$) и эволюции волновых функций по времени (скажем, при $i = 2$). Для того чтобы этот метод действительно работал, следует определить класс допустимых операторов L_i, $i = 1, 2$. Принципиальное значение имеет оператор L_1, связанный с задачей рассеяния. Мы сочли удобным составить «словарик» для членов, которые могут появляться в правой части уравнения (3.6.5) (т. е. из чего состоит R_i). В каждом конкретном случае это позволяет редуцировать уравнение (3.6.7) при $i = 2$ до нелинейного дифференциального уравнения вдоль линии $y = x$. Наконец, отметим, что: (i) функция K, являющаяся решением уравнения (3.6.1), достаточное число раз дифференцируема, поэтому существует $L_i K$; (ii) уравнение $L_2 F = 0$ может быть либо уравнением в частных производных, содержащим зависимость от времени, либо соответствовать автомодельной подстановке (см. [23]).

Обсудим два типичных примера, а именно уравнения КдФ и мКдФ. Мы начнем с интегрального уравнения

$$K(x, y) = F(x, y) + \int_x^\infty K(x, z) F(z, y)\, dz \tag{3.6.8}$$

(т. е. (3.6.1), случай А). Начнем с составления «словарика» тождеств, которые в дальнейшем нам понадобятся.

(3.6.9a) $$\partial_x^n \int_x^\infty K(x, z) F(z, y)\, dz = \int_x^\infty dz\, F(z, y) \left(\partial_x^n K(x, z)\right) + A_n,$$

$$\partial_x \partial_x^{n-1} \int_x^\infty K(x, z) F(z, y)\, dz = \partial_x \left[\int_x^\infty F(z, y)\, \partial_x^{n-1} K(x, z)\, dz + A_{n-1} \right].$$

(3.6.9b)

Интегрирование по частям с последующим приравниванием (3.6.9a) и (3.6.9b) дает

(3.6.9c) $$A_n = A_{n-1x} - F(x, y) \left[\partial_x^{n-1} K(x, z)\right]_{z=x},$$

причем

(3.6.9d) $A_1 = -K(x, x) F(x, y)$,

(3.6.9e) $A_2 = -\dfrac{d}{dx} (K(x, x) F(x, y)) - F(x, y) [\partial_x K(x, z)]_{z=x}$,

(3.6.9f) $$A_3 = -\left(\frac{d}{dx}\right)^2 (K(x, x) F(x, y)) -$$
$$- \frac{d}{dx} (F(x, y) [\partial_x K(x, z)]_{z=x}) - F(x, y) \left[\partial_x^2 K(x, z)\right]_{z=x},$$

где $(d/dx) K(x, x) = (\partial_x K(x, z) + \partial_z K(x, z))_{z=x}$.

Аналогично, интегрируя по частям, получим

$$\int_x^\infty K(x, z)\, \partial_z^n F(z, y)\, dz = (-1)^n \int_x^\infty F(z, y)\, \partial_z^n K(x, z)\, dz + B_n,$$

(3.6.10a)

при этом

(3.6.10b) $B_1 = -K(x, x) F(x, y)$,

(3.6.10c) $B_2 = -K(x, x) (\partial_x F(x, y)) + (\partial_z K(x, z))_{z=x} F(x, y)$,

$$B_3 = -K(x, x)\, \partial_x^2 F(x, y) + \left.\frac{\partial K(x, z)}{\partial z}\right|_{x=z} \partial_x F(x, y) -$$

(3.6.10d) $$- \left(\partial_z^2 K(x, z)\right)_{z=x} F(x, y).$$

Поэтому

(3.6.11a) $$A_1 - B_1 = 0,$$

(3.6.11b) $$A_2 - B_2 = -2F(x, y)\,\partial_x K(x, x),$$

(3.6.11c) $$A_3 - B_3 = -3\partial_x F(x, y)\frac{d}{dx}K(x, x) - 3F(x, y)\left[\left(\partial_x^2 + \partial_x\partial_z\right)K(x, z)\right]_{z=x},$$

.
.
.

Теперь мы введем оператор L_1 и потребуем, чтобы функция F удовлетворяла уравнению

(3.6.12) $$L_1 F \equiv \left(\partial_x^2 - \partial_y^2\right)F(x, y) = 0.$$

Подействуем оператором L_1 на (3.6.8); в результате получим

$$\left(\partial_x^2 - \partial_y^2\right)K = \left(\partial_x^2 - \partial_y^2\right)\int_x^\infty K(x, z)\,F(z, y)\,dz =$$

$$= \int_x^\infty F(z, y)\,\partial_x^2 K(x, z)\,dz + A_2 - \int_x^\infty K(x, z)\,F_{yy}(z, y)\,dz.$$

Соотношения (3.6.12) и (3.6.11) дают

$$\left(\partial_x^2 - \partial_y^2\right)K(x, y) = \int_x^\infty F(x, z)\left(\partial_x^2 - \partial_z^2\right)K(x, z)\,dz -$$

(3.6.13) $$-2F(x, y)\frac{d}{dx}K(x, x).$$

Воспользовавшись уравнением $F = (I - A_x)K$, перепишем (3.6.13) в виде

(3.6.14) $$(I - A_x)\left\{\left(\partial_x^2 - \partial_y^2\right)K(x, y) + 2\left[\frac{d}{dx}K(x, x)\right]K(x, y)\right\} = 0.$$

Из обратимости оператора $(I - A_x)$ следует

(3.6.15a) $$\left(\partial_x^2 - \partial_y^2\right)K(x, y) + u(x)\,K(x, y) = 0;$$

функция $u(x)$ определена равенством

(3.6.15b) $$u(x) = 2\frac{d}{dx}K(x, x).$$

Таким образом, если функция F удовлетворяет уравнению (3.6.12), а K является решением уравнения (3.6.8), то функция K удовлетворяет нелинейному уравнению (3.6.15). Если в

(3.6.15) подставить $K(x, y) = \psi(x, k) e^{iky}$, то получим

$$\psi_{xx} + (k^2 + u)\psi = 0, \tag{3.6.15c}$$

т. е. уравнение Шрёдингера.

Рассмотрим теперь второй интегральный оператор, действующий на F, и потребуем, чтобы функция F удовлетворяла уравнению

$$L_2 F = (\partial_t + (\partial_x + \partial_y)^3) F = 0. \tag{3.6.16}$$

Подействовав оператором L_2 на (3.6.8), получим

$$(\partial_t + (\partial_x + \partial_y)^3) K(x, y) = (\partial_t + (\partial_x + \partial_y)^3) \int_x^\infty K(x, z) F(z, y)\, dz. \tag{3.6.17}$$

В правой части уравнения (3.6.17) имеется член

$$I = \int_x^\infty K(x, z) F_t(z, y)\, dz + (\partial_x + \partial_y)^3 \int_x^\infty K(x, z) F(z, y)\, dz = \tag{3.6.18a}$$

$$= -\int_x^\infty K(x, z)(\partial_z + \partial_y)^3 F(z, y)\, dz + (\partial_x + \partial_y)^3 \int_x^\infty K(x, z) F(z, y)\, dz, \tag{3.6.18b}$$

который мы представим в виде

$$I = I_1 + I_2 + I_3. \tag{3.6.18c}$$

Первый вклад I_1 имеет вид (аргументы подразумеваются)

$$I_1 = \partial_x^3 \int_x^\infty KF\, dz - \int_x^\infty K \partial_z^3 F\, dz; \tag{3.6.18d}$$

используя (3.6.10), получим

$$I_1 = \int_x^\infty \left(\partial_x^3 K + \partial_z^3 K\right) F\, dz + A_3 - B_3. \tag{3.6.18e}$$

Для I_2 имеем

$$I_2 = 3\partial_x^2 \partial_y \int_x^\infty KF\, dz - 3\int_x^\infty K \partial_z^2 \partial_y F\, dz =$$

$$= 3\int_x^\infty \left(\partial_x^2 K - \partial_z^2 K\right) F_y\, dz + 3\partial_y \left(A_2 - B_2\right) = \tag{3.6.18f}$$

$$= -3u\partial_y (K(x, y) - F(x, y)) + 3\partial_y (A_2 - B_2); \tag{3.6.18g}$$

при этом мы воспользовались (3.6.15), (3.6.8) в виде $\int_x^\infty KF\,dz = K - F$. И наконец, для I_3 имеем

(3.6.18h)
$$I_3 = 3\partial_x\partial_y^2\int_x^\infty KF\,dz - 3\int_x^\infty K\partial_z\partial_y^2 F\,dz = 3\int_x^\infty (\partial_x K)\,F_{yy}\,dz + 3\int_x^\infty K_z F_{yy}\,dz = 3\int_x^8 (\partial_x K + \partial_z K)\,F_{yy}\,dz = 3\int_x^\infty (\partial_x K + \partial_z K)\,F_{zz}\,dz =$$

(3.6.18i)
$$= [3(K_{xz} + K_{zz})F - 3(K_x + K_z)F_x]_{z=x} + 3\int_x^\infty \left((\partial_z^2\partial_x + \partial_z^3)K\right)F\,dz.$$

В итоге, воспользовавшись соотношением $K_{zz} = K_{xx} + uK$ в последнем члене (3.6.18i), получим

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \int_x^\infty ((\partial_x + \partial_z)^3 K)\,F\,dz + A_3 - B_3 - 3u\partial_y(K - F) + 3\partial_y(A_2 - B_2) + [3(K_{xz} + K_{zz})F - 3(K_x + K_z)F_x]_{z=x} + 3u\int_x^\infty K_z F\,dz.$$

Теперь уравнение (3.6.17) принимает вид

(3.6.19a)
$$(\partial_t + (\partial_x + \partial_y)^3 + 3u\partial_y)\,K = \int_x^\infty (K_t + (\partial_x + \partial_z)^3 K + 3uK_z)\,F\,dz + T,$$

где

(3.6.19b)
$$T = (A_3 - B_3) + 3\partial_y(A_2 - B_2) + 3uF_y + 3[(K_{xz} + K_{zz})F - (K_x + K_z)F_x]_{z=x}.$$

Подставив значение $A_3 - B_3$, $A_2 - B_2$ и воспользовавшись (3.6.15), (3.6.8), получим

$$T = 3u(x) K(x, x) F(x, y) - 3u(x) F_x(x, y) =$$
$$= -3u(x) K_x(x, y) + 3u(x) \int_x^\infty K_x(x, z) F(z, y)\, dz.$$

Это позволяет привести уравнение (3.6.19a) к виду

(3.6.20a) $$(I - A_x)\{(\partial_t + (\partial_x + \partial_y)^3 + 3u(\partial_x + \partial_y)) K(x, y)\} = 0.$$

Таким образом,

(3.6.20b) $$K_t + (\partial_x + \partial_y)^2 K + 3u(\partial_x + \partial_y) K = 0.$$

На характеристике $y = x$ уравнение (3.6.20b) (предварительно продифференцировав) можно переписать в терминах $u = 2(d/dx) K(x, x)$; в результате получим уравнение КдФ:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Таким образом, любая функция F, удовлетворяющая уравнениям (3.6.12), (3.6.16) и быстро убывающая при $x \to +\infty$, порождает решение уравнения КдФ. Задача сводится к решению линейного интегрального уравнения (3.6.8); при этом нет необходимости связывать функцию F с какой-либо задачей рассеяния.

В качестве второго примера мы рассмотрим линейное интегральное уравнение

(3.6.21) $$K(x, y) = F(x, y) + \frac{\sigma}{4} \int_x^\infty \int_x^\infty K(x, z) F(z, u) F(u, y)\, dz\, du$$

($\sigma = \pm 1$; множитель 1/4 выбран для удобства). Рассмотрим оператор L_1:

(3.6.22a) $$L_1 F = (\partial_x - \partial_y) F = 0;$$

поэтому

(3.6.22b) $$F(x, y) = F\left(\frac{x + y}{2}\right)$$

(множитель 1/2 снова выбран из соображений удобства). Воспользовавшись (3.6.22b) и сдвинув нижний предел интегрирования в нуль, перепишем (3.6.21) в виде

$$K(x, y) = F\left(\frac{x + y}{2}\right) + \frac{\sigma}{4} \int_0^\infty \int_0^\infty K(x, x + \zeta) F\left(\frac{2x + \zeta + \eta}{2}\right) \times$$

(3.6.23a) $$\times F\left(\frac{x + \eta + y}{2}\right) d\zeta\, d\eta,$$

или

(3.6.23b) $$[(I-\sigma A_x)K](x, y)=F\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

где оператор A_x определяется следующим образом:

(3.6.24) $$A_x f(y)=\frac{1}{4}\int_0^\infty\int_0^\infty f(\zeta)F\left(\frac{2x+\zeta+\eta}{2}\right)F\left(\frac{x+\eta+y}{2}\right)d\zeta\, d\eta.$$

Удобно определить

(4.6.25) $$K_2(x, z)=\int_0^\infty K(x, x+\zeta)F\left(\frac{x+\zeta+z}{2}\right)d\zeta.$$

При этом легко показать, что

(3.6.26) $$(I-\sigma A_x)K_2(x, z)=\int_0^\infty F\left(\frac{2x+\zeta}{2}\right)F\left(\frac{x+\zeta+z}{2}\right)d\zeta,$$

и интегральное уравнение (3.6.23a) можно переписать в виде

$$K(x, y)=F\left(\frac{x+y}{2}\right)+\frac{\sigma}{4}\int_0^\infty K_2(x, x+\eta)F\left(\frac{x+\eta+y}{2}\right)d\eta.$$

(3.6.27)

Подействовав на него оператором $L_1=(\partial_x-\partial_y)$, получим

$$(\partial_x-\partial_y)K(x, y)=\frac{\sigma}{4}\int_0^\infty[(\partial_1+\partial_2)K_2(x, x+\eta)]F\left(\frac{x+\eta+y}{2}\right)d\eta,$$

(3.6.28)

где ∂_1 и ∂_2 являются производными по первому и второму аргументам функции K. Подействовав оператором $(\partial_x+\partial_z)$ на (3.6.25), получим

$$(\partial_x+\partial_z)K_2(x, z)=\int_0^\infty\left\{(\partial_1+\partial_2)K(x, x+\zeta)F\left(\frac{x+\zeta+z}{2}\right)+\right.$$

(3.6.29) $$\left.+K(x, x+\zeta)F_z\left(\frac{x+\zeta+z}{2}\right)\right\}d\zeta=$$

$$=\int_0^\infty[(\partial_1-\partial_2)K(x, x+\zeta)]F\left(\frac{x+\zeta+z}{2}\right)d\zeta-2K(x, x)F\left(\frac{x+z}{2}\right).$$

Подставив (3.6.28) в (3.6.29), мы видим, что

$$(I-\sigma A_x)(\partial_x+\partial_z)K_2(x, z)=-2K(x, x)F\left(\frac{x+z}{2}\right)=$$

$$=-2K(x, x)(I-\sigma A_x)K(x, z).$$

Аналогично подстановка (3.6.29) в (3.6.28) ведет к

$$(I-\sigma A_x)(\partial_x-\partial_y)K(x,y)=-\frac{\sigma}{2}K(x,x)\int_0^\infty F\left(\frac{2x+\eta}{2}\right)\times$$
$$\times F\left(\frac{x+\eta+y}{2}\right)d\eta=-\frac{\sigma}{2}K(x,x)(I-\sigma A_x)K_2(x,y).$$

Отметим, что оператор A_x коммутирует с оператором умножения на функции, зависящие только от x. Поэтому если оператор $(I-\sigma A_x)$ обратим, то мы доказали, что

$$(3.6.30)\qquad \begin{aligned}(\partial_x+\partial_y)K_2(x,y)&=-2K(x,x)K(x,y),\\ (\partial_x-\partial_y)K(x,y)&=-\frac{\sigma}{2}K(x,x)K_2(x,y).\end{aligned}$$

Этих результатов следовало ожидать из метода обратной задачи (ср. с (1.3.19)). Однако при их выводе мы воспользовались только обратимостью оператора $(I-\sigma A_x)$, а это требование значительно слабее, чем условия, накладываемые при обычном аналитическом подходе. Положив $K(x,y)=v_1(x)e^{i\zeta y}$, $K_2(x,y)=v_2(x)e^{-i\zeta y}$, мы получим для v_1, v_2 систему уравнений (1.2.7а).

Теперь подействуем на (3.6.23а) оператором

$$(\partial_x+\partial_y)K(x,y)=F'+$$
$$+\frac{\sigma}{4}\int_0^\infty\int_0^\infty K(x,x+\zeta)(\partial_x+\partial_y)\left[F\left(\frac{2x+\zeta+\eta}{2}\right)F\left(\frac{x+\eta+y}{2}\right)\right]d\zeta d\eta+$$
(3.6.31)
$$+\frac{\sigma}{4}\int_0^\infty\int_0^\infty[(\partial_1+\partial_2)K(x,x+\zeta)]F\left(\frac{2x+\zeta+\eta}{2}\right)F\left(\frac{x+\eta+y}{2}\right)d\zeta\, d\eta.$$

Но

$$(\partial_x+\partial_y)F\left(\frac{2x+\zeta+\eta}{2}\right)F\left(\frac{x+\eta+y}{2}\right)=$$
$$=F'\left(\frac{2x+\zeta+\eta}{2}\right)F\left(\frac{x+\eta+y}{2}\right)+F\left(\frac{2x+\zeta+\eta}{2}\right)F'\left(\frac{x+\eta+y}{2}\right)=$$
(3.6.32)
$$=2\partial_\eta\left\{F\left(\frac{2x+\zeta+\eta}{2}\right)F\left(\frac{x+\eta+y}{2}\right)\right\}.$$

Интегрирование по η в (3.6.32) ведет к

$$(I-\sigma A_x)(\partial_x+\partial_y)K(x,y)=$$
$$=F'\left(\frac{x+y}{2}\right)-\left(\frac{\sigma}{2}\int_0^\infty K(x,x+\zeta)F(2x+\zeta)\,d\zeta\right)F(x+y)=$$
$$=F'\left(\frac{x+y}{2}\right)-\frac{\sigma}{2}K_2(x,x)(I-\sigma A_x)K(x,y),$$

т. е.

$$F'\left(\frac{x+y}{2}\right)=(I-\sigma A_x)\left\{(\partial_x+\partial_y)K(x,y)+\frac{\sigma}{2}K_2(x,x)K(x,y)\right\}. \tag{3.6.33}$$

Это «словарик», нужный для нашей задачи.

На последнем этапе мы воспользуемся тем фактом, что функция F удовлетворяет еще одному линейному уравнению:

$$L_2F=(\partial_t+(\partial_x+\partial_y)^3)F=0. \tag{3.6.34}$$

Подействовав оператором L_2 на уравнение (3.6.23а), получим

$$\{\partial_t+(\partial_x+\partial_y)^3\}K(x,y)=$$
$$=0+\frac{\sigma}{4}\{\partial_t+(\partial_x+\partial_y)^3\}\int_0^\infty K(x,x+\zeta)F\left(\frac{2x+\zeta+\eta}{2}\right)\times$$
$$\times F\left(\frac{x+\eta+y}{2}\right)d\eta\,d\zeta. \tag{3.6.35}$$

Когда мы будем производить дифференцирование под знаком интеграла в правой части уравнения (3.6.35), количество членов будет увеличиваться, но некоторые члены взаимно уничтожаются. Например, воспользовавшись (3.6.34), получим

$$\{\partial_t+(\partial_x+\partial_y)^3\}F\left(\frac{2x+\zeta+\eta}{2}\right)F\left(\frac{x+\eta+y}{2}\right)=$$
$$=6\partial_\eta\left[F'\left(\frac{2x+\zeta+\eta}{2}\right)F'\left(\frac{x+\eta+y}{2}\right)\right].$$

Уравнение (3.6.35) можно переписать в виде

$$(I-\sigma A_x)\{\partial_t+(\partial_x+\partial_y)^3\}K(x,y)=$$
$$=-\frac{3\sigma}{2}\left[\partial_x\int_0^\infty d\zeta\left\{\frac{\partial_1+\partial_2}{2}K(x,x+\zeta)\right\}F\left(\frac{2x+\zeta}{2}\right)\right]F\left(\frac{x+y}{2}\right)-$$
$$-\frac{3\sigma}{2}[\partial_xK_2(x,x)]F'\left(\frac{x+y}{2}\right). \tag{3.6.36}$$

Но из (3.6.30) следует, что

$$\partial_x K_2(x, x) = -2K(x, x)$$

и

$$\partial_x \int_0^\infty d\zeta\, F\left(\frac{2x+\zeta}{2}\right) \frac{\partial_1 + \partial_2}{2} K(x, x+\zeta) =$$

$$= \partial_x [(\partial_x - \partial_y) K_2(x, y)]_{y=x} =$$

$$= [(\partial_x + \partial_y)(\partial_x - \partial_y) K_2(x, y)]_{y=x} =$$

$$= (\partial_x - \partial_y)\{-2K(x, x) K(x, y)\}_{y=x} =$$

$$= -2[\partial_x K(x, x)] K(x, x) + \sigma K^2(x, x) K_2(x, x).$$

При этом мы воспользовались соотношением

$$(\partial_x - \partial_y) K_2(x, y) = \int_0^\infty (\partial_1 + \partial_2) K(x, x+\zeta) F\left(\frac{x+\zeta+y}{2}\right) d\zeta.$$

Теперь из вспомогательных соотношений (3.6.23), (3.6.33), обратимости оператора $(I - \sigma A_x)$ и равенства (3.6.36) следует, что (при $y \geqslant x$)

$$\{\partial_t + (\partial_x + \partial_y)^3\} K(x, y) = 3\sigma K(x, x) K(x, y) \partial_x K(x, x) + \tag{3.6.37}$$
$$+ 3\sigma K^2(x, x)(\partial_x + \partial_y) K(x, y).$$

Если определить

$$q(x, t) = K(x, x; t) \tag{3.6.38}$$

и взять (3.6.37) при $y = x$, то получим

$$\partial_t q + \partial_x^3 q = 6\sigma q^2 q_x, \tag{3.6.39}$$

т. е. q удовлетворяет модифицированному уравнению Кортевега — де Фриза.

Таким образом, каждое решение уравнений $L_i F = 0, i = 1, 2$, убывающее достаточно быстро при $x \to \infty$, определяет решение уравнения (3.6.39) (при этом на промежуточном этапе следует решить линейное интегральное уравнение (3.6.21)). Никаких глобальных свойств (на всей оси $-\infty < x < \infty$) не требуется. Интересным частным случаем является построение автомодельных F и K:

$$K(x, y; t) = (3t)^{-1/3} \hat{K}(\xi, \eta), \quad F\left(\frac{x+y}{2}; t\right) = (3t)^{-1/3} \hat{F}\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right), \tag{3.6.40}$$

где

$$\xi = \frac{x}{(3t)^{1/3}}, \quad \eta = \frac{y}{(3t)^{1/3}},$$

Подставив это представление в (3.6.23), убедимся, что $\hat{K}$ удовлетворяет уравнению такого же вида:

$$\hat{K}(\xi, \eta) = \hat{F}\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) + \frac{\sigma}{4}\int_{\xi}^{\infty} \hat{K}(\xi, \zeta)\hat{F}\left(\frac{\zeta+\psi}{2}\right)\times \times \hat{F}\left(\frac{\psi+\eta}{2}\right) d\zeta\, d\psi, \quad \eta \geqslant \xi. \tag{3.6.41}$$

Подстановка (3.6.40) в (3.6.34) дает уравнение

$$\hat{F}'''(\xi) - [\hat{F}(\xi) + \xi\hat{F}'(\xi)] = 0,$$

которое можно один раз проинтегрировать:

$$\hat{F}''(\xi) - \xi\hat{F}(\xi) = C_1. \tag{3.6.42}$$

Если $C_1 = 0$, то решение, убывающее при $\xi \to \infty$, пропорционально функции Эйри:

$$\hat{F}\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) = r \operatorname{Ai}\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right). \tag{3.6.43}$$

При этом функция $Q(\xi) = \hat{K}(\xi, \xi)$ должна быть автомодельным решением уравнения (3.6.38), т. е.

$$Q''' - [Q + \xi Q'] = 6\sigma Q^2 Q'.$$

Это уравнение также можно один раз проинтегрировать:

$$Q'' = \xi Q + 2\sigma Q^3 + C_2. \tag{3.6.44}$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение (3.6.44) представляет собой уравнение Пенлеве (P_{II}).

Мы показали, что каждому решению линейного интегрального уравнения (3.6.41) с ядром $\hat{F}$, удовлетворяющим уравнению (3.6.42), отвечает решение уравнения (3.6.44). В частности, при $C_1 = 0$ из (3.6.41) следует, что функция $Q(\xi)$ экспоненциально убывает при $\xi \to \infty$; таким образом, C_2 в (3.6.44) также равно нулю, и

$$Q'' = \xi Q + 2\sigma Q^3. \tag{3.6.45}$$

Однопараметрическое семейство решений этого уравнения можно построить, решив линейное интегральное уравнение

$$[I - \sigma r^2 \tilde{A}_{\xi}]\, \hat{K}(\xi, \eta; r) = r \operatorname{Ai}\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right), \tag{3.6.46}$$

где

$$\tilde{A}_{\xi} f(\eta) = \frac{1}{4}\int_{\xi}^{\infty}\int_{\xi}^{\infty} f(\zeta) \operatorname{Ai}\left(\frac{\zeta+\psi}{2}\right) \operatorname{Ai}\left(\frac{\psi+\eta}{2}\right) d\zeta\, d\psi; \tag{3.6.47}$$

при этом $Q(\xi, r) = \hat{K}(\xi, \xi, r)$. Эти результаты впервые были получены Абловицем и Сигуром (1977) [27]. В разд. 3.7 мы более подробно обсудим свойства уравнения P_{II}.

Перейдем теперь к обсуждению предшествующей конструкции Захарова — Шабата [546], ограничившись частным примером уравнения Кадомцева — Петвиашвили. Уравнение (3.6.8) удобно переписать в виде

$$K(x, z; y, t) + F(x, z; y, t) + \int_x^\infty K(x, s; y, t) F(s, z; y, t)\, ds = 0. \tag{3.6.48}$$

Вначале мы перечислим результаты для уравнения Кадомцева — Петвиашвили (К—П), а затем обсудим конструкцию Захарова — Шабата (несколько отличающуюся от вышеописанной).

Если мы потребуем, чтобы функция F удовлетворяла двум линейным уравнениям

$$L_1F = \beta F_y + F_{xx} - F_{zz} = 0, \tag{3.6.49a}$$

$$L_2F = \alpha F_t + F_{xxx} + F_{zzz} = 0, \tag{3.6.49b}$$

и будем следовать уже описанному рецепту или рецепту, который будет обсуждаться чуть ниже, мы обнаружим, что $u = 2(d/dx)K(x, x)$ удовлетворяет уравнению К—П (см. также разд. 2.1, 3.3, 3.4)

$$\partial_x \left(\alpha u_t + \frac{1}{4}(u_{xxx} + 6uu_x)\right) = -\frac{3}{4}\beta^2 u_{yy}, \tag{3.6.50a}$$

или при $\alpha = 1/4$

$$\partial_x (u_t + 6uu_x + u_{xxx}) = -3\beta^2 u_{yy}. \tag{3.6.50b}$$

Теперь мы выведем уравнение (3.6.50), используя операторный формализм Захарова — Шабата. Все операторы обозначаются буквами, снабженными крышкой (т. е. $\hat{K}$ — оператор, K — функция, возможно матричная). В операторных обозначениях линейное интегральное уравнение записывается в факторизованном виде

$$(1 + \hat{K}_+)(1 + \hat{F}) = (1 + \hat{K}_-), \tag{3.6.51}$$

где $\hat{K}_\pm$, $\hat{F}$ — матричные $(N \times N)$ операторы, действующие на (векторнозначные) функции $\psi = \{\psi_1, \ldots, \psi_N\}^T$ и

$$\hat{F}\psi = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, z)\, \psi(z)\, dz \tag{3.6.52}$$

(F — $N \times N$-матричная функция). Здесь $K_\pm$ являются вольтерровскими операторами, $K_+(x, z) = 0$ при $z < x$, $K_-(x, z) = 0$ при $z > x$. Предполагается, что операторы $(1 + K_\pm)$ обратимы. Действуя соотношением (3.6.51) на ψ, получим

$$K_+(x, z) + F(x, z) + \int_x^\infty K_+(x, s) F(s, z)\, ds, \tag{3.6.53a}$$

$$K_-(x, z) = F(x, s) + \int_{-\infty}^\infty K_-(x, s) F(s, z)\, ds. \tag{3.6.53b}$$

Отметим, что уравнение (3.6.53a) совпадает с (3.6.48) (зависимость от вспомогательных переменных y, t подразумевается).

Пусть далее определены некоторые «невозмущенные» операторы $\hat{M}_{0,i}$, $i = 1, 2$, удовлетворяющие соотношению

$$[\hat{M}_{0,i}, \hat{F}] = \hat{M}_{0,i}\hat{F} - \hat{F}\hat{M}_{0,i} = 0. \tag{3.6.54}$$

Так, например, если $\hat{M}_0 = \partial_x^2$, то (3.6.54) означает, что

$$\partial_x^2 \int_{-\infty}^\infty F(x, z)\, \psi(z)\, dz - \int_{-\infty}^\infty F(x, z)\, \partial_z^2 \psi(z)\, dz = 0,$$

что дает уравнение $(\partial_x^2 - \partial_z^2) F = 0$. Эти «невозмущенные» операторы порождают «возмущенные» операторы $\hat{M}_i$, $i = 1, 2$, по следующему правилу:

$$\hat{M}_i(1 + \hat{K}_+) - (1 + \hat{K}_+)\hat{M}_{0,i} = 0, \quad i = 1, 2. \tag{3.6.55}$$

Оператор $\hat{M}_0$ имеет вид

$$\check{M}_0 = \alpha\partial_t + \beta\partial_y + \hat{L}_0, \quad \hat{L}_0 = \sum l_n \partial_x^n$$

(l_n — постоянные матрицы). Уравнение (3.6.55) приводит к оператору

$$\hat{M} = \alpha\partial_t + \beta\partial_y + \hat{L}, \quad \hat{L} = \sum_n \left\{ l_n \partial_x^n + \sum_{k=1}^n V_k(x)\, \partial_x^{n-k} \right\},$$

коэффициенты $V_k(x)$ которого определяются рекуррентно, и уравнению на K_+ следующего вида:

$$\alpha\partial_t K_+ + \beta\partial_y K_+ + \hat{L}K_+ + \sum (-1)^{n-1} \partial_z^n K_+ l_n = 0 \tag{3.6.56a}$$

(это аналог уравнения (3.6.7)). Например, если $\alpha = \beta = 0$, $L_0 = \partial_x^2$ (скалярный оператор), то $V_1 = 0$, $V_2 = 2(d/dx)K(x, x) = u(x)$, т. е. $\hat{L} = \partial_x^2 + u$, и K_+ удовлетворяет уравнению $(\partial_x^2 - \partial_z^2 + u) K_+ = 0$.

Теперь из условия (3.6.54) и интегрального уравнения (3.6.51) следует

(3.6.57) $$\hat{M}(1+\hat{K}_-)-(1+\hat{K}_-)\hat{M}_0=\hat{M}(1+\hat{K}_+)(1+\hat{F})-$$
$$-(1+\hat{K}_+)(1+\hat{F})\hat{M}_0=(\hat{M}(1+\hat{K}_+)-(1+\hat{K}_+)\hat{M}_0)(1+\hat{F}).$$

При $z>x$ левая часть этого равенства обращается в нуль, поэтому должно выполняться соотношение (3.6.55). Предположим, что

$$\hat{M}_{0,1}=\alpha\partial_t+\hat{L}_{0,1},$$
$$\hat{M}_{0,2}=\beta\partial_y+\hat{L}_{0,2},$$

причем $[\hat{M}_{0,i}, \hat{F}]=0$, $i=1, 2$. Из (3.6.57) следует, что

$$M_i(1+\hat{K}_+)=(1+\hat{K}_+)\hat{M}_{0,i}, \qquad i=1, 2.$$

Умножим первое уравнение ($i=1$) слева на $\hat{M}_2$ и вычтем из него второе уравнение ($i=2$), умноженное слева на $\hat{M}_1$. В результате получим

(3.6.58a) $$[\hat{M}_1, \hat{M}_2]=0,$$

или

(3.6.58b) $$\alpha\partial_t\hat{L}_2-\beta\partial_y\hat{L}_1+[\hat{L}_1, \hat{L}_2]=0,$$

или

(3.6.58c) $$\hat{L}\equiv\beta\partial_y+\hat{L}_2, \quad \frac{\hat{L}^{(1)}}{\alpha}\equiv A, \quad \hat{L}_t=[\hat{L}, \hat{A}].$$

Соотношение (3.6.58) представляет собой нелинейное эволюционное уравнение, интегрируемое с помощью линейного интегрального уравнения. В (3.6.58b) видна зависимость от дополнительной переменной y, а (3.6.58c) является представлением Лакса для этого эволюционного уравнения.

В случае уравнения К—П пара линейных операторов имеет вид

(3.6.59a) $$\hat{M}_{0,1}=\alpha\partial_t+\partial_x^3,$$
(3.6.59b) $$\hat{M}_{0,2}=\beta\partial_y+\partial_x^3.$$

Из (3.6.54) следует, что ядро интегрального оператора подчиняется уравнениям

(3.6.60a) $$\{\alpha\partial_t+(\partial_x^3+\partial_z^3)\}F=0,$$
(3.6.60b) $$\{\beta\partial_y+(\partial_x^2-\partial_z^2)\}F=0.$$

«Возмущенные» операторы при этом имеют вид

(3.6.61a) $$\hat{M}_1 = \alpha\partial_t + \hat{L}_1,$$

(3.6.61b) $$M_2 = \beta\partial_y + \hat{L}_2,$$

где

(3.6.61c) $$\hat{L}_1 = \partial_x^3 + \frac{3}{4}(u\partial_x + \partial_x u) + w,$$

(3.6.61d) $$\hat{L}_2 = \partial_x^2 + u$$

(отметим, что $\partial_x u \equiv u\partial_x + u_x$) и $u = 2(d/dx)K(x, x)$,

$$w \equiv \frac{3}{2}\frac{d}{dx}((\partial_x - \partial_z)K(x, z)|_{z=x} + (K(x, x))^2).$$

Можно проверить, что

(3.6.62) $$[\hat{L}_2, \hat{L}_1] = \partial_x w + w\partial_x - \frac{1}{4}(u_{xxx} + 6uu_x).$$

Поэтому операторное равенство (3.6.58b) приводит к (оператором следует подействовать на функцию ψ и приравнять нулю коэффициенты при ψ и ψ_x)

(3.6.63) $$\alpha u_t + \frac{1}{4}(u_{xxx} + 6uu_x) = \beta w_y, \quad w_x = -\frac{3}{4}\beta u_y.$$

Это уравнение сводится к уравнению К—П (3.6.50). Если положить $\alpha = 1/4$, то $\hat{L}$-, $\hat{A}$-операторы в (3.6.58c) принимают вид

(3.6.64a) $$\hat{L} = \partial_x^2 + u + \beta\partial_y,$$

(3.6.64b) $$\hat{A} = 4\partial_x^3 + 3(u\partial_x + \partial_x u) - 3\beta\int_{-\infty}^{x} u_y\,dx'.$$

Мы предлагаем читателю сравнить этот метод с другими подходами, обсуждавшимися в разд. 2.1 (см. также [141], [8]).

Описанный метод является чрезвычайно мощным, он одновременно дает и решения, и L-, A-пары. Пара операторов (3.6.64) лежит в основании работы Захарова, Манакова [537], посвященной развитию метода обратной задачи рассеяния для уравнения К—П (см. также [528]).

Следует отметить, что не зависящие от времени решения уравнения (3.6.63) подчиняются уравнению Буссинеска

(3.6.65) $$u_{xxxx} + 6(uu_x)_x + 3\beta^2 u_{yy} = 0.$$

С другой стороны, если отсутствует зависимость от y, то мы получаем обычное уравнение КдФ, продифференцированное по x. Частные решения можно строить с помощью линейного инте-

грального уравнения. Предположим, что

(3.6.66) $$F = \sum_n M_n(t, y)\, e^{-\varkappa_n x - \eta_n z};$$

тогда из (3.6.60) следует, что

(3.6.67) $$M_n(t, y) = M_n(0)\exp\{(\eta_n^2 - \varkappa_n^8)\, y + (\varkappa_n^3 + \eta_n^3)\, t\}.$$

Подставив $K(x, z) = \sum_n K_n(x)\, e^{-\eta_n z}$ в интегральное уравнение (3.6.48), получим систему линейных алгебраических уравнений

(3.6.68) $$K_n(x) + M_n e^{-\varkappa_n x} + M_n \sum_m K_m(x) \frac{\exp(-(\varkappa_n + \eta_m)\, x)}{(\varkappa_n + \eta_m)} = 0,$$

из которой следует, что потенциал $u(x) = +2(d/dx)K(x, x)$ можно представить в виде

(3.6.69) $$u = 2\frac{d^2}{dx^2}\ln\Delta,$$
$$\Delta = \det\left(M_n\delta_{nm} + M_n \frac{\exp(-(\varkappa_n + \eta_m)\, x)}{\varkappa_n + \eta_m}\right).$$

Эта формула совпадает с результатом разд. 3.3, полученным Сатсумой [445]. Она описывает взаимодействующие плоские солитоны, расположенные под углом к оси x (в ней содержится также резонансный случай, рассмотренный Майлзом [375, 376] (см. также [397]). При $\alpha = 1/4$, $\beta^2 = -1$ в работе Манакова и др. [350] было показано, что в пределе формула (3.6.69) дает лампы — двумерные солитоны, убывающие во всех направлениях как $1/R^2$ $(R^2 = x^2 + y^2)$ при $R \to \infty$ (см. также разд. 3.4):

(3.6.70a) $$u = 2\partial_x^2 \ln\det B,$$

где $2N \times 2N$-матрица B имеет вид

(3.6.70b) $$B = \delta_{nm}(x - i\nu_n y - \xi_n - 3\nu_n^2 t) + (1 - \delta_{nm})\left(\frac{2}{\nu_n - \nu_m}\right).$$

Асимптотически это решение представляет собой набор невзаимодействующих лампов, двигающихся со скоростями $V_x = 3|\nu_n|^2$, $V_y = -6\,\mathrm{Im}\,\nu_n$. В результате взаимодействия никакого сдвига фаз не происходит.

Захаров и Шабат в работе [546] обсуждают также и другие решения. Кроме того, они показали, каким образом эти методы можно применить для решения следующей задачи о трехволновом взаимодействии в трехмерном пространстве:

(3.6.71) $$\frac{\partial u_1}{\partial t} + V_1 \cdot \nabla u_1 = i\gamma_1 u_2^* u_3^*,$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + V_2 \cdot \nabla u_2 = i\gamma_2 u_1^* u_3^*,$$
$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + V_3 \cdot \nabla u_3 = i\gamma_3 u_1^* u_2^*.$$

Эти идеи были обобщены в работе Захарова [528] и затем Корния [120]. Решение этой системы уравнений в классе функций, убывающих достаточно быстро при $|x|$, $|y| \to \infty$, были построены Каупом [265] с помощью метода обратной задачи рассеяния.

Наконец, отметим, что этот метод позволяет описывать конечные возмущения частных решений интегрируемых уравнений. Пусть $u_0(x, t)$ — некоторое частное решение интегрируемого уравнения (например, КдФ); тогда его возмущение $v(x, t)$ $(u(x, t) = u_0(x, t) + v(x, t)$ можно описывать с помощью интегрального уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко. Например, этим способом можно строить рационально-экспоненциальные решения; такой подход использовался в работах Шабата [460], Кузнецова и Михайлова [306], Абловица и Корния [6], Абловица и Эро [5].

3.7. Трансценденты Пенлеве. Среди решений уравнений в частных производных встречаются решения, зависящие только от какой-нибудь одной комбинации независимых переменных и, следовательно, удовлетворяющие некоторому обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) (в этом разделе ОДУ будет обозначать как одно обыкновенное дифференциальное уравнение, так и систему таких уравнений). Например, уравнение КдФ

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{3.7.1a}$$

допускает как стационарные решения

$$u(x, t) = U(x - ct)$$

(при этом $U(z)$ удовлетворяет ОДУ

$$U'' + 3U^2 - cU = K), \tag{3.7.1b}$$

так и автомодельное решение

$$u(x, t) = (3t)^{-2/3} f\left(\frac{x}{(3t)^{1/3}}\right),$$

где $f(z)$ удовлетворяет уравнению

$$f''' + 6ff' = zf' + 2f. \tag{3.7.1c}$$

Каждое из этих ОДУ является точной редукцией уравнения в частных производных.

Методы, обсуждающиеся в этой главе и других разделах книги, успешны из-за чрезвычайно богатой внутренней структуры изучаемых уравнений. Обыкновенные дифференциальные уравнения, полученные точными редукциями из уравнений в частных производных, также наследуют эту богатую структуру, и некоторые из методов, развитых для уравнений в частных произ-

водных, можно с успехом применить для исследования соответствующих нелинейных ОДУ. Осознание этого факта позволило решить ряд проблем, остававшихся неразрешенными в теории ОДУ более века.

Все ОДУ, полученные в результате точной редукции, обладают одним важным и простым свойством — свойством Пенлеве (которое будет определено ниже). Это позволяет непосредственно проверить, является ли наперед заданное нелинейное уравнение в частных производных интегрируемым при помощи МОЗР. Мы увидим, что эта связь между ОДУ со свойством Пенлеве и уравнениями в частных производных, интегрируемыми с помощью МОЗР, является весьма полезной и позволяет получить ценную информацию как об ОДУ, так и об уравнениях в частных производных.

3.7. а. Свойство Пенлеве. Начнем с обзора некоторых фактов, касающихся ОДУ (см. [238, гл. 15]). Рассмотрим ОДУ n-го порядка

$$\frac{d^n w}{dz^n} + P_1(z)\frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}} + \ldots + P_{n-1}(z)\frac{dw}{dz} + P_n(z)\,w = 0.$$

Если все n коэффициентов являются аналитическими функциями в некоторой окрестности точки z_0 комплексной плоскости z, то z_0 называется *регулярной* точкой ОДУ, и в ее окрестности имеется n линейно независимых аналитических решений этого уравнения. Особенности решений ОДУ могут находиться только в точках особенностей коэффициентов уравнения. Эти особенности называются *неподвижными*, так как их расположение не зависит от (n) постоянных интегрирования. Неподвижность особенностей решения в комплексной плоскости является общим свойством линейных ОДУ.

Нелинейные ОДУ не обладают этим свойством. Простым примером нелинейного ОДУ является

$$\frac{dw}{dz} + w^2 = 0. \tag{3.7.2a}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$w(z;\, z_0) = \frac{1}{z - z_0}. \tag{3.7.2b}$$

Здесь z_0 — произвольная постоянная интегрирования, она же определяет расположение особенности. Особенности, расположение которых зависит от постоянных интегрирования, называются *подвижными*. Нелинейные ОДУ могут иметь как подвижные, так и неподвижные особые точки.

Сингулярность решения ОДУ, не являющуюся полюсом (произвольного порядка), называют *критической особой точкой*.

К ним относятся точки ветвления (алгебраические и логарифмические) и точки существенных особенностей. В конце XIX в. математиков интересовала проблема классификации ОДУ по типу сингулярностей, которыми могут обладать их решения. (Обзор большого количества работ, посвященных этому вопросу, см. в [238, гл. 12—14] или в [210].) В 1884 г. Фукс доказал, что среди всех уравнений первого порядка

$$\frac{dw}{dz} = F(w, z)$$

с функцией F, рациональной по w и локально аналитической по z, только обобщенное уравнение Рикатти

$$\frac{dw}{dz} = P_0(z) + P_1(z)\,w + P_2(z)\,w^2 \tag{3.7.3}$$

не имеет подвижных критических точек.

С. В. Ковалевская, несомненно знакомая с этими результатами, сделала следующий важный шаг, и в 1888 г. ей была присуждена премия Бордэна за значительный вклад в теорию движения твердого тела с неподвижной точкой в поле тяжести. Основная ее идея состояла в том, чтобы выполнить не имеющие очевидного физического смысла вычисления, позволившие определить параметры задачи, при которых уравнение движения не имеет подвижных критических точек. Во всех этих случаях ей удалось явно проинтегрировать уравнения движения. В оставшихся случаях решение этих уравнений до сих пор не известно. (Обсуждение этих работ читатель может найти в книге [189].)

Вскоре после этого Пенлеве и его ученики обратились к изучению уравнений второго порядка вида

$$w'' = F(w', w, z), \tag{3.7.4}$$

где функция F является рациональной по w, w' и локально аналитической по z. Они показали, что среди всех возможных уравнений этого вида имеется только 50 канонических уравнений, обладающих свойством отсутствия подвижных критических точек. Это свойство мы будем называть свойством Пенлеве, а уравнения, обладающие этим свойством, — уравнениями Р-типа. Все эти 50 уравнений можно привести либо к интегрируемым уравнениям, либо к одному из шести нелинейных неавтономных ОДУ. Вот эти шесть уравнений:

$$\mathrm{P_I} \qquad \frac{d^2w}{dz^2} = 6w^2 + z,$$

$$\mathrm{P_{II}} \qquad \frac{d^2w}{dz^2} = zw + 2w^2 + \alpha,$$

$$\mathrm{P_{III}} \qquad \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{w}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 - \frac{1}{z}\frac{dw}{dz} + \frac{1}{z}(\alpha w^2 + \beta) + \gamma w^3 + \frac{\delta}{w},$$

$$P_{IV} \qquad \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{2w}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 + \frac{3w^3}{2} + 4zw^2 + 2(z^2 - \alpha) + \frac{\beta}{w},$$

$$P_{V} \qquad \frac{d^2w}{dz^2} = \left\{\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1}\right\}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 - \frac{1}{z}\frac{dw}{dz} + \frac{(w-1)^2}{z^2}\left(\alpha w + \frac{\beta}{w}\right\} + \frac{\gamma m}{z} + \frac{\delta w(w+1)}{w-1},$$

$$P_{VI} \qquad \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-z}\right\}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 - \left\{\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{w-z}\right\}\frac{dw}{dz} + \frac{w(w-1)(w-z)}{z^2(z-1)^2}\left\{\alpha + \frac{\beta z}{w^2} + \frac{\gamma(z-1)}{(w-1)^2} + \frac{\delta z(z-1)}{(w-z)^2}\right\}.$$

Пенлеве и Гамбье показали, что эти уравнения нельзя свести к более простым ОДУ. Поэтому они определили новые спецфункции — трансценденты Пенлеве.

Вопрос, какие из ОДУ обладают свойством Пенлеве, можно поставить для уравнений любого порядка, но исчерпывающие результаты получены только для уравнений первого и второго порядка. (Бюрэ [80] дал частичную классификацию уравнений третьего порядка.)

3.7.b. Связь с МОЗР. Как обыкновенные дифференциальные уравнения P-типа связаны с интегрируемыми уравнениями в частных производных? Напомним (разд. 3.6), что нелинейное уравнение в частных производных считается решаемым методом обратной задачи, если $K(x,x)$ (или $(d/dx)K(x,x)$) является его решением, причем $K(x,x)$ определяется из линейного интегрального уравнения типа Гельфанда — Левитана — Марченко

$$(3.7.5) \qquad K(x, y) = F(x, y) + \int_x^\infty K(x, z)\, N(x; z, y)\, dz, \qquad y \geqslant x,$$

где N известным образом связано с F. Здесь мы опустили зависимость K от остальных переменных (т. е. t, иногда $\tilde{y}$ и т. д.) для того, чтобы подчеркнуть выделенную роль переменной x в (3.7.5). Абловиц, Рамани и Сигур [22] выдвинули следующую гипотезу:

Гипотеза о свойстве Пенлеве. *Нелинейное уравнение в частных производных можно решить методом обратной задачи рассеяния только в том случае, когда любое нелинейное* ОДУ, *полученное из него в результате точной редукции, имеет* P-*тип, возможно, после замены переменных.* (См. также [272] и упр. 13.)

Допустим на некоторое время справедливость этой гипотезы и опишем, как ею пользоваться.

(i) Пусть задано нелинейное уравнение в частных производных, тогда следует найти точную редукцию в ОДУ. Простейшие редукции возможны, если уравнение в частных производных допускает решения типа бегущей волны или автомодельные решения, но это не единственные возможности. Часто число таких простых редукций очевидно из формы уравнения.

(ii) Воспользовавшись приведенным ниже анализом критических точек, следует определить, имеет ли ОДУ Р-тип. Если это ОДУ не является уравнением Р-типа, то в этом виде оно не может быть проинтегрировано с помощью МОЗР.

(iii) Иногда с помощью замены переменных удается преобразовать ОДУ, и оно становится Р-типа; довольно часто на эту замену переменных наталкивают вычисления, связанные с анализом критических точек. Если существует такая замена, то исходное уравнение является кандидатом для применения к нему МОЗР. Примером может служить уравнение sin-Гордон, для которого необходимо такое преобразование. Напомним (разд. 1.2), что МОЗР действительно позволяет решить систему уравнений (1.2.17), которая затем преобразуется к уравнению sin-Гордон (см. также упр. 6).

(iv) Если ОДУ имеет Р-тип, то можно поискать и проверить другие редукции. Но поскольку нет никакого систематического способа поиска всех точных редукций, то эти проверки лишь наводят на мысль, что к данному уравнению в частных производных применим МОЗР. Если одна или две нетривиальные редукции рассматриваемого уравнения в частных производных приводят к ОДУ Р-типа, то, вооружившись надеждой, можно пытаться поискать преобразование Бэклунда или соответствующую задачу рассеяния.

(v) Обратно, если известно, что к уравнению в частных производных применим МОЗР, то любая его точная редукция в естественных переменных соответствующего линейного интегрального уравнения приводит к ОДУ-типа.

Вот несколько примеров. Захаров [527] показал, что уравнение Буссинеска

$$u_{tt} = u_{xx} + \left(\frac{u^2}{2}\right)_{xx} + \frac{1}{4} u_{xxxx} \tag{3.7.6}$$

интегрируется с помощью МОЗР. Точную редукцию этого уравнения можно получить, ограничившись рассмотрением решений типа бегущей волны

$$u(x, t) = w(x - ct) = w(z);$$

при этом $w(z)$ удовлетворяет уравнению

$$(1 - c^2) w'' + \left(\frac{w^2}{2}\right)'' + \frac{1}{4} w'''' = 0, \tag{3.7.7}$$

которое легко дважды проинтегрировать. В зависимости от выбора постоянных интегрирования после изменения масштабов получим две возможности:

$$(3.7.8)\qquad w'' + 2w^2 + \alpha = 0 \quad \text{или} \quad w'' + 2w^2 + z = 0.$$

Первый случай приводит к эллиптическим функциям, все сингулярности которых являются только полюсами. Вторая возможность совпадает с уравнением P_I. В обоих случаях ОДУ обладает свойством Пенлеве.

В качестве другого примера возьмем уравнение мКдФ

$$(3.7.9)\qquad u_t - 6u^2u_x + u_{xxx} = 0,$$

к которому применим МОЗР. Точную редукцию можно получить, ограничившись автомодельными решениями вида

$$u(x,\ t) = \frac{w(z)}{(3t)^{2/3}}, \qquad z = \frac{x}{(3t)^{1/3}},$$

$$\Rightarrow w''' - 6w^2w' - (zw)' = 0.$$

После однократного интегрирования получим уравнение Р-типа

$$P_{II}\qquad w'' = 2w^3 + zw + \alpha.$$

Уравнение sin-Гордон

$$(3.7.10)\qquad u_{x,t} = \sin u$$

можно интегрировать (после преобразования) с помощью МОЗР. Оно имеет автомодельное решение

$$(3.7.11)\qquad u(x,\ t) = f(z), \quad z = xt.$$

Если положить $w(z) = \exp(if)$, то

$$P_{III}\qquad w'' = \frac{1}{w}(w')^2 - \frac{1}{z}(w') + \frac{1}{2z}(w^2 - 1),$$

и снова получается уравнение Р-типа.

Уравнение Шрёдингера с производной

$$(3.7.12)\qquad iq_t = q_{xx} - 4iq^2(q^*)_x + 8|q|^4 q$$

может быть проинтегрировано методом обратной задачи рассеяния (Кауп, Ньюэлл [266]). ОДУ, которому удовлетворяет автомодельное решение уравнения (3.7.12), приводится к P_{IV} (см. [23]). Другие примеры были построены в [243, 244], [440], [372]; см. также упражнения к этой главе. Во всех известных нам примерах уравнения в частных производных, интегрируемые с помощью МОЗР, редуцируются к ОДУ Р-типа. Уравнения, которые принято считать неинтегрируемыми с помощью МОЗР (например, на основании численных экспериментов, в

которых две уединенные волны взаимодействуют иначе, чем солитоны), редуцируются к ОДУ, не принадлежащим к Р-типу. Чтобы избежать недоразумений, мы еще раз подчеркнем, что вопрос состоит не в том, принадлежит или нет ОДУ к списку из шести уравнений Пенлеве; важно знать, имеет ли оно Р-тип (т. е. отсутствие подвижных критических точек).

Эти примеры показывают, что, по всей видимости, гипотеза срабатывает. Следуя работе [23], мы набросаем частичное доказательство этой гипотезы, показывающее, почему она должна работать. Рассмотрим линейное интегральное уравнение (в частном случае $F(x, y) = F(x+y)$)

$$K(x, y) = F(x+y) + \int_x^\infty K(x, z) N(x;\ z, y)\, dz, \quad y \geqslant x. \tag{3.7.5a}$$

Потребуем, чтобы F удовлетворяла линейному ОДУ, обращалась в нуль при больших положительных значениях аргумента и N зависела от F по известному закону. (Примеры зависимости N от F были приведены в разд. 3.6.) Мы хотим показать, что любое решение линейного интегрального уравнения (3.7.5a) должно обладать свойством Пенлеве. Если при этом K также удовлетворяет некому ОДУ, то семейство решений этого ОДУ, полученных с помощью (3.7.5a), также обладает свойством Пенлеве. Таким образом, связь между ОДУ Р-типа и уравнениями, решаемыми с помощью МОЗР, непосредственно следует из линейного интегрального уравнения (3.7.5a).

Схема доказательства такова (подробности можно найти в [23]):

(i) F удовлетворяет линейному ОДУ и поэтому не имеет подвижных особенностей.

(ii) Если функция F убывает достаточно быстро при увеличении аргумента, то применима теория Фредгольма. Из (3.7.5a) следует, что

$$K(x, y) = F(x+y) + \int_x^\infty F(x+z) \frac{D_1(x;\ z.\ y)}{D_2(x)}\, dz, \tag{3.7.13}$$

где D_1 и D_2 — целые функции своих аргументов. Поэтому все особенности K возникают из неподвижных особенностей F или из подвижных нулей D_2. Но функция D_2 является аналитической, поэтому эти подвижные сингулярности должны быть полюсами.

(iii) Таким образом, функция K — решение линейного интегрального уравнения — обладает свойством Пенлеве.

Это доказательство связывает свойство Пенлеве с линейным интегральным уравнением. Мак-Леод и Ольвер [372] дали ана-

логичное доказательство. Но связь с МОЗР можно получить, отправляясь и от другой точки зрения. Флашка [157] и Флашка, Ньюэлл [163] воспользовались задачей рассеяния и уравнением эволюции волновой функции по времени. Результаты Флашки формулируются довольно просто.

(i) В разд. 1.2 обсуждалось, что условие совместности задачи рассеяния и уравнения эволюции

$$Lv = \lambda v, \qquad V_t = Mv$$

приводят к системе нелинейных уравнений в частных производных, интегрируемой с помощью МОЗР, которую можно представить в лаксовом виде

$$[L, M] + L_t = 0. \tag{3.7.14}$$

(ii) Стационарные решения системы (3.7.14), в том числе N-солитонные решения и N-фазные квазипериодические удовлетворяют коммутационному соотношению вида

$$[L, B] = 0. \tag{3.7.15}$$

(iii) Автомодельные решения системы (3.7.14) удовлетворяют другому коммутационному соотношению

$$[L, B] = L. \tag{3.7.16}$$

Практическая ценность соотношения (3.7.15) состоит в том, что оно позволяет свести задачу к изучению некоторого алгебраического уравнения и найти его явное решение, воспользовавшись теорией функций на алгебраических кривых. Пока не известно, как с такой же эффективностью воспользоваться алгебраической природой представления (3.7.16). Ниже в этом разделе мы кратко обсудим, как Флашке и Ньюэллу удалось провести анализ уравнения P_{II} и воспользоваться концепцией деформаций, сохраняющих матрицу монодромии.

3.7. с. Анализ особых точек. Пусть дано нелинейное ОДУ. Как определить, имеют ли его решения подвижные критические точки? Если рассматриваемое уравнение имеет второй порядок и приведено к виду (3.7.4), то можно сравнить его со списком 50 уравнений, найденных Пенлеве и др., приведенным в гл. 14 работы [238]. Если это уравнение содержится в списке, то оно P-типа; если нет, то вполне возможно, что существует простая замена, преобразующая уравнение к виду, приведенному в списке. Поэтому мы рекомендуем определять природу особых точек, допускаемых уравнением (см. упр. 8).

Если уравнение имеет третий порядок или выше, то нам остается только локальный анализ особых точек. Здесь имеется два подхода. Первый — это α-метод Пенлеве, подробно описан-

ный в [238]. Второй, близкий к методу Ковалевской, описан Абловицем, Рамани и Сигуром [23]; мы проиллюстрируем его ниже. Следует отметить, что при использовании обоих методов можно потерять существенно особые точки; для них требуется отдельный анализ.

Пример 1. Рассмотрим семейство ОДУ

$$w'' = z^m w + 2w^3. \tag{3.7.17}$$

(Если $m = 0$, то уравнение (3.7.17) интегрируется в эллиптических функциях. Если $m = 1$, то это P_{II}. При $m \neq 0$, 1 мы обнаружим подвижные критические точки.) В методе анализа имеется три основных этапа. На первом следует определить поведение главной части решения в окрестности подвижной особенности в точке z_0. Поэтому мы предположим, что при $z \to z_0$

$$w(z;\ z_0) \sim \frac{a}{(z - z_0)^p}.$$

В этом случае главными членами в (3.7.17) являются первый и последний, и $p = 1$, $a^2 = 1$. Если выбрать $a = 1$, то при $z \to z_0$ получим

$$w \sim (z - z_0)^{-1} + o\left(|z - z_0|^{-1}\right). \tag{3.7.18}$$

Если бы p не было целым, то мы получили бы (подвижную) алгебраическую точку ветвления, и уравнение не относилось бы к Р-типу. (Но даже в этом случае мы рекомендуем продолжить вычисления, так как они могут подсказать преобразование, приводящее уравнение к Р-типу.) Если имеется два или более корней p, то для каждого из них необходим отдельный анализ.

Так как уравнение (3.7.17) имеет второй порядок, то его общее решение зависит от двух постоянных интегрирования. Одна из них есть z_0. Следует продолжить разложение решения w (3.7.18) в ряд, пока не появится другая постоянная интегрирования. Второй этап — это определение степени $(z - z_0)$, начиная с которой может появиться вторая постоянная интегрирования. Чтобы это сделать, положим $\xi = z - z_0$ и подставим

$$w(z) \sim \xi^{-1} + \beta\xi^{-1+r} \tag{3.7.19}$$

в главные части уравнения (3.7.17). В ведущем порядке по β получим соотношение

$$\beta\left[(r-1)(r-2) - 6\right]\xi^{r-3} \sim 0,$$

представляющее собой алгебраическое уравнение для r. Один корень этого уравнения всегда равен -1, что соответствует произволу в выборе z_0. В данном случае второй корень — это $r = 4$ (если бы второй корень не оказался целым вещественным чис-

лом, то это указывало бы на наличие подвижных точек ветвления). Отсюда ясно, до каких степеней следует строить разложение решения:

(3.7.20) $$w(z) \sim \xi^{-1} + a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \ldots .$$

Мы ожидаем, что постоянные (a_0, a_1, a_2) полностью определятся, и вторая постоянная появится, когда мы дойдем до определения a_3.

Последний этап — это определение коэффициентов разложения (3.7.20). Подставив его в уравнение (3.7.17) и собрав коэффициенты при одинаковых степенях ξ, получим

(3.7.21) $$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{-z_0^m}{6}, \quad a_2 = \frac{mz_0^{m-1}}{4}.$$

При $O(\xi^3)$ получим

(3.7.22) $$0 = 0 \cdot a_3 = \frac{1}{2} m(m-1) z_0^{m-2}.$$

Имеется две возможности.

(i) Если $m = 0$ или 1, то (3.7.22) выполнено при любом значении постоянной a_3, которая при этом становится второй постоянной интегрирования. Воспользовавшись методом Пенлеве [238, раз. 14.41], можно показать, что (3.7.20, 21) действительно представляют собой начало разложения общего решения уравнения (3.7.17) в ряд Лорана в окрестности подвижного полюса. В этом случае нет никаких подвижных критических точек алгебраического характера.

(ii) Если $m \neq 0$ или 1, то соотношению (3.7.22) невозможно удовлетворить никаким выбором постоянной a_3. В этом случае разложение (3.7.20) следует дополнить логарифмическими членами:

(3.7.23) $$w(z) \sim \xi^{-1} + a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + (a_3\xi^3 + b_3\xi^3 \ln \xi) + \ldots .$$

Теперь соотношения (3.7.21) по-прежнему сохраняют свой вид, а в порядке $O(\xi^3)$ постоянная b_3 определяется по произвольной постоянной a_3. Разложение (3.7.23) указывает на существование подвижной логарифмической точки ветвления z_0. Таким образом, если $m \neq 0$ или 1, то уравнение не относится к P-типу (отметим, что следующие члены разложения имеют более высокие степени ξ и $\ln \xi$).

Пример 2. Нелинейное уравнение Шрёдингера в размерности $n+1$ (см. разд. 4.3) — это

(3.7.24) $$i\varphi_t + \nabla^2\varphi - 2|\varphi|^2\varphi = 0.$$

Точная редукция к ОДУ получится, если положить

$$r^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2, \quad \varphi = R(r)\exp(i\lambda t); \tag{3.7.25}$$

при этом

$$R'' + \frac{n-1}{r} R' = 2|R|^2 R + \lambda R. \tag{3.7.26}$$

(Если к тому же мы потребуем вещественность R при вещественных r, то нелинейный член в (3.7.26) перепишется в виде $2R^3$; в результате мы получим одно уравнение второго порядка, и можно проверить, не входит ли оно в список из книги [238]. Но для того, чтобы показать, как следует анализировать системы комплексных уравнений, мы рассмотрим более общий случай.) Нелинейный член в (3.7.26) не позволяет рассматривать $R(r)$ как аналитическую функцию. Вместо уравнения (3.7.26) мы рассмотрим систему

$$\begin{aligned} R'' + \frac{n-1}{r} R' &= 2R^2 S + \lambda R, \\ S'' + \frac{n-1}{r} S' &= 2S^2 R + \lambda S. \end{aligned} \tag{3.7.27}$$

Если λ вещественно, $S = R^*$ при вещественных r, то (3.7.27) содержит (3.7.26). В любом случае (3.7.27) является системой ОДУ четвертого порядка, и мы проведем анализ особых точек ее решения.

Шаг 1. В главном порядке все алгебраические особенности решений системы (3.7.27) имеют вид

$$R \sim \frac{\alpha}{r - r_0}, \qquad S \sim \frac{1}{\alpha(r - r_0)}, \tag{3.7.28}$$

где (r_0, α) — две (из четырех) произвольные постоянные интегрирования.

Шаг 2. Для того чтобы найти степени, при которых появляются две оставшиеся постоянные интегрирования, положим $x = r - r_0$,

$$R \sim \alpha x^{-1} + C_1 x^{-1+p}, \qquad S = \frac{1}{\alpha} x^{-1} + C_2 x^{-1+p}$$

и подставим это в главные члены уравнений (3.7.27), сохранив лишь члены, линейные по C_1, C_2. В результате для определения p получим полином четвертой степени, имеющий корни $(-1, 0, 3, 4)$. Первые два корня отвечают свободе в выборе постоянных

r_0, α. Последние два корня определяют степени, начиная с которых могут появиться две оставшиеся постоянные интегрирования.

Шаг 3. Если (3.7.28) представляет первые члены разложения решения в ряд Лорана вблизи подвижного полюса x_0, то

$$\frac{R}{\alpha} \sim x^{-1} + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \quad (3.7.29)$$
$$\alpha S \sim x^{-1} + b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3.$$

Подставим это разложение в (3.7.27) и будем рекуррентно вычислять коэффициенты:

$$a_0 = b_0 = -\frac{n-1}{6r_0},$$
$$a_1 = b_1 = -\frac{\lambda}{6} - \frac{(n-1)(n-7)}{36r_0^2},$$
$$a_2 + b_2 = \frac{\lambda(n-1)}{6r_0} - \frac{(n-1)(4n^2-35n+85)}{108r_0^3},$$

причем на $(a_2 - b_2)$ нет соотношений, это третья постоянная интегрирования. (Пока все хорошо!) Но в следующем порядке мы получим

$$0 \cdot (a_3 + b_3) = (n-1)(^*), \quad (3.7.30)$$

где $(^*) \neq 0$. Если $n = 1$ (а этот случай, как мы знаем, интегрируется с помощью МОЗР), то соотношение (3.7.30) выполнено тождественно при любом значении четвертой постоянной интегрирования $(a_3 + b_3)$, и решение не имеет подвижных точек ветвления. Если $n \neq 1$, то (3.7.30) приводит к противоречию, избежать которого можно, дополнив разложение (3.7.29) логарифмическими членами в порядке $O(x^3)$. Эти логарифмические члены породят бесконечную последовательность усложняющихся членов в высших порядках разложения. Система (3.7.27) не является уравнением P-типа при $n \neq 1$.

Если гипотеза о свойстве Пенлеве верна, то нелинейное уравнение Шрёдингера (3.7.24) может быть проинтегрировано с помощью МОЗР только в размерности $1 + 1$.

Эти два примера вовсе не исчерпывают все возможные нюансы анализа особых точек. Читатель, интересующийся подробностями, может обратиться к работе [23].

3.7. d. Глобальные свойства трансцендентов Пенлеве. Кроме своего эвристического значения в качестве теста для уравнений в частных производных связь между МОЗР и ОДУ P-типа может быть использована для получения информации о глобальных свойствах трансцендентов Пенлеве. Например, в разд. 3.6

мы видели, что если $K(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$K(x, y) = r \operatorname{Ai}\left(\frac{x+y}{2}\right) + \tag{3.7.31}$$

$$+ \sigma \frac{r^2}{4} \int_x^\infty \int_x^\infty K(x, z) \operatorname{Ai}\left(\frac{s+z}{2}\right) \operatorname{Ai}\left(\frac{s+y}{2}\right) dz\, ds, \qquad y \geqslant x,$$

где $\operatorname{Ai}(z)$ — функция Эйри, $\sigma = \pm 1$, r — параметр, то $w(z; r) = K(z, z; r)$ удовлетворяет частному случаю уравнения $\mathrm{P_{II}}$;

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = zw + 2\sigma w^3, \quad \sigma = \pm 1. \tag{3.7.32}$$

с граничным условием при $z \to +\infty$

$$w(z; r) \sim r \operatorname{Ai}(z). \tag{3.7.33}$$

Уравнение (3.7.31) представляет собой точную линеаризацию однопараметрического семейства решений ОДУ (3.7.32). В этом семействе содержатся все ограниченные решения уравнения (3.7.32).

Глобальное существование этого семейства решений можно доказать непосредственно из (3.7.31). Перепишем (3.7.31) в сокращенном виде:

$$[I - \sigma r^2 \tilde{A}(z)]\, K = r \operatorname{Ai}; \tag{3.7.34}$$

при этом факт существования ограниченного решения уравнения (3.7.32) следует непосредственно из ограниченности оператора $[I - \sigma r^2 \tilde{A}(z)]^{-1}$. Здесь мы приведем лишь результаты исследования (подробности можно найти в работах [27], [206], [23]).

(i) $\tilde{A}(z)$ — положительный оператор. Поэтому при $\sigma = -1$ уравнения (3.7.32, 33) имеют единственное ограниченное решение при всех вещественных z и вещественных r.

(ii) L_2-норма оператора $\tilde{A}(z)$ не превышает 1 для любого вещественного z. Поэтому если $\sigma = +1$, то уравнения (3.7.32, 33) имеют единственное ограниченное решение при всех вещественных z, если $-1 < r < 1$.

(iii) При $\sigma = +1$, $|r| = 1$ возникает критическая ветвь решения уравнения (3.7.32), стремящаяся к нулю при $z \to +\infty$ и алгебраически растущая $(2w^2 + z \sim 0)$ при $z \to -\infty$.

(iv) Если $\sigma = +1$, $r > 1$, то найдется такое вещественное $z_0(r)$, то оператор $[I - \sigma r^2 \tilde{A}(z)]^{-1}$ существует только при $z > z_0$. Мы подозреваем (но это не доказано), что $w(z; r)$ имеет полюс в точке z_0.

(v) Согласно аргументации, приведенной после формулы (3.7.5а), единственными особенностями этого семейства решений на комплексной плоскости z являются полюсы. (Разумеется, этот результат впервые был получен Пенлеве.)

Эта тема не заканчивается доказательством существования. Так же как уравнение Эйри

$$\frac{d^2w}{dz^2} = zw$$

является представителем простой линейной точки поворота, так и уравнение (3.7.32) является представителем класса простых нелинейных точек поворота. Так, например, Хаберман [193] показал, что слаболинейное решение уравнения

$$\frac{d^2u}{dz^2} + k(\varepsilon z)\,u = \varepsilon\beta(\varepsilon z)\,u^3, \quad \varepsilon \ll 1, \tag{3.7.35}$$

в окрестности нуля функции $k(\varepsilon z)$ аппроксимируется (асимптотически) решением уравнения (3.7.32). Таким образом, качественное поведение такого решения уравнения (3.7.35) является слабонелинейным и экспоненциально убывающим при $k < 0$, слабонелинейным и осциллирующим при $k > 0$, но существенно нелинейным в переходной области, где оно аппроксимируется решением уравнения (3.7.32). Это побуждает нас более детально изучить решения уравнения (3.7.32), так как через них производится сшивка двух областей, в которых решения уравнения (3.7.35) имеют качественно различное поведение. Таким образом, мы приходим к задаче о *связи асимптотик*:

Задана асимптотика ограниченного вещественного решения уравнения (3.7.32) при $z \to +\infty$; найти асимптотику этого же решения при $z \to -\infty$.

Решения этой задачи было бы вполне достаточно, чтобы связать две области слабой нелинейности решения уравнения (3.7.35).

Совершенно очевидно, что задача о связи асимптотик является глобальной и не может быть решена с помощью локального анализа уравнения (3.7.32). Напомним (разд. 1.7), что для почти всех гладких быстроубывающих начальных данных для уравнения мКдФ (3.7.9) асимптотика решения ($t \to \infty$) представлена тремя областями с различным качественным поведением:

(i) Для $x \gg t^{1/3}$ решение экспоненциально убывает (по x).

(ii) Для $|x| = O(t^{1/3})$ решение является автомодельным и удовлетворяет уравнению (3.7.32).

(iii) При $-x \gg t^{1/3}$ решение осциллирует.

Сигур и Абловиц [457] нашли решение задачи о связи асимптотик для уравнения (3.7.32) с помощью переходов к пределам в областях (i) и (iii) асимптотического решения уравнения мКдФ. Результаты можно сформулировать следующим образом.

Имеется однопараметрическое (с параметром r) семейство ограниченных вещественных решений уравнения (3.7.32). Эти

решения экспоненциально убывают (при увеличении z) при $(2\sigma w^2 + z) > 0$ и осциллируют при $(2\sigma w^2 + z) < 0$. Типичное решение показано на рис. 3.2. При $z \to +\infty$ все эти решения имеют асимптотику (3.7.33) с произвольным вещественным r при $\sigma = -1$ и $-1 < r < 1$ при $\sigma = +1$. Без потери общности можно

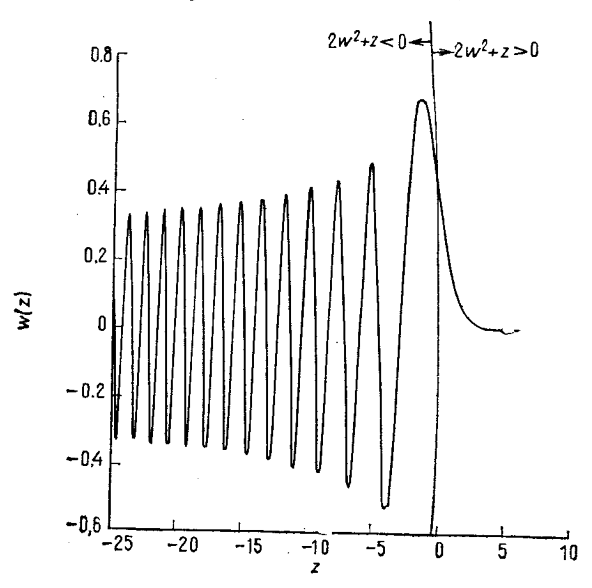


Рис. 3.2. Характерный вид решения уравнения (3.7.32) с граничными условиями (3.7.33). Здесь $\sigma = +1$, $r = 0$. На рисунке показана разделяющая парабола $2w^2 + z = 0$.

считать $r \geqslant 0$. При $z \to -\infty$ эти решения имеют формальное асимптотическое разложение

$$w(z) \sim d(-z)^{-1/4} \sin\theta + O\left(|z|^{-7/4}\right), \tag{3.7.36}$$

где

$$\theta \sim \frac{2}{3}(-z)^{2/3} - \frac{3}{2}\sigma d^2 \ln(-z) + \bar{\theta} + O\left(|z|^{-3/2}\right).$$

Постоянные $d(\geqslant 0)$ и $\bar{\theta}$ зависят от r, σ по следующему закону:

$$\begin{aligned} d^2 &= -\frac{\sigma}{\pi}\ln(1 - \sigma r^2), \\ \bar{\theta} &= \frac{\pi}{4} - \sigma \arg\left\{\Gamma\left(1 - \frac{id^2}{2}\right)\right\} - \frac{3}{2}\sigma d^2 \ln 2, \end{aligned} \tag{3.7.37}$$

их графики приведены на рис. 3.3. Других ограниченных вещественных решений уравнение (3.7.32) не имеет.

Рассмотрим теперь общий случай уравнения P_{II}:

$$\frac{d^2w}{dz^2} = zw + 2w^3 + \alpha.$$

Эро [35], Боити и Пэмпинели [72] воспользовались преобразованием Бэклунда для уравнения КдФ в автомодельном виде и

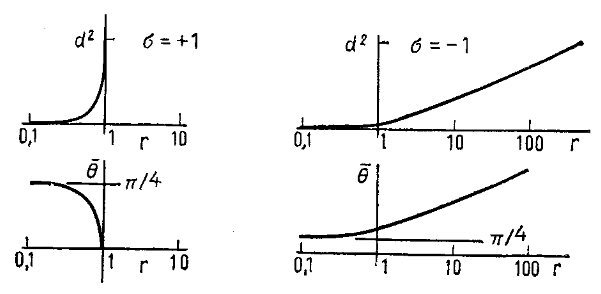


Рис. 3.3. Асимптотические (при $z \to -\infty$) амплитуды (d) и фазы ($\bar{\theta}$) для уравнения P_{II} как функции начальной амплитуды (см. (3.7.37)).

вывели рекуррентное соотношение между решениями уравнения P_{II}:

$$(3.7.38) \qquad \tilde{w}(z, \alpha+1) = -w(z, \alpha) - \frac{2\alpha+1}{2w^2(z, \alpha) + z + 2w_z(z, \alpha)}.$$

Это соотношение было ранее получено из других соображений в работе [337]. Кроме того, уравнение P_{II} допускает преобразование симметрии

$$(3.7.39) \qquad w(z, \alpha) \to -w(z, -\alpha).$$

Если воспользоваться (3.7.38), (3.7.39) и любым точным решением уравнения P_{II}, то можно построить бесконечную серию решений $w(z, \alpha \pm n)$, $n = 0, 1, 2 \ldots$. Начав с тривиального решения ($w(z, 0) = 0$), Эро построил таким способом все рациональные решения уравнения КдФ [35] (см. разд. 3.4).

Однопараметрическое семейство ограниченных вещественных решений уравнения P_{II} при $\alpha = 0$ порождает однопараметрическое семейство вещественных решений уравнения P_{II} при любом целом α. Все эти решения ограничены при $z \to +\infty$, но, как мы покажем, среди них нет решений, ограниченных на всей вещественной оси z. Иначе говоря, для целых значений α уравнение P_{II} не имеет *никаких* ограниченных вещественных решений.

Начнем со случая $\alpha = 0$, и пусть $0 \leqslant r < 1$; в этом случае ограниченное вещественное решение качественно ведет себя так же, как решение, показанное на рис. 3.2. Из рисунка видно, что знаменатель в формуле (3.7.38) имеет отрицательный знак в точке пересечения графика решения с параболой $(2w^2 + z) = 0$,

а при $z \to +\infty$ знак знаменателя положительный. Таким образом, знаменатель обращается в нуль в некоторой промежуточной точке. Эта точка будет полюсом решения $w(z, 1)$. (Аналогично рассматривается случай $r < 0$.) Таким образом, любое вещественное решение уравнения P_{II} при $\alpha = 1$, ограниченное при $z \to +\infty$, имеет по крайней мере один полюс в некоторой конечной точке z.

Пусть α — любое положительное целое число. Если $w(z, \alpha)$ имеет полюс, то мы покажем, что его также имеет решение $w(z, \alpha + 1)$, построенное по формуле (3.7.38). Пусть самый правый полюс функции $w(z, \alpha)$ расположен в точке z_0. В окрестности z_0 разложение решения $w(z, \alpha)$ в ряд Лорана имеет либо вид

(3.7.40a) $$w(z, \alpha) = w_+ \sim (z - z_0)^{-1} - \frac{z_0}{6}(z - z_0) - \frac{\alpha + 1}{4}(z - z_0)^2 + \ldots,$$

либо вид

(3.7.40b) $$w(z, \alpha) = w_- \sim -(z - z_0)^{-1} + \frac{z_0}{6}(z - z_0) - \frac{\alpha - 1}{4}(z - z_0)^2 + \ldots .$$

В этих случаях знаменатель в (3.7.38) принимает вид

(3.7.41a) $$2w_+^2 + z + 2\partial_z(w_+) \sim -(2\alpha + 1)(z - z_0)$$

или

(3.7.41b) $$2w_-^2 + z + 2\partial_z(w_-) \sim 4(z - z_0)^{-2}.$$

Для $w_-(z, \alpha)$ первый член в правой части формулы (3.7.38) имеет полюс в точке $z = z_0$, а второй член в этой точке равен нулю. Таким образом, точка z_0 является полюсом решения $w_-(z, \alpha + 1)$.

Для $w_+(z, \alpha)$ при $\alpha > 0$ знаменатель в (3.7.38) отрицателен в точках $z_0 + \varepsilon$ $(0 < \varepsilon \ll 1)$ и положителен при $z \to +\infty$, поэтому он обязан обращаться в нуль в некоторой промежуточной точке. Но точка z_0 является по предположению самым правым полюсом функции $w(z, \alpha)$, поэтому в нуле знаменателя будет полюс решения $w_+(z, \alpha + 1)$. Таким образом, при $\alpha > 0$, если $w(z, \alpha)$ убывает при $z \to +\infty$ и имеет полюс в некоторой конечной точке z_0, то такими же свойствами обладает решение $w(z, \alpha + 1)$. Поскольку $w(z, 1)$ имеет полюс, то его имеет и $w(z, n)$, n — целое положительное число. Согласно (3.7.39), полюс в той же точке имеет решение $w(z, -n)$.

Здесь мы остановились только на уравнении P_{II}, но совершенно ясно, что остальные уравнения Пенлеве также можно

исследовать этим методом. Например, преобразования Бэклунда для P_I были найдены в работе [73], для P_{III}, P_{IV}, P_V в [35], для P_{IV} в [165]. Преобразование (3.7.38) для P_{II} и некоторые результаты для других уравнений были ранее другими методами получены советскими математиками (Громак, Еругин, Лукашевич и Яблонский, обзор советских работ и дополнительную библиографию можно найти в статье Еругина [149]).

С другой стороны, Абловиц, Рамани и Сигур [23] нашли линейные интегральные уравнения, обслуживающие ОДУ P_{III} и P_{IV}. Там же на основе линейного интегрального уравнения были построены сходящиеся ряды для семейства решений уравнения P_{III}. Эти ряды оказались эквивалентными рядам, построенным ранее с помощью совершенно другого подхода в работе Мак-Коя, Трэйси и Ву [363]. Авторам этой работы удалось установить формулы связи асимптотик для P_{III}, аналогичные (3.7.37) для P_{II}.

Уравнение P_{III} возникает в скэйлинговом пределе корреляционной функции спинов в двумерной модели Изинга; это обстоятельство послужило стимулом работы Мак-Коя, Треэси, Ву и Бароша [508]. Хотя их работа никак не связана с МОЗР, но в некоторых аспектах эти подходы весьма близки. Поэтому напрашивается вопрос: имеется ли какая-нибудь связь двумерной модели Изинга и МОЗР?

Серия весьма важных работ Сато, Мивы и Джимбо [444] была связана с: (i) деформациями линейных дифференциальных уравнений, сохраняющими матрицу монодромии; (ii) голономной квантовой теорией поля; (iii) скэйлинговым пределом двумерной модели Изинга; (iv) теорией групп Клиффорда; (v) МОЗР (см. также [256], [488] и исчерпывающий обзор Джимбо, Мива, Мори, Сато [243]). Идеи, лежащие в основе этих работ, мы опишем, опираясь на близкую по духу работу Флашки и Ньюэлла [163], в которой подчеркивалась связь с трансцендентами Пенлеве.

Нам понадобится ряд определений. Рассмотрим (матричную) систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = y \sum^{N} \frac{A_j}{x - a_j}, \qquad (3.7.42)$$

где A_j — постоянные $m \times m$-матрицы, а x является комплексной переменной. Решение уравнения (3.7.42) обычно является многозначной функцией x; обозначим через $Y(x)$ однозначную ветвь фундаментального решения. Если точка x обойдет одну из сингулярных точек a_j по замкнутому контуру, то полученная функция $\tilde{Y}(x)$, как правило, будет отличаться от своего исходного

значения, но непременно имеется линейная связь

$$\tilde{Y}(x) = M_j Y(x). \tag{3.7.43}$$

Матрицу M_j называют *матрицей монодромии* точки a_j (см. разд. 2.3). Вопрос о деформациях, сохраняющих матрицы монодромии, формулируется следующим образом. Допустим, что точке a_j разрешено двигаться по комплексной плоскости; как при этом следует изменять матрицу A_j, чтобы матрица монодромии (M_j) оставалась постоянной? В простейшем нетривиальном случае, когда является 2×2-матрицами, $N = 4$ и позволено двигаться только одной сингулярности, эта задача сводится к решению уравнения P_{VI}! Другими словами, уравнение P_{VI} можно рассматривать как условие на деформации коэффициентов линейной системы, при которых сохраняются матрицы монодромии [1]).

В рассмотренном примере ОДУ имеет только регулярные особые точки. В работе Флашки и Ньюэла основное внимание было уделено нерегулярным особым точкам, когда матрица монодромии заменяется на *множители Стокса.*

В некотором смысле мы все время имели дело с теорией деформаций линейных уравнений. Например, в гл. 1 мы рассматривали линейный дифференциальный оператор

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

и задавали вопрос: как следует изменять коэффициентную функцию $q(x)$ с изменением внешнего параметра (t), чтобы спектр оператора L оставался инвариантным? Ответ состоит в том, что функция $q(x, t)$ должна удовлетворять уравнению КдФ или одному из его высших аналогов (1.5.21).

Таким образом, имеется еще один путь рассмотрения МОЗР и трансцендентов Пенлеве с точки зрения теории деформаций линейных дифференциальных уравнений. При этом основное внимание направлено на прямую задачу рассеяния в МОЗР и предполагается, что задача рассеяния для мКдФ должна быть преобразована к автомодельной форме. Преобразование

$$z = \frac{x}{(3t)^{1/3}}, \quad \chi = \zeta (3t)^{1/3}, \quad q(x, t) = (3t)^{-1/3} w(z),$$

$$V_i(x, t, \zeta) = \varphi_i(z, \chi)$$

[1]) Вопрос о деформациях, сохраняющих матрицу монодромии, был поставлен и решен в классических работах Шрезингера и Ганье, там же была обнаружена связь с уравнениями Пенлеве. По этому поводу см. [11*] стр. 283. — *Прим. перев.*

приводит в результате к системе линейных ОДУ

$$\begin{aligned}\partial_\chi \varphi_1 &= -i(4\chi^2+z+2w^2)\varphi_1+(4\chi w+2iw_z)\varphi_2,\\ \partial_\chi \varphi_2 &= (4\chi w-2iw_z)\varphi_1+i(4\chi^2+z+2w^2)\varphi_2.\end{aligned} \tag{3.7.44}$$

Множители Стокса решений системы (3.7.44) в окрестности нерегулярных особых точек не зависят от z только в том случае, если $w(z)$ удовлетворяет уравнению $\mathrm{P_{II}}$. Зная свойства матриц монодромии и расположение особых точек, Флашка и Ньюэлл сумели переформулировать задачу в терминах сингулярных линейных интегральных уравнений. Они не рассматривали вопроса о существовании решений этих уравнений. В некоторых частных случаях интегральное уравнение воспроизводит известные результаты.

Подведем итоги этого раздела. Имеется тесная связь между уравнениями в частных производных, интегрируемыми методом обратной задачи рассеяния, и ОДУ P-типа. Эту связь можно с успехом использовать как при изучении уравнений в частных производных, так и ОДУ. При изучении ОДУ (в особенности $\mathrm{P_{II}}$) оказалось, что почти каждый аспект МОЗР (прямая задача рассеяния, обратная задача рассеяния, преобразование Бэклунда и т. д.) имеет важное значение.

3.8. Возмущения и устойчивость солитонов и уединенных волн относительно поперечных возмущений. В этом разделе мы кратко обсудим, какое влияние оказывают малые возмущения (например, поперечные) на солитоны и уединенные волны. Этому очень естественному вопросу посвящено довольно много работ.

Здесь мы рассмотрим задачи следующих типов: (a) действие диссипативных возмущений на солитон, (b) действие диссипации на уединенную волну и (c) действие поперечных возмущений на солитон (аналогично можно рассматривать задачу об устойчивости уединенных волн относительно поперечных возмущений). Подразделы можно читать независимо друг от друга.

Что касается теории возмущения для солитонов, то на этот счет имеется довольно много методов, развитых на основе МОЗР (см., например, [260], [267], [255], [272]). Методы Каупа, Ньюэла [267] и Карпмана, Маслова [255] позволяют вывести возмущенные уравнения, описывающие эволюцию данных рассеяния, используя теорию возмущений соответствующей линейной задачи рассеяния. Исходные зависимые переменные восстанавливаются по решению обратной задачи рассеяния (т. е. линейного интегрального уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко). Отправляясь от другой точки зрения, Кинер и Мак-Лафлин [272] развили теорию возмущений, воспользовавшись функ-

цией Грина для решения линеаризованного уравнения, отвечающего исходному уравнению более высокого порядка. Но для вычисления функции Грина необходимо прибегнуть к МОЗР.

С другой стороны, хорошо известно, что существует весьма общая теория возмущений для частных решений нелинейных уравнений (таких, как солитоны, бризеры, уединенные волны, периодические решения). Она применялась для многих задач (см., например, [478], [1], [245], [505], [543], [252], [509], [279], [286], [282]). В этом разделе мы покажем, как эти подходы применяются к задачам с солитонами и уединенными волнами. Здесь мы вовсе не пытаемся сделать сколько-нибудь исчерпывающий обзор существующих теорий возмущений для солитонов или уединенных волн.

Основная идея теории возмущений состоит в следующем. Мы изучаем решение возмущенного нелинейного уравнения весьма общего вида

$$(3.8.1) \qquad K(q, q_t, q_x, \ldots) = \varepsilon F(q, q_x, \ldots), \quad 0 < \varepsilon \ll 1,$$

где K и F — нелинейные функции от q, q_x, ... Невозмущенное уравнение ($\varepsilon = 0$)

$$(3.8.2) \qquad K(q^{(0)}, q_t^{(0)}, q_x^{(0)}, \ldots) = 0$$

имеет решение $q^{(0)}$. В качестве $q^{(0)}$ можно брать как солитонное решение, так и уединенную волну (а также бризер или более сложное солитонное решение). Мы запишем это решение явно, указав естественные «быстрые» и «медленные» переменные:

$$(3.8.3) \qquad q^{(0)} = \hat{q}^{(0)}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m, T : P_1, P_2, \ldots, P_N).$$

В (3.8.3) θ_i ($i = 1, \ldots, m$) обозначают быстрые переменные, $T = \varepsilon t$ —медленная переменная, P_l ($l = 1, \ldots, N$) — параметры, зависящие от медленных переменных (в некоторых задачах может потребоваться введение медленной переменной $X = \varepsilon x$; см., например, [506], [1]). Во многих задачах для невозмущенного решения можно ограничиться одной быстрой переменной $\theta = x - P_1 t$. Обобщим θ так, чтобы $\partial\theta/\partial_x = 1$, $\dfrac{\partial\theta}{\partial t} = -P_1$, и воспользуемся $P_1 = P_1(T)$ для исключения секулярных членов. В этом случае решение (3.8.3) мы будем называть квазистационарным и записывать $q = \hat{q}(\theta, T, \varepsilon)$. Для $P_1, \ldots, P_N$ мы выведем уравнение, опираясь на условия вроде условия исключения секулярных членов (должно быть в точности N независимых условий). Некоторые из них возникают из тождества Грина. Предположим, что $\hat{q}$ выражается в следующем виде:

$$\hat{q} = \hat{q}^{(0)} + \varepsilon \hat{q}^{(1)} + \ldots$$

(после введения подходящих переменных θ_i, T и т. д.). Тогда (3.8.2) представляет главный порядок задачи, а в следующем порядке получим (если предположить, что K зависит от производных по времени только первого порядка)

$$L\left(\partial_{\theta_i},\ \hat{q}^{(0)}\right)\hat{q}^{(1)} = F\left(\hat{q}^{(0)}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_t}\, q_T\,\big|_{q=\hat{q}^{(0)}} \equiv \hat{F}. \tag{3.8.4}$$

Здесь $L(\partial_{\theta^i},\ \hat{q}^{(0)})u = 0$ — линеаризация уравнения $K(q,\ q_t,\ q_x,\ \ldots) = 0$ после перехода от (x, t) к координатам θ_i. Обозначим v_i ($i = 1, \ldots, M$) решения однородной сопряженной задачи с нулевыми граничными условиями (т. е. $v_i \to 0$ при $|\theta| \to \infty$):

$$L^A v_i = 0, \quad i = 1, \ldots, M, \quad M \leqslant N,$$

где L^A — оператор, сопряженный к L. Левая часть равенства

$$(L\hat{q}^{(1)})\, v_i - (L^A v_i)\, \hat{q}^{(1)} = \hat{F} v_i \tag{3.8.5}$$

всегда является дивергенцией (теорема Грина). Интегрирование этого равенства приводит к секулярным условиям. Эти секулярные условия позволяют вычислить поправку $\hat{q}^{(1)}$, удовлетворяющую подходящим граничным условиям (т. е. $\hat{q}^{(1)}$ ограничена при $|\theta| \to \infty$). Имеется определенная свобода в выборе решения $\hat{q}^{(1)}$. Дело в том, что частично решение $\hat{q}^{(1)}$ можно включить в главный порядок $\hat{q}^{(0)}$, немного сдвинув его параметры. Можно добиться единственности решения $\hat{q}^{(1)}$, если наложить дополнительные условия, отражающие специфику задачи. Для вычисления высших порядков $\hat{q}^{(N)}$ препятствий не возникает.

Из этого метода следует:

(i) Полученное разложение, вообще говоря, не приближает решения равномерно на всей оси $|x| < \infty$ (см. [1], [267], [255], [282]).

(ii) В каждой области, где оно справедливо, мы получим квазистационарное решение, т. е. решение, зависящее только от θ_i и T.

(iii) Чтобы получить равномерно пригодное разложение решения на всей оси, следует произвести сшивку решения, полученного описанным методом, с нестационарным решением для больших $|\theta_i|$ (т. е. при $|\theta| \sim O(^1/_3)$).

В качестве примера применения этой общей схемы мы рассмотрим уравнение КдФ и «сильно нелинейные» уравнения КдФ со слабо диссипативным возмущением. С физической точки зрения это отвечает распространению солитонов в среде с медленно меняющимися параметрами [245]. Интересной особенностью решений этих уравнений является возникновение из-за диссипативных членов полочки за возмущенным солитоном (см. [323], [267], [255]).

3.8.а. Уравнение КдФ с затуханием. Пусть возмущенное уравнение КдФ имеет вид

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = -\varepsilon\gamma q, \tag{3.8.6}$$

где γ, ε — постоянные, $\gamma > 0$, γ имеет порядок 1 и $0 < \varepsilon \ll 1$. (Ниже приведен пример анализа конкретного уравнения и его возмущения. Такой анализ применим в гораздо более общей ситуации.) Солитонное решение невозмущенного уравнения ($\varepsilon = 0$) мы запишем в виде

$$q^{(0)} = 2\eta^2 \operatorname{sech}^2 \eta(\theta - \theta_0), \quad \frac{\partial\theta}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial\theta}{\partial t} = -4\eta^2. \tag{3.8.7}$$

Здесь η и θ_0 — произвольные параметры, которые могут зависеть от «медленного времени $T = \varepsilon t$. В предположении квазистационарности получим

$$-4\eta^2\hat{q}_\theta + 6\hat{q}\hat{q}_\theta + \hat{q}_{\theta\theta\theta} = -\varepsilon\gamma\hat{q} - \varepsilon\hat{q}_T. \tag{3.8.8}$$

Разложив $\hat{q}$ в ряд по ε, в главном порядке получим уравнение

$$-4\eta^2\hat{q}_\theta^{(0)} + 6\hat{q}_\theta^{(0)}\hat{q}^{(0)} + \hat{q}_{\theta\theta\theta}^{(0)} = 0 \tag{3.8.9}$$

и возьмем его решение в виде (солитон КдФ)

$$\hat{q}^{(0)} = 2\eta^2 \operatorname{sech}^2 \eta(\theta - \theta^{(0)}).$$

В порядке ε получим

$$\begin{aligned} \hat{L}\hat{q}^{(1)} &\equiv -4\eta^2\hat{q}_\theta^{(1)} + 6(\hat{q}^{(0)}\hat{q}^{(1)})_\theta + \hat{q}_{\theta\theta\theta}^{(1)} = \hat{F}^{(1)}, \\ \hat{F}^{(1)} &\equiv -\gamma\hat{q}^{(0)} - \hat{q}_T^{(0)} = -\gamma q^{(0)} - \frac{1}{\eta_T}\{2\hat{q}^{(0)} + (\theta - \theta^{(0)})\, q_\theta^{(0)}\} + \\ &\quad + \theta_T^{(0)} q_\theta^{(0)}. \end{aligned} \tag{3.8.10}$$

Функция $\hat{q}^{(0)}$ является подходящим (быстро убывающим при $|\theta| \to \infty$) решением задачи, сопряженной к $\hat{L}u = 0$, т. е.

$$\hat{L}^A\hat{q}^{(0)} = 0, \quad \hat{L}^A = 4\eta^2\partial_\theta - 6q^{(0)}\partial_\theta - \partial_\theta^3. \tag{3.8.11}$$

Условие совместимости

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{q}^{(0)}\hat{F}^{(1)}\, d\theta = 0 \tag{3.8.12}$$

приводит к

$$\frac{1}{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial T} = -\frac{2}{3}\gamma, \quad \text{или} \quad \eta(T) = \eta(0)\exp\left(-\frac{2}{3}\int_0^T \gamma\, dT'\right). \tag{3.8.13}$$

Это означает, что из-за диссипации ($\gamma > 0$) амплитуда и скорость солитона адиабатически убывают — наиболее важный ре-

зультат в этой задаче. Уравнение (3.8.10) при выполнении (3.8.13) можно решить. В результате получим

$$(3.8.14)\quad \hat{q}^{(1)} = \frac{\gamma}{6\eta}\left[-1 + \operatorname{th}\varphi + 3\left(1 + \frac{\eta}{\gamma}\theta_T^0\right)(1 - \varphi\operatorname{th}\varphi)\operatorname{sech}^2\varphi + \right.$$
$$\left. + \varphi(2 - \varphi\operatorname{th}\varphi)\operatorname{sech}^2\varphi\right],$$
$$|\varphi| \ll O(\varepsilon^{-1/2}),$$

где $\varphi = \eta(\theta - \theta_0)$ (см. упражнения в конце этой главы). Отметим, что ниже будет найдено $\theta_T^{(0)}$. Более высокие порядки указывают на неприменимость этого разложения при $|\varphi| = O(\varepsilon^{-1/2})$. Это соответствует границе применимости разложения Каупа, Ньюэла [267] и Карпмана, Маслова [255] при $t \sim O(\varepsilon^{-1/2})$. Формула (3.8.14) показывает, что диссипация приводит к появлению полочки; действительно, в асимптотике получим

$$(3.8.15)\quad \hat{q}^{(1)} \to \begin{cases} -\frac{\gamma}{3\eta}\{1 - 2\varphi^2\exp(2\varphi) & \text{при } 1 \ll -\varphi \ll O(\zeta^{-1/2}), \\ -\frac{2\gamma}{3\eta}\exp(-2\varphi) & \text{при } 1 \ll \varphi \ll O(\varepsilon^{-1/2}). \end{cases}$$

Это полностью согласуется с результатами, полученными с помощью МОЗР. Отметим, что параметр $\theta^{(0)}$ может выбираться произвольно; при этом член $\theta_T^{(0)}(1 - \varphi\operatorname{th}\varphi)\operatorname{sech}^2\varphi$ можно включить в решение главного порядка $\hat{q}^{(0)}$, сдвинув аргумент $\eta \to \eta - \varepsilon\theta_T^{(0)}/8\eta$. Мы привели наиболее существенные результаты, касающиеся теории возмущений; читатель, не заинтересованный в более детальном рассмотрении, может перейти прямо к разд. 3.8. b.

Если η задана начальным условием, то можно определить, какому уравнению подчиняется $\theta^{(0)}$. Рассмотрим задачу Коши, причем в качестве начального условия выберем невозмущенный солитон

$$(3.8.16)\quad q(x, 0) = 2\eta^2\operatorname{sech}^2\eta x.$$

Из (3.8.16) следует соотношение (скорость изменения энергии)

$$(3.8.17)\quad \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} q^2\,dx = -2\varepsilon\gamma\int_{-\infty}^{\infty} q^2\,dx.$$

Кроме этого, предположим, что q можно представить в виде $q_s + \delta q$, где q_s — солитонная часть решения, а δq — поправка к ней. Для того чтобы воспользоваться формулой (3.8.17), нам необходимо знать решение в областях, удаленных от солитона. Учитывая (3.8.13) (в главном порядке (3.8.17) совпадает с

(3.8.13)), получим

$$\frac{d}{dt}\Delta(t) = -2\varepsilon\gamma\Delta(t), \tag{3.8.18}$$

где $\Delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \{q_s \delta q + (\delta q)^2/2\}\, dx$. Из условия $\delta q(x, 0) = 0$ получим

$$\Delta(t) = 0. \tag{3.8.19}$$

Оказывается, что длина полочки имеет порядок $O(\varepsilon^{-1})$ для $t \sim \sim O(\varepsilon^{-1})$. При этих временах порядки первого и второго членов в $\Delta(t)$ совпадают. На самой начальной стадии задача является нестационарной, но нестационарная часть волны быстро движется к хвосту солитона. Для времен $t \sim O(\varepsilon^{-1})$ решение в области $|\theta| \ll O(\varepsilon^{-1/2})$ является квазистационарным, и там $\delta q = \delta q(\theta, T)$. Поэтому для определения уравнения, которому подчиняется параметр $\theta^{(0)}$, потребуем выполнения следующего дополнительного условия:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{q}^{(0)}(\theta)\, \hat{q}^{(1)}(\theta)\, d\theta + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (\delta q)^2\, dx = 0. \tag{3.8.20}$$

Условие (3.8.20) дает

$$\frac{\partial \theta^{(0)}}{\partial T} = -\frac{\gamma}{3\eta} - \frac{1}{2\eta}\int_{-\infty}^{\infty} (\delta q)^2\, dx. \tag{3.8.21}$$

Отметим, что в интервале времени $O(1) \ll t \ll O(\varepsilon^{-1})$ вторым членом в (3.8.21) $\left(\text{т. е. } \int_{-\infty}^{\infty} (\delta q)^2\, dx \text{ в } \Delta(t)\right)$ можно пренебречь. В этом интервале времен формула (3.8.21) согласуется с результатами работы [255]. Для того чтобы пользоваться формулами (3.8.20), (3.8.21), нужно знать δq при $-\theta \ll O(\varepsilon^{-1/2})$.

В области $|\theta| \ll O(\varepsilon^{-1/2})$ решение является квазистационарным, но вне ее оно существенно зависит от x и t. Для времен t порядка $O(\varepsilon^{-1})$, т. е. в области $O(\varepsilon^{-1/2}) \ll (-x) < \infty$, за солитоном, разложение является неравномерным из-за наличия полочки. Решение уравнения (3.8.6) в этой области аппроксимируется, как показано в работе [278], решением $\tilde{q}$ уравнения

$$\tilde{q}_t + \tilde{q}_{xxx} = -\varepsilon\gamma\tilde{q} \tag{3.8.22}$$

с граничными условиями

$$\tilde{q}(x, t) \to \begin{cases} -\dfrac{\varepsilon\gamma}{3\eta(T)} & \text{при} \quad x \to \dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_0^T 4\eta^2(T')\, dT', \\ 0 & \text{при} \quad x \to -\infty, \end{cases} \tag{3.8.23}$$

С учетом этих граничных условий (с подвижной границей) получим решение уравнения (3.8.22)

$$\tilde{q}(x,\, t) = -\frac{\varepsilon\gamma\,(T_0\,(\varepsilon x))}{3\eta\,(T_0\,(\varepsilon x))}\exp\left(\int_T^{T_0(\varepsilon x)} \gamma\, dT'\right)\int_{-\infty}^{z} \mathrm{Ai}\,(y)\, dy, \tag{3.8.24}$$

где $\mathrm{Ai}\,(z)$ — функция Эйри, $z = x/(3t)^{1/3}$ и $T_0(\varepsilon x)$ определяется обращением интеграла $\varepsilon x = \int_0^{T_0} 4\eta\,(T')\, dT'$. Отметим, что δq в (3.8.20), (3.8.21) можно заменить на $\tilde{q}$.

В области $\theta \gg O(\varepsilon^{-1/2})$, т. е. перед солитоном, разложение также является неравномерным. В ней из-за экспоненциальной малости решения снова применимо уравнение (3.8.22). Решение $\bar{q}$ можно получить, воспользовавшись методом ВКБ:

$$\begin{aligned} &\bar{q} \equiv 8\eta^2 \exp\left(\frac{\varphi\,(Y,\, T)}{\varepsilon}\right), \qquad \theta \gg O\,(\varepsilon^{-1/2}),\\ &\varphi_T - 4\eta^2\varphi_Y + \varphi_Y^3 = 0,\\ &Y = \varepsilon\,(\theta - \theta_0), \qquad T = \varepsilon t. \end{aligned} \tag{3.8.25}$$

Таким образом, «равномерное» приближенное решение имеет вид

$$q\,(x,\, t) = \begin{cases} \tilde{q}, & -\theta \gg O\,(\varepsilon^{-1/2}),\\ \hat{q}^{(0)}(\theta,\, T) + \varepsilon\hat{q}^{(1)}(\theta,\, T), & |\,\theta\,| \ll O\,(\varepsilon^{-1/2}),\\ \bar{q}, & \theta \gg O\,(\varepsilon^{-1/2}). \end{cases} \tag{3.8.26}$$

Мы не будем здесь углубляться в детали, но отметим, что поучительно проанализировать законы сохранения. С их помощью можно проверить полученную формулу, но, кроме этого, законы сохранения могут служить отправным пунктом для анализа. При этом следует проявлять предельную осторожность, но если все сделать правильно, то можно воспроизвести все полученные результаты. (См., например, [414] (отметим, что результаты этой работы следует модифицировать из-за наличия полочки), [267], [278].) Другой пример — диссипативное возмущение нелинейного уравнения Шрёдингера — приведен в упражнениях.

3.8.b. Сильно нелинейное уравнение КдФ с затуханием. Теперь мы кратко рассмотрим диссипативные возмущения сильно нелинейных неинтегрируемых уравнений КдФ и Шрёдингера. При достаточно сильной нелинейности мы обнаружим, что теория возмущений указывает на возможность коллапса возмущенной волны, приводящего к образованию сингулярностей, таких, как в сильнонелинейном уравнении Шрёдингера (Захаров и Сынах (1976) [549]).

Рассмотрим сильно нелинейное уравнение

$$q_t + Aq^p q_x + q_{xxx} = -\varepsilon\gamma q, \quad p \geqslant 1, \tag{3.8.27}$$

невозмущенное солитонное решение которого можно представить в виде

$$q^{(0)} = \alpha \operatorname{sech}^{2/p} \eta(\theta - \theta^0), \qquad \frac{\partial\theta}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial t} = -4\frac{\eta^2}{p^2}, \tag{3.8.28}$$

где α определяется из соотношения $A\alpha^p = 2(p+1)(p+2)\eta^2/p^2$. В предположении квазистационарности возмущенного решения имеем

$$\begin{gathered} -4\frac{\eta^2}{p^2}\hat{q}_0 + A\hat{q}^p\hat{q}_\theta + \hat{q}_{\theta\theta\theta} = \varepsilon\hat{F}(\hat{q}), \\ \hat{F}(\hat{q}) = -\gamma\hat{q} - \hat{q}_T. \end{gathered} \tag{3.8.29}$$

В порядке ε получим

$$\begin{gathered} \hat{L}\hat{q}^{(1)} \equiv -4\frac{\eta^2}{p^2}\hat{q}^{(1)}_\theta + A\left((\hat{q}^{(0)})^p\hat{q}^{(1)}\right)_\theta + \hat{q}^{(1)}_{\theta\theta\theta} = \hat{F}^{(1)}(\hat{q}^{(0)}), \\ \hat{F}^{(1)}(\hat{q}^{(0)}) = -\gamma\hat{q}^{(0)} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial T}\left\{\frac{2}{p}\hat{q}^{(0(} + (\theta - \theta^{(0)})\hat{q}^{(0)}_\theta\right\} + \frac{\partial\theta^{(0)}}{\partial T}\hat{q}^{(0)}_\theta. \end{gathered} \tag{3.8.30}$$

Воспользуемся тем, что $\hat{L}^A\hat{q}^{(0)} = 0$. При этом условие совместимости

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{q}^{(0)}\hat{F}^{(1)}(\hat{q}^{(0)})\,d\theta = 0 \tag{3.8.31}$$

приводит к

$$\frac{1}{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial T} = -\frac{2p}{4-p}\gamma. \tag{3.8.32}$$

Из (3.8.30), (3.8.32) следует наличие полочки, так как

$$\hat{q}^{(1)} \to -\frac{p^2\gamma}{4\eta^2(4-p)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{q}^{(0)}\,d\theta \quad \text{при} \quad \theta \to -\infty. \tag{3.8.33}$$

Этот результат (полученный понижением порядка в уравнении (3.8.30)) согласуется при $p = 1$ с (3.8.15). Равномерное приближение (при $p < 4$) может быть получено уже описанным методом. Из (3.8.32) видно, что теория возмущений перестает быть справедливой при $p = 4$. Это означает, что гипотеза квазистационарности несправедлива при такой нелинейности. Другими словами, возмущение не является адиабатическим. При $p \geqslant 4$ это может означать, что уравнение допускает коллапсирующие сингулярности. В рассматриваемой задаче мы не доказали существования этих сингулярностей, но мы покажем, что они воз-

никают в аналогичной задаче для «сильно нелинейного» уравнения Шрёдингера.

Рассмотрим уравнение

$$iq_t + q_{xx} + A\,|q|^{2p}\, q = -i\varepsilon\gamma q, \quad p \geqslant 2, \tag{3.8.34}$$

имеющее невозмущенное решение в виде уединенной волны

$$q_0 = \alpha \operatorname{sech}^{1/p} \eta\,(\theta - \theta^{(0)}) \exp i\,(\sigma - \sigma^{(0)}), \tag{3.8.35}$$

где $A\alpha^{2p} = (p + 1)\eta^2/p^2$. Здесь для простоты мы ограничимся покоящимся решением, т. е.

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial\theta}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial t} = \frac{\eta^2}{p^2}. \tag{3.8.36}$$

В предположении квазистационарности решения $q = \hat{q}\,(\theta T, \varepsilon) \times \times \exp(i\sigma - i\sigma^{(0)})$ получим

$$\begin{gathered} -(\eta^2/p^2)\,\hat{q} + \hat{q}_{\theta\theta} + A\,|\hat{q}|^{2p}\,\hat{q} = \varepsilon \hat{F}(\hat{q}), \\ \hat{F}(\hat{q}) = -i\gamma\hat{q} - i\hat{q}_T - \sigma_T^{(0)}\hat{q}. \end{gathered} \tag{3.8.37}$$

В порядке ε имеем

$$-\left(\frac{\eta^2}{p^2}\right)\hat{q}^{(1)} + \hat{q}_{\theta\theta} + (p+1)\,A\,(\hat{q}^{(0)})^{2p}\hat{q}^{(1)} + pA\,(\hat{q}^{(0)})^{2p}\,\hat{q}^{(1)*} = = \hat{F}^{(1)}(\hat{q}^{(0)}). \tag{3.8.38}$$

Подставив $\hat{q}^{(1)} = \hat{\varphi}^{(1)} + i\hat{\psi}^{(1)}$, получим

$$-\left(\frac{\eta^2}{p^2}\right)\hat{\varphi}^{(1)} + \hat{\varphi}_{\theta\theta}^{(1)} + A\,(2p+1)\,(\hat{q}^{(0)})^{2p}\,\hat{\varphi}^{(1)} = \operatorname{Re}[\hat{F}^{(1)}(\hat{q}^{(0)})], \tag{3.8.39a}$$

$$-\left(\frac{\eta^2}{p^2}\right)\hat{\psi}^{(1)} + \psi_{\theta\theta}^{(1)} + A\,(q^{(0)})^{2p}\,\hat{\psi}^{(1)} = \operatorname{Im}[\hat{F}^{(1)}(\hat{q}^{(0)})]. \tag{3.8.39b}$$

Условие совместимости

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{q}^{(0)} \operatorname{Im}[\hat{F}^{(1)}(\hat{q}^{(0)})]\,d\theta = 0 \tag{3.8.40}$$

дает

$$\frac{1}{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial T} = -\frac{2p}{2-p}\,\gamma. \tag{3.8.41}$$

При $p = 2$ теория возмущений неприменима! Таким образом, если степень нелинейности равна или превосходит 5, то возмущение существенным образом влияет на решение. Но по существу этот эффект вызван не возмущением, а скорее является неотъемлемой чертой самого уравнения. Сейчас мы покажем, как, используя законы сохранения, Захаров и Сынах [549] доказали, что уравнение (3.8.34) допускает коллапсирующие решения.

Рассмотрим эволюцию во времени следующей величины:

(3.8.42) $$J = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |q^2| dx.$$

Из (3.8.34) следует

(3.8.43) $$\frac{d^2J}{dt^2} + 4\varepsilon\gamma \frac{dJ}{dt} + 4\varepsilon^2\gamma^2 J = 8 \int \left\{ |q_x|^2 - \frac{pA}{2(p+1)} |q|^{2p+2} \right\} dx.$$

При $p = 2$ получим

(3.8.44) $$\frac{d^2J}{dt^2} = 8I_3 + O(\varepsilon),$$

где I_3 является интегралом движения (при $\gamma = 0$):

(3.8.45) $$I_3 = \int \left\{ |q_x|^2 - \frac{A}{2} |q|^6 \right\} dx.$$

Если $I_3 < 0$, то это означает, что J обратится в нуль в конечный момент времени, т. е. решение станет сингулярным (фокусировка). Для уравнения (3.8.27) при $p \geqslant 4$ доказательство существования коллапса пока отсутствует.

Отметим, что аналогичным способом можно доказать существование коллапсирующих решений у двумерного нелинейного уравнения Шрёдингера

(3.8.46) $$iA_t + A_{xx} + A_{yy} + 2|A|^2 A = 0.$$

Это уравнение имеет следующие интегралы движения:

(3.8.47) $$I_1 = \iint |A|^2 dx\, dy,$$
$$I_2 = \iint (|A_x|^2 + |A_y|^2 - |A|^4)\, dx\, dy.$$

Прямым вычислением (Захаров, Сынах [549], Таланов [473]) проверяется, что

(3.8.48) $$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \iint (x^2 + y^2) |A|^2 dx\, dy = 8I_2.$$

При этом если в начальный момент $I_2 < 0$, то за конечное время в решении возникает сингулярность.

3.8.с. Устойчивость солитона уравнения Кадомцева — Петвиашвили относительно поперечных возмущений. Возникает естественный вопрос об устойчивости солитонов и уединенных волн. Обычная устойчивость солитонов (не поперечная) не вызывает сомнения, когда к уравнению применим МОЗР. Но довольно часто оказывается, что решение является неустойчивым по отношению к поперечным возмущениям. В качестве примера мы

рассмотрим уравнение Кадомцева — Петвиашвили (т. е. двумерное уравнение КдФ).

Уравнение К—П имеет вид

$$\partial_x (u_t + 6uu_x + u_{xxx}) = -3\beta^2\sigma u_{yy}, \quad \sigma = \pm 1. \tag{3.8.49}$$

Предположим, что имеется длинноволновое возмущение в направлении y, т. е. $|\beta| \ll 1$.

Невозмущенное уравнение

$$N(u^{(0)}) = \partial_x \left(u_t^{(0)} + 6u^{(0)}u_x^{(0)} + u_{xxx}^{(0)}\right) = 0 \tag{3.8.50a}$$

имеет решение

$$\begin{gathered} u^{(0)} = 2\eta^2 \operatorname{sech}^2 \eta (\theta - \theta^{(0)}), \\ \theta = x - 4\eta^2 t, \quad \theta^{(0)} = \theta^{(0)}(T, y), \quad \eta = \text{const}. \end{gathered} \tag{3.8.50b}$$

Воспользовавшись стандартным многомасштабным разложением, перепишем уравнение К—П в переменных θ, T, y:

$$\partial_\theta (-4\eta^2 u_\theta + 6uu_\theta + u_{\theta\theta\theta}) = -u_{\theta T} - 3\beta^2\sigma u_{yy}. \tag{3.8.51}$$

Разложив $u = u^{(0)} + \beta u^{(1)} + \beta^2 u^{(2)} + \ldots$ и собрав коэффициенты при одинаковых степенях β, получим серию соотношений

$$N(u^{(0)}) = \partial_\theta \left(-4\eta^2 u_\theta^{(0)} + 6u^{(0)}u_\theta^{(0)} + u_{\theta\theta\theta}^{(0)}\right) = 0, \tag{3.8.52a}$$

$$\partial_\theta L(u^{(n)}) = F^{(n)}, \tag{3.8.52b}$$

где

$$\partial_\theta L(u^{(n)}) \equiv \partial_\theta \left(-4\eta^2 u_\theta^{(n)} + 6(u^{(0)}u^{(n)})_\theta + u_{\theta\theta\theta}^{(n)}\right). \tag{3.8.52c}$$

Удобнее работать с (3.8.52b) в проинтегрированной форме

$$L(u^{(n)}) = -4\eta^2 u_\theta^{(n)} + 6(u^{(0)}u^{(n)})_\theta + u_{\theta\theta\theta}^{(n)} = \mathcal{F}^{(n)} = \int^{\theta} F^{(n)}\, d\theta'. \tag{3.8.53}$$

Оператор, сопряженный к L, имеет вид

$$L^A v = 4\eta^2 v_\theta - 6u^{(0)}v_\theta - v_{\theta\theta\theta}. \tag{3.8.54}$$

Ясно, что $v = u^{(0)}$ является решением уравнения $L^A v = 0$. Воспользовавшись тождеством Грина $vLu^{(n)} - u^{(n)}L^A v = \mathcal{F}^{(n)}$, получим (с помощью интегрирования), что для существования ограниченного решения $u^{(n)}$ должно выполняться условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{(n)} u^{(0)}\, d\theta = 0. \tag{3.8.55}$$

При $n = 1$ мы имеем $\mathcal{F}^{(1)} = \theta_T^{(0)} u_\theta^{(0)}$, и условие (3.8.55) выполняется автоматически. Решение $u^{(1)}$ неоднородного уравнения

имеет вид

(3.8.56) $$u^{(1)} = \frac{1}{8\eta^2}\theta_T^{(0)}\left(2u^{(0)} + \theta u_\theta^{(0)}\right),$$

решение однородного уравнения включено в $u^{(0)}$. При $n = 2$ получим

(3.8.57) $$\mathcal{F}^{(2)} = -\partial_\theta\left(6u^{(1)}\right)u_\theta^{(1)} + \partial_\theta u_T^{(1)} - 3\sigma\int^{\theta} u_{yy}^{(0)}\,d\theta'.$$

Условие (3.8.55) приводит к

(3.8.58a) $$-\frac{1}{8\eta^2}\theta_{TT}^{(0)}\int_{-\infty}^{\infty}\left(2\left(u^{(0)}\right)^2 + \theta u_\theta^{(0)}u^{(0)}\right)d\theta + 3\sigma\theta_{yy}^{(0)}\int_{-\infty}^{\infty}\left(u^{(0)}\right)^2 d\theta = 0$$

или

(3.8.58b) $$\theta_{TT}^{(0)} - 48\sigma\eta^2\theta_{yy}^{(0)} = 0;$$

для условия (3.8.55) существенна только четная по переменной $\theta - \theta^{(0)}$ часть функций $\mathcal{F}^{(n)}$. Таким образом, при $\sigma = +1$ солитон является неустойчивым по отношению к поперечным возмущениям, при $\sigma = -1$ солитон, по-видимому, является нейтрально устойчивым (хотя этот факт нами не доказан) [1]. Для волн на поверхности воды неустойчивый случай реализуется, если поверхностное натяжение является достаточно сильным.

В упражнениях обсуждается пример поперечной неустойчивости солитонов двумерного нелинейного уравнения Шрёдингера. Отметим, что в этом случае одномерный солитон оказывается неустойчивым.

Следует отметить, что:

(i) В большинстве случаев задачу об устойчивости можно решить с помощью обычных многомасштабных разложений либо более стандартного подхода (см. Захаров, Рубенчик [543]) [2];

(ii) Эти идеи применимы также в случае многомерной задачи о самоиндуцированной прозрачности (см. разд. 4.4 и [13]) и при изучении устойчивости волновых пакетов на поверхности жидкости конечной глубины (солитоны опять оказываются неустойчивыми относительно поперечных возмущений, см. Абловиц, Сигур [28]). При этом опять оказывается, что и солитоны, и бризеры неустойчивы относительно длинноволновых поперечных возмущений.

---

[1]) В этом случае, как показано в работах [11*, 12*], солитон является асимптотически устойчивым, так как поперечные возмущения затухают со временем, излучая свою энергию в непреывный спектр. — *Прим. перев.*

[2]) См. также обзор [13*], [14*].

Упражнения

Раздел 3.1

1. Пусть $C(k^2/4)$— целая функция k^2. Покажите, что преобразование (3.1.1) отображает любое высшее уравнение мКдФ

$$v_t + C\left(-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - v^2 + v_x \int\limits_x^\infty dy v\right) v_x = 0$$

в соответствующее высшее уравнение КдФ

$$u_t + C\left(-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - u + \frac{1}{2}u_x \int\limits_x^\infty dy\right) u_x = 0;$$

при этом $C(k^2/4)$ в обоих случаях является фазовой скоростью линеаризованного уравнения. (Сделать это можно различными способами. Красивое решение было предложено А. Рамани; он воспользовался линейными интегральными уравнениями (1.3.27), (1.3.37) и отождествил $(K_1 + \bar{K}_1)$ в (1.3.27) с K в (1.3.37).)

2. Совершенно ясно, что, подставив (3.1.2) в любое уравнение $D(u) = 0$, мы получим $E(\theta) = 0$, которое отображается в $D(u) = 0$ с помощью (3.1.2). Обратно, предположим, что $E(\theta) = 0$ является линейным уравнением с заданным дисперсионным соотношением $\omega(k)$ (т. е. обобщением (3.1.3)). Что есть в этом случае $D(u) = 0$?

3. Рассмотрим

$$\left(\frac{u+v}{2}\right)_x = \lambda,$$

$$\left(\frac{u+v}{2}\right)_t = -\left(\frac{u-u}{2}\right)_{xx}\lambda' - \frac{\alpha}{4}\lambda^4 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{u-v}{2}\right)_x\right]^2\lambda'',$$

где α — постоянная, а $\lambda = \lambda((u-v)/2)$ удовлетворяет уравнению

$$\lambda''' + 2\alpha\lambda\lambda' = 0.$$

Рунд [436] предложил эти соотношения в качестве ПБ уравнения

$$u_t + \frac{\alpha}{4}(u_x)^4 + u_{xxx} = 0$$

в себя. Это уравнение является весьма интересным, так как, положив $u_x = \varphi$, мы получим уравнение

$$\varphi_t + \alpha\varphi^3\varphi_x + \varphi_{xxx} = 0,$$

не имеющее солитонов и обладающее только тремя полиномиальными законами сохранения. Покажите, что предложенное ПБ на самом деле не является ПБ.

4. Пусть

$$V_x = c_1 e^{\beta(u)} + u_x\,[\beta'(u)\,V + \alpha(u)],$$
$$V_t = c_2 e^{\beta(u)} + u_t\,[\beta'(u)\,V + \alpha(u)],$$

где α, β — произвольные функции, а c_1, c_2 — постоянные.

(a) Покажите, что это преобразование не является ПБ.

(b) Покажите, что это преобразование является точечным, т. е. $v = V(x, t, u(x, t))$. Найдите функцию V.

5. (a) Задача рассеяния для уравнения sin-Гордон имеет вид (это следует из (1.2.17), (1.2.18))

$$v_{1x} + i\zeta v_1 = q v_2, \quad v_{1t} = \frac{a}{\zeta} v_1 + \frac{b}{\zeta} v_2,$$
$$v_{2x} + i\zeta v_2 = r v_1, \quad v_{2t} = \frac{c}{\zeta} v_1 - \frac{a}{\zeta} v_2.$$

Найдите $D(\mathbf{u}) = 0$ и $E(\mathbf{v}) = 0$. Как связаны уравнения $D(\mathbf{u}) = 0$ и sin-Гордон?

(b) Определим $V = v_1/v_2$ и $U = q - r$. Покажите, что задача рассеяния определяет ПБ между $D(U) = 0$ и $E(V) = 0$. Выведите (3.1.7) из ПБ.

6. Захаров (1974) [527] представил уравнение Буссинеска в виде

$$u_t = A_x, \quad A_t = \left(u + u^2 + \frac{1}{4} u_{xx}\right)_x$$

и получил его из задачи рассеяния

$$\psi_{xxx} + \left(u_x + i\left(\frac{4}{3}\right)^{1/2} A\right)\psi + (1 + 2u)\,\psi_x = \lambda\psi,$$
$$i\left(\frac{4}{3}\right)^{1/2}\psi_t = \psi_{xx} + \frac{4}{3} u\psi.$$

Покажите, что это является преобразованием Бэклунда.

7. Покажите, что задача рассеяния для уравнения трехволнового взаимодействия (разд. 2.1) является преобразованием Бэклунда.

8. (a) Найти преобразование Бэклунда между уравнениями КдФ пятого порядка и мКдФ пятого порядка.

(b) Найти ПБ уравнения КдФ пятого порядка в себя.

Раздел 3.2

1. Покажите, что ПБ (3.1.19), (3.1.20) уравнения КдФ в себя может быть приведено к виду (3.2.5) при $N = 1$. Таким образом, это ПБ является псевдопотенциалом.

2. (a) Покажите, что

$$v = -2\,\frac{u_x}{u + \lambda} + u$$

является ПБ уравнения (3.2.6) в себя при произвольном значении параметра λ.

(b) Найти общий вид решения уравнения (3.2.6) типа бегущей волны, предположив, что $u = u(x - ct)$.

(c) Отправляясь от этого решения, найти при помощи ПБ другое точное решение уравнения (3.2.6). Можно ли рассматривать это решение как двухсолитонное?

(d) Это ПБ можно вывести из преобразования Коула — Хопфа следующим образом: (i) если θ удовлетворяет уравнению теплопроводности, то функция u, вычисленная по формуле (3.1.2), удовлетворяет уравнению (3.2.6); (ii) $\psi = \theta_x$ также удовлетворяет уравнению теплопроводности; (iii) функция V, определенная по ψ с помощью (3.1.2), удовлетворяет уравнению (3.2.6); (iv) связь между V и u является искомым ПБ (см. п. «а») (М. Краскал, частное сообщение).

3. Найти матричное представление решения соотношений (3.2.19). Построить линейный псевдопотенциал. Является ли он ПБ?

4. (a) Покажите, что уравнение (3.2.20) имеет псевдопотенциал тогда и только тогда, когда соотношения (3.2.21) обладают нетривиальными решениями. Покажите, что псевдопотенциал тривиален, если $\alpha = \gamma = 0$.

(b) Покажите, что при $N = 1$ единственное решение соотношений (3.2.21) имеет $\alpha = \gamma = 0$.

(c) Уравнение (3.2.20) не имеет очевидных законов сохранения. Чему соответствует абелево решение соотношений (3.2.21)?

5. Предположим, что в (3.2.30) $\underline{\underline{\alpha}}_1$ имеет каноническую жорданову форму

$$\underline{\underline{\alpha}}_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & & & \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & & \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dots & & & & & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

и единственный собственный вектор v_n. Пусть $(v_1, \dots, v_n)$ — такой ортонормированный базис, что

$$\underline{\underline{\alpha}}_1 v_n = \lambda v_n,$$
$$\underline{\underline{\alpha}}_1 v_{n-1} = \lambda v_{n-1} + v_n,$$
$$\underline{\underline{\alpha}}_1 v_{n-2} = \lambda v_{n-2} + v_{n-1} \quad \text{и т. д.}$$

(a) Покажите, что линейная оболочка векторов $(v_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$ является инвариантным подпространством $\underline{\underline{\alpha}}_1$ для лю-

бого $m = 1, \ldots, n$. Покажите, что две коммутирующие матрицы имеют одинаковые инвариантные подпространства.

(b) Покажите, что собственный вектор v_n матрицы $\underline{\underline{\alpha}}_1$ отвечает закону сохранения, зависящему от $(u, u_x, \ldots, u_{(p-1)x})$, что v_{n-1} отвечает закону сохранения, зависящему от $(v_n, u, u_x, \ldots \ldots, u_{(p-1)x})$, и т. д.

(c) Покажите, что любая абелева алгебра Ли соответствует набору законов сохранения рассматриваемого уравнения и что они могут быть как тривиальными, так и нетривиальными.

6. Покажите, что уравнение

$$u_t + u_{xxx} + f(u)\, u_x = 0$$

имеет псевдопотенциал, зависящий от (u, u_x, μ_{xx}), тогда и только тогда, когда

$$f(u) = c_0 + c_1 u + c_2 u^2$$

(Уолквист и Эстабрук [497]).

7. Докажите, что соотношения (3.2.21) не имеют неабелевых решений. Пусть α, β, γ, δ являются $N \times N$-матрицами; выберем систему координат для q так, чтобы в ней матрица α имела нормальную жорданову форму.

(a) Предположим, что α диагональна. Покажите из (3.2.21a), что $\alpha \equiv 0$. Покажите, что при этом алгебра Ли является абелевой.

(b) Теперь предположим, что матрица α не может быть диагонализована. Пусть матрица α имеет только одно собственное значение (λ) и один собственный вектор. Вычислите след соотношения (3.2.21a) и покажите, что $\lambda = 0$. Поэтому

$$\alpha_{i,\, i+1} = 1, \quad \alpha_{ij} = 0 \ (j \neq i + 1).$$

Покажите, что из (2.2.21a) следуют соотношения

$$\gamma_{i,\, j} = 0 \qquad \text{если} \quad i > j,$$

$$\gamma_{i,\, i} = i + M \quad \text{для некоторого} \quad M, \ i = 1 \ldots, N.$$

Вычислите след выражения (2.2.21d) и покажите, что

$$M = -(N + 1)/2.$$

Покажите, воспользовавшись (3.2.21d), что

$$\beta_{i+1,\, i} = i\,(N - i)/2 > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N - 1.$$

В (3.2.21b) обозначим $\mathbf{Q} = [\alpha, \delta] + [\beta, \gamma] - \alpha$. Вычислите $\sum_{i=1}^{N-1} (\mathbf{Q})_{i+1,\, i}$ и покажите, что при этом возникает противоречие для $N > 1$.

(c) Осталась единственная возможность: матрица α имеет более чем один, но менее N собственных векторов. Таким обра-

зом, α имеет две или более жордановы клетки вдоль диагонали и нули в остальных местах. Базис можно выбрать так, чтобы самая большая клетка была расположена в левом углу. Вычислите частичный след соотношения (3.2.21a) для *каждой* клетки и покажите, что *все* собственные значения матрицы α равны нулю. Матрицу γ можно разбить на блоки, согласованные с α, но при этом ее недиагональные блоки (которые, вообще говоря, могут не быть квадратными) не обязательно равны нулю. Покажите, что диагональные блоки имеют точно такой же вид, как в случае (b), и что каждый недиагональный блок является верхнетреугольным. В остальном доказательство такое же, как в п. (b), за исключением того, что, воспользовавшись (3.2.21d), следует доказать равенство нулю собственных диагоналей недиагональных блоков γ. Определим $\mathbf{R} = [\alpha, \beta] - \gamma$, тогда $\sum_i (\mathbf{R}_{i+1,\, i})$ (см. (3.2.21d) приводит, как и в предыущем случае, к противоречию, если $N \neq 1$.

(d) Таким образом, соотношения (3.2.21) не имеют решений при недиагонализуемой матрице α. Если матрица α диагонализуема, то решение является абелевым.

8. Рассмотрим уравнение

$$u_t + u^2 u_x - u_{xxx} = u_{xx}.$$

(a) Покажите, что это уравнение имеет ограниченные на всей оси $-\infty < x < \infty$ стационарные решения ($u = f(x - ct)$), но среди них нет периодических решений. Опишите апериодическое решение.

(b) Более тонкий вопрос состоит в следующем. Существуют ли ограниченные неосциллирующие стационарные решения?

(c) Коронес и Теста [122] показали, что это уравнение имеет неабелев псевдопотенциал. Они не проверили, приводит ли этот псевдопотенциал к ПБ или к задаче рассеяния, взаимодействуют ли решения из п. a) как солитоны и можно ли эту задачу точно решить. Имеет ли это уравнение псевдопотенциал?

Раздел 3.3

1. Исследовать сдвиги фаз солитонов в двухсолитонном решении уравнения мКдФ. То же самое для уравнения sin-Гордон и нелинейного уравнения Шрёдингера.

2. Воспользовавшись преобразоваинем Бэклунда в билинейной форме (3.3.72), вычислить двухсолитонное решение (3.3.76), отправляясь от односолитонного решения (3.3.74).

3. Воспользовавшись формулой суперпозиции солитонов и солитонными решениями с небольшим числом солитонов, вычислить константу C в (3.3.86).

4. Воспользовавшись (3.3.87), вычислить собственную функцию ψ по первым двум солитонным решениям.

Раздел 3.4

1. Покажите, что (3.4.25) вместе с уравнением КдФ (3.4.1) либо вместе с вырожденным ПБ (3.4.26) даст одинаковые рациональные решения.

2. Чем отличаются автомодельные рациональные решения уравнения КдФ, т. е. $u = (3t)^{-2/3}w(z)$, $z = x/(3t)^{1/3}$, от всего класса рациональных решений уравнения КдФ?

3. Получите следующее рациональное решение уравнения Буссинеска (3.4.34) (отвечающее F_3) и уравнение мКдФ (3.4.43) с ненулевыми асимптотиками (отвечающее F_3, G_3).

Раздел 3.5

1. Изучите структуру двухсолитонного решения (3.5.1). Какой сдвиг фаз возникает в результате взаимодействия? Каким он будет для N-солитонного решения?

2. Как получить (3.5.38) из (3.5.37)?

3. Проверьте, что (3.5.39) в самом деле приводит к (3.5.41) при $\delta \to 0$ и к (3.5.42) при $\delta \to \infty$.

4. Имеется решение (3.5.48). Предположим, что $k_1 \to 0$. Покажите, что, за исключением случая $\delta k \sim \pi$, результат перехода к пределу является тривиальным.

5. В каком смысле (3.5.63) представляет собой задачу Римана — Гильберта? Можно ли это представление рассматривать как задачу рассеяния?

Раздел 3.6

1. В каком смысле подход, основанный на уравнении (3.6.8) с $L_i F = 0$ и операторами L_1, L_2, определенными в (3.6.12), (3.6.16), является более общим, чем метод обратной задачи рассеяния, описанный в гл. 1? В каком смысле полученная информация будет меньше?

2. Покажите, что «факторизованное» уравнение (3.6.51) дает уравнение Гельфанда — Левитана (3.6.53).

3. Пусть $\hat{M}_1$, $\hat{M}_2$ заданы формулой (3.6.61). Покажите, что условие $(\hat{M}_1, \hat{M}_2) = 0$ в самом деле приводит к уравнению Кадомцева — Петвиашвили (3.6.63).

4. Как получить резонансное решение Майлза [376] из (3.6.68)?

Раздел 3.7

1. (a) Покажите, что $f = z/2$ является точным решением уравнения (3.7.1c). Какое решение уравнения (3.7.1a) соответствует f?

(b) Пусть $f(z) = z/2 + g(z)$. Какому уравнению удовлетворяет функция $g(z)$? Проверьте, что g является интегрирующим множителем, и проинтегрируйте уравнение один раз. Полученное уравнение второго порядка содержится в списке книги [238,

гл. 14] под номером XXXIV. Покажите, что приведенное там «решение» этого уравнения является на самом деле преобразованием Миуры [379].

2. После формулы (3.7.5а) намечено «частичное доказательство» гипотезы о свойстве Пенлеве. В каком смысле это доказательство является частичным?

3. Уравнение Бюргерса

$$u_t + uu_x = u_{xx}$$

точно линеаризуется преобразованием Коула — Хопфа (см. разд. 3.1, 3.2). Покажите, что оно допускает решение типа бегущей волны и автомодельное решение. Покажите, что в обоих случаях соответствующее ОДУ можно один раз проинтегрировать, и в результате получится обобщенное уравнение Риккати (3.7.3), т. е. оно Р-типа.

4. Уравнение Фишера

$$u_t = u - u^2 + u_{xx}$$

не имеет псевдопотенциала (см. разд. 3.2). Какому ОДУ подчиняются решения типа бегущей волны $u = u(x - ct)$? Покажите, что это уравнение будет Р-типа только в случае $c^2 = 25/6$.

При этих специальных значениях Абловиц и Зепетела [30] проинтегрировали это ОДУ и нашли, по-видимому, единственные явные решения этого уравнения.

5. Обобщенное уравнение КдФ имеет вид

$$u_t + u^n u_x + u_{xxx} = 0.$$

Какому семейству ОДУ удовлетворяют решения этого уравнения в виде бегущей волны? Для каких n эти уравнения будут Р-типа? (Сравнить полученное утверждение с результатом для упр. 6 разд. 3.2.)

6. (а) Каков автомодельный вид уравнения (3.7.10)? Покажите, что решения этого ОДУ имеют подвижные логарифмические точки ветвления. Это указывает на то, что решение линейного интегрального уравнения обратной задачи рассеяния не может *непосредственно* удовлетворять уравнению sin-Гордон.

(b) Покажите, что подвижные точки ветвления исчезнут либо после дифференцирования, либо после экспоненциальной замены, указанной сразу за формулой (3.7.11). Напомним, (см. (1.2.18)), что МОЗР позволяет определить u_x, а не u. Этот пример показывает, что если подвижная критическая точка является достаточно простой, то ее можно исключить подходящим преобразованием.

7. Имеются серьезные основания считать, что «двойное уравнение sin-Гордон»

$$u_{xt} = \sin u + \lambda \sin 2u$$

нельзя проинтегрировать с помощью МОЗР (см. разд. 4.4). Найдите его автомодельное решение. Соответствующее ОДУ имеет подвижные логарифмические точки ветвления, как и в случае уравнения sin-Гордон. Покажите, что после экспоненциальной замены это уравнение по-прежнему будет иметь подвижные критические точки.

8. Михайлов [1]) (1979) [374] показал, что к уравнению

$$u_{xt} = ae^u + be^{-2u}$$

применим МОЗР. Покажите, что соответствующее автомодельное уравнение не имеет вида (3.7.4), но приводится к нему экспоненциальной подстановкой. Покажите, что это уравнение P-типа. (Это ОДУ, в сущности, является уравнением P_{III}, но оно отсутствует в списке Айнса [238]! Это показывает, насколько опасно поверхностное сравнение со списком. Дело в том, что указанные в списке уравнения приведены к «каноническому» виду, а эквивалентные им уравнения не указаны. Поэтому мы рекомендуем каждый раз анализировать структуру критических точек, а не пользоваться готовым списком.)

9. Захаров (1981) [530] сообщал о численных экспериментах, результаты которых наводят на мысль, что уравнение

$$u_{xx} - u_{tt} = u^3$$

может обладать некоторыми специальными свойствами. Найдите автомодельное решение. Покажите, что соответствующее ОДУ не является уравнением P-типа.

10. «Уравнения Буссинеска» (обращаем внимание на множественное число)

$$h_t + (uh)_x = 0,$$
$$u_t + uu_x + gh_x + \frac{H}{3} h_{xtt} = 0$$

---

[1]) Уравнение, о котором идет речь в этом упражнении, в качестве кандидата в интегрируемые системы впервые повилось в работе Жибера и Шабата (1979) [1*]. В этой работе была впервые решена задача о классификации уравнений заданного вида, точнее $u_{xt} = F(u)$, обладающих симметрией достаточно высокого порядка, причем никаких вспомогательных гипотез при этом сделано не было. Под непосредственным влиянием работы [1*] возникла работа [14], в которой была найдена необходимая для применения МОЗР задача рассеяния и получена рекуррентная формула для бесконечной последовательности законов сохранения. МОЗР для этого уравнения был развит в работе [374], там же было показано, что нетривиальных локальных законов сохранения существует бесконечно много. Следует отметить, что еще раньше это уравнение было выписано в работе Булоу и Додда [16*], где оно фигурировало в качестве примера уравнения, не имеющего локальных законов сохранения, а следовательно, и симметрий с порядком большим 11 (теорема 9). Но ошибки в доказательстве своей теоремы авторы пока не обнаружили (см. [79], стр. 159—160). — *Прим. перев.*

описывают эволюцию длинных волн, распространяющихся в обоих направлениях (см., например, Уизем [505]). Найдите стационарное решение и исключите u. Покажите, что полученное ОДУ на h не является уравнением Р-типа.

11. Рассмотрите уравнение

$$i\varphi_t + \varphi_{xx} - \varphi_{yy} - 2|\varphi|^2\varphi = 0,$$

описывающее эволюцию волновых пакетов на поверхности глубокого водоема без учета поверхностного натяжения (см. разд. 4.3). Покажите, что у этого уравнения имеется точная редукция к уравнению (3.7.26). Можно ли к нему применить МОЗР?

12. Уравнение Кадомцева — Петвиашвили

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + 3\sigma u_{yy} = 0, \quad \sigma = \pm 1,$$

интегрируется с помощью МОЗР. Покажите, что:

(a) не зависящие от y решения удовлетворяют уравнению КдФ;

(b) решения типа бегущей волны $u(x - ct, y)$ удовлетворяют уравнению Буссинеска;

(c) при $c = 0$ оно дает стационарное решение (стоячие волны);

(d) автомодельной переменной является

$$z = (3t)^{-1/3}x + \sigma(3t)^{-4/3}y^2.$$

Покажите, что полученное при этом ОДУ для функции $F(z)$ один раз можно проинтегрировать. Умножьте уравнение на F и покажите, что F^2 удовлетворяет уравнению P_{II} [429];

(e) «модифицированное уравнение К—П»

$$(v_t - 6v^2v_x + v_{xxx})_x + \sigma v_{yy} = 0$$

можно рассматривать как $(2+1)$-мерный аналог уравнения мКдФ (см. разд. 4.1). Какому ОДУ подчиняется автомодельное, не зависящее от времени решение этого уравнения? Покажите, что это ОДУ не является уравнением Р-типа.

13. Здесь мы покажем, что тривиальную формулировку свойства Пенлеве, предложенную в работе [22], следует модифицировать. Уравнение Бенджамина — Оно

$$u_t + uu_x + H(u_{xx}) = 0$$

(H — преобразование Гильберта) является, по-видимому, интегрируемым при помощи МОЗР (см. разд. 3.5, 4.1). В разд. 3.5 при построении рациональных решений обсуждалась точная редукция этого уравнения к системе ОДУ. Мы получили систему

уравнений Калоджеро — Мозера и, в частности,

$$\ddot{x}_1 = \frac{2}{(x_1 - x_2)^3}, \qquad \ddot{x}_2 = -\frac{2}{(x_1 - x_2)^3}.$$

Мы могли бы смотреть на эти ОДУ как на нелинейные эволюционные уравнения, интегрируемые с помощью МОЗР. Но решение системы Калоджеро — Мозера не связано с каким-либо линейным интегральным уравнением типа (3.7.5a).

(a) Покажите, что эта система ОДУ допускает подвижные алгебраические точки ветвления, т. е. при $t \to t_0$

$$x_1 \sim (-1)^{1/4} (t - t_0)^{1/2}, \qquad x_2 \sim -(-1)^{1/4} (t - t_0)^{1/2}.$$

(b) Получите указанный результат, воспользовавшись общим решением этой системы ОДУ, приведенной в разд. 3.5. Это демонстрирует важность точных редукций в ОДУ в переменных, присущих линейному интегральному уравнению.

(c) Возникшая ситуация вовсе не связана с тем, что уравнение Б—О не является дифференциальным в частных производных. Покажите, что система (3.5.36), полученная при изучении рациональных решений уравнения КдФ, также допускает подвижные алгебраические точки ветвления.

(d) Еще проще редукцию (3.7.1a) к (3.7.1c) можно получить, положив

$$u(x, t) = g(t) f(z), \qquad z = \frac{x}{(3t)^{1/3}}.$$

При этом ОДУ для $f(z)$ совпадает с (3.7.1c) и является уравнением P-типа. Покажите, что ОДУ для $g(t)$ не является уравнением P-типа. Еще раз подчеркнем, что (t) не играет никакой роли в линейном интегральном уравнении.

(e) Тем не менее следует отметить, что в обоих обсуждавшихся случаях соответствующие уравнения могут быть преобразованы к ОДУ P-типа. Возможность таких преобразований следует учесть в формулировке гипотезы о свойстве Пенлеве.

Раздел 3.8

1. (a) Покажите, что если мы положим $y = \operatorname{th} \eta (\theta - \theta^{(0)})$, то (3.8.10) можно переписать в виде

$$\hat{L}\hat{q}^{(1)} = \frac{d}{dy}(1 - y^2)\frac{d}{dy}\hat{q}^{(1)} + \left(12 - \frac{4}{1 - y^2}\right)\hat{q}^{(1)} = \hat{F}^{(1)},$$

где

$$\hat{F}^{(1)} = \frac{2\gamma}{3\eta}\frac{1}{1 + y} + \frac{2\gamma}{3\eta}\ln\frac{1 + y}{1 - y} + 2\frac{\partial\theta^{(0)}}{\partial T}.$$

(b) Учитывая, что $Lv = 0$ является уравнением Лежандра, покажите, что $v = P_3^2(y) = 15y(1 - y^2)$ является единственным

подходящим решением. Затем, воспользовавшись методом вариации постоянной, т. е. представив

$$\hat{q}^{(1)}(y) = A(y) P_3^2(y),$$

получите уравнение для $B(y) = dA/dy$:

$$\frac{dB}{dy} + \frac{2(1-4y^2)}{y(1-y^2)} B = G,$$

$$G = \frac{2\gamma}{45\eta} \frac{1-y}{y(1-y^2)^3} + \frac{2\gamma}{45\eta} \frac{1}{y(1-y^2)^2} \ln \frac{1+y}{1-y} + \frac{2}{15} \frac{\partial\theta^{(0)}}{\partial T} \frac{1}{y(1-y^2)^2}.$$

(c) Получите решение этого уравнения первого порядка

$$\hat{q}^{(1)} = \frac{\gamma}{6\eta} \left[-1 + y + \frac{3}{2}\left(1 + \frac{\eta}{\gamma} \frac{\partial\theta^{(0)}}{\partial T}\right)(1-y^2)\left(2 - y \ln \frac{1+y}{1-y}\right) + \right.$$
$$\left. + (1-y^2)\left(1 - \frac{1}{4} y \ln \frac{1+y}{1-y}\right) \ln \frac{1+y}{1-y} \right].$$

2. Рассмотрите возмущенное НУШ следующего вида:

(1) $$iq_t + q_{xx} + 2q^2 q^* = -i\varepsilon\gamma q.$$

(a) Покажите, что

$$q_0 = \eta \operatorname{sech} \eta (\theta - \theta^{(0)}) \exp [i\xi (\theta - \theta^{(0)}) + i(\sigma - \sigma^{(0)})],$$

где

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = -2\xi, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial x} = 1,$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = \eta^2 + \xi^2, \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial x} = 0,$$

является решением невозмущенного уравнения. Здесь ξ, η, $\theta^{(0)}$ и $\sigma^{(0)}$ — произвольные функции медленной переменной $T = \varepsilon t$.

(b) Предположим, что квазистационарное решение уравнения (1) имеет вид

$$q = \hat{q}(\theta, T, \varepsilon) \exp [i\xi(\theta - \theta^{(0)}) + i(\sigma - \sigma^{(0)})].$$

Подставьте его в (1) и получите

$$-\eta^2 \hat{q} + \hat{q}_{\theta\theta} + 2\hat{q}^2 \hat{q}^* = \varepsilon \hat{F}(q),$$

$$\hat{F}(q) = -i\gamma\hat{q} - i\hat{q}_T + (\theta - \theta^{(0)}) \xi_T \hat{q} - (\xi\theta_T^{(0)} + \sigma_T^{(0)}) \hat{q}.$$

Предположим, что $\hat{q}$ разлагается в ряд

$$\hat{q}(\theta, T, \varepsilon) = \hat{q}^{(0)}(\theta, T) + \varepsilon \hat{q}^{(1)}(\theta, T) + \ldots$$

и главный порядок решения есть

$$\hat{q}^{(0)} = \eta \operatorname{sech} \eta (\theta - \theta^{(0)}).$$

Покажите, что в первом по ε порядке получится

$$-\eta^2 \hat{q}^{(1)} + \hat{q}_{\theta\theta}^{(1)} + 4(\hat{q}^{(0)})^2 \hat{q}^{(1)} + 2(\hat{q}^{(0)})^2 \hat{q}^{(1)*} = \hat{F}^{(1)},$$

где $\widehat{F}^{(1)} = \widehat{F}(\hat{q}^{(0)})$. Представив $\hat{q}^{(1)} = \hat{\varphi}^{(1)} + i\hat{\psi}^{(1)}$ ($\hat{\varphi}^{(1)}$, $\hat{\psi}^{(1)}$ — вещественные функции), получите

$$\widehat{L}\hat{\varphi}^{(1)} \equiv -\eta^2\hat{\varphi}^{(1)} + \hat{\varphi}^{(1)}_{\theta\theta} + 6(\hat{q}^{(0)})^2\hat{\psi}^{(1)} = \operatorname{Re}[\widehat{F}^{(1)}],$$

$$\widehat{M}\hat{\psi}^{(1)} = -\eta^2\hat{\psi}^{(1)} + \hat{\psi}^{(1)}_{\theta\theta} + 2(\hat{q}^{(0)})^2\hat{\psi}^{(1)} = \operatorname{Im}[\widehat{F}^{(1)}].$$

(c) Заметив, что операторы $\widehat{L}$, $\widehat{M}$ являются самосопряженными и $\widehat{L}\hat{q}^{(0)}_{\theta} = 0$, $\widehat{M}\hat{q}^{(0)} = 0$, покажите, что условия разрешимости даются условиями секулярности

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{q}^{(0)}_{\theta} \operatorname{Re}[\widehat{F}^{(1)}]\,d\theta = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{q}^{(0)} \operatorname{Im}[\widehat{F}^{(1)}]\,d\theta = 0.$$

Воспользуйтесь этими условиями и получите эволюционные уравнения

$$\frac{\partial\xi}{\partial T} = 0, \qquad \frac{1}{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial T} = -2\gamma,$$

показывающие, что амплитуда солитона уменьшается ($\gamma > 0$), а скорость остается неизменной. Затем вычислите решение

$$\hat{\varphi}^{(1)} = -\frac{1}{2\eta}\left(\xi\theta^{(0)}_T + \sigma^{(0)}_T\right)\{1 - (\theta - \theta^{(0)})\operatorname{th}\eta(\theta - \theta^{(0)})\}\operatorname{sech}\eta(\theta - \theta^{(0)}),$$

$$\hat{\psi}^{(1)} = \frac{\eta}{2}(\theta - \theta^{(0)})\left\{\theta^{(0)}_T + \gamma(\theta - \theta^{(0)})\right\}\operatorname{sech}\eta(\theta - \theta^{(0)})$$

(при достаточно больших $|\theta - \theta^{(0)}|$ это разложение следует модифицировать аналогично тому, как это было сделано в случае уравнения КдФ). Здесь мы имеем два произвольных параметра $\theta^{(0)}$ и $\sigma^{(0)}$, определяющих фазу и пространственное расположение солитона. Покажите, что в случае задачи с начальными условиями мы должны удовлетворить условиям ортогональности

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{q}^{(0)}_{\theta}\hat{\psi}^{(1)}\,d\theta = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \hat{q}^{(0)}\hat{\varphi}^{(1)}\,d\theta = 0,$$

которые дают

$$\frac{\partial\theta^{(0)}}{\partial T} = 0, \qquad \frac{\partial\sigma^{(0)}}{\partial T} = 0.$$

Покажите, что эти условия, как в случае уравнения КдФ, можно получить из следующих соотношений (модифицированных за-

конов сохранения):

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} qq^*\,dx = -2\varepsilon\gamma\int_{-\infty}^{\infty} qq^*\,dx,$$

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} (q_xq^* - q_x^*q)\,dx = -2\varepsilon\gamma\int_{-\infty}^{\infty} (q_xq^* - q_x^*q)\,dx.$$

3. Рассмотрите многомерное НУШ (Захаров, Рубенчик (1974) [543]):

$$iq_t + q_{xx} + 2|q|^2 q = \varepsilon^2\alpha q_{yy}.$$

(a) Покажите, что имеется следующее точное невозмущенное решение этого уравнения:

$$q^{(0)} = \hat{q}^{(0)}(x)\, e^{i\lambda^2(t+\sigma)^{(0)}},$$

$$\hat{q}^{(0)}(x) = \lambda\,\operatorname{sech}\lambda\,(x+\theta^{(0)}).$$

(b) Пусть $T=\varepsilon t$, $\sigma^{(0)}=\sigma^{(0)}(T,\ y)$, $\theta^{(0)}=\theta^{(0)}(T,\ y)$ и

$$iq_t + q_{xx} + 2|q|^2 q = \varepsilon^2\alpha q_{yy} - i\varepsilon q_T.$$

Положите

$$q = \hat{q}(x)\, e^{i\lambda^2(t+\sigma^{(0)})}$$

и получите

$$-\lambda^2\hat{q} + \hat{q}_{xx} + 2|\hat{q}|^2\hat{q} = \varepsilon\lambda^2\sigma_T^{(0)}\hat{q} - i\varepsilon\hat{q}_T +$$
$$+\varepsilon^2\lambda\left(\hat{q}_{yy} + 2i\lambda^2\sigma_y^{(0)}\hat{q}_y + i\lambda^2\sigma_{yy}\hat{q} - \lambda^4(\sigma_y^{(0)})^2\hat{q}\right).$$

Разложив $\hat{q}$ в ряд $\hat{q}=\hat{q}^{(0)}+\varepsilon\hat{q}^{(1)}+\ldots$, покажите, что для обсуждавшегося солитонного решения

$$-\lambda^2\hat{q}^{(0)} + \hat{q}_{xx}^{(0)} + 2|\hat{q}^{(0)}|^2\hat{q}^{(0)} = 0.$$

Покажите, что в порядке $O(\varepsilon)$

$$-\lambda^2\hat{q}^{(1)} + \hat{q}_{xx}^{(1)} + 4(\hat{q}^{(0)})^2\hat{q}^{(1)} + 2(\hat{q}^{(0)})^2\hat{q}^{(1)*} = \lambda^2\sigma_T^{(0)}\hat{q}^{(0)} - i\hat{q}_T^{(0)}.$$

(c) Расщепите это уравнение на вещественную и мнимую части $\hat{q}^{(1)}=\varphi^{(1)}+i\psi^{(1)}$ и получите

$$L_0\psi_1 = -\hat{q}_T^{(0)} = -\theta_T^{(0)}\hat{q}_x^{(0)} = F_0^{(1)},$$

$$L_1\varphi_1 = \lambda^2\sigma_T^{(0)}\hat{q}^{(0)} = F_1^{(1)},$$

где L_0, L_1 — самосопряженные операторы

$$L_0 \equiv \frac{d^2}{dx^2} + 2(\hat{q}^{(0)})^2 - \lambda^2,$$

$$L_1 \equiv \frac{d^2}{dx^2} + 6(\hat{q}^{(0)})^2 - \lambda^2.$$

(d) Заметив, что $L_0\hat{q}^{(0)}$, $L_1 q_x^{(0)}=0$, получите условия совместимости

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{q}^{(0)} F_0^{(n)}\,dx=0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{q}_x^{(0)} F_1^{(n)}\,dx=0$$

и проверьте, что ψ_1, φ_1 даются явными формулами

$$\psi_1=-\frac{\theta_T^{(0)}}{2}x\hat{q}^{(0)},$$

$$\varphi_1=\frac{1}{2}\lambda\sigma_T^{(0)}\frac{\partial}{\partial x}\hat{q}^{(0)}.$$

(e) Покажите, что в порядке $O(\varepsilon^2)$ функции удовлетворяют уравнениям

$$L_0\psi^{(2)}=\lambda^2\sigma_T^{(0)}\psi^{(1)}-\varphi_T^{(1)}+2\alpha\lambda^2\sigma_y^{(0)}\hat{q}_y^{(0)}+\alpha\lambda^2\sigma_{yy}^{(0)}\hat{q}_y^{(0)}-4\varphi^{(1)}\psi^{(1)}\hat{q}^{(0)}=F_0^{(2)},$$

$$L_1\varphi^2=\lambda^2\sigma_T^{(0)}\varphi^{(1)}+\psi^{(1)}+\alpha\hat{q}_{yy}^{(0)}-\alpha\lambda^4\left(\sigma_y^{(0)}\right)^2\hat{q}^{(0)}-$$

$$-2\left((\varphi^{(1)})^2-(\psi^{(1)})^2\right)\hat{q}^{(0)}-4\hat{q}^{(0)}\left((\varphi^{(1)})^2+(\psi^{(1)})^2\right)=F_1^{(2)}.$$

(f) Покажите, что условия совместимости дают

$$\int\hat{q}^{(0)}\left(-\varphi_T^{(1)}+\alpha\lambda^2\sigma_{yy}^{(0)}\hat{q}^{(0)}\right)dx=0,$$

$$\sigma_{TT}^{(0)}-4\alpha\lambda^2\sigma_{yy}^{(0)}=0$$

и

$$\int\hat{q}_x^{(0)}\left(\psi_T^{(1)}+\alpha q_{yy}^{(0)}\right)dx=0,$$

или

$$\theta_{TT}^{(0)}+\frac{4\lambda^2\alpha}{3}\theta_{yy}^{(0)}=0.$$

Поэтому независимо от знака α мы получаем, что это решение НУШ неустойчиво относительно поперечных возмущений. Как мы уже отмечали, в случае $\alpha=-1$ уравнение (3.8.46) может иметь коллапсирующее решение (см., например, Захаров и Сынах (1976) [549]).

4. В этом упражнении мы покажем, что результаты предыдущего упражнения можно получить из других соображений.

(a) Вначале линеаризуем уравнения из упр. 3, положив $q=q^{(0)}+q^{(1)}$, $|q^{(0)}|\gg|q^{(1)}|$, и найдем

$$iq_t^{(1)}+q_{xx}^{(1)}+4|q^{(0)}|^2q^{(1)}+2q^{(0)2}q^{(1)*}=\alpha q_{yy}^{(1)}.$$

(b) Определим

$$q^{(0)} = \lambda \operatorname{sech}(\lambda x)\, e^{i\lambda^2 t} \equiv \hat{q}^{(0)}(x)\, e^{i\lambda^2 t},$$
$$q^{(1)} = (\varphi(x) + i\psi(x))\, e^{i\lambda^2 t} e^{\Omega t} \sin ky$$

и покажем, что φ, ψ удовлетворяют системе уравнений

$$(L_0 + \alpha k^2)\, \psi = -\Omega\varphi,$$
$$(L_1 + \alpha k^2)\, \varphi = \Omega\psi,$$

где L_0, L_1 даны в упр. 3.

(c) Разложите в длинноволновом пределе $k \to 0$:

$$\Omega = k\Omega^{(1)} + k^2\Omega^{(2)} + \ldots,$$
$$\varphi = \varphi^{(0)} + k\varphi^{(1)} + \ldots,$$
$$\psi = \psi^{(0)} + k\psi^{(1)} + \ldots.$$

Тогда в порядке $O(1)$ имеем

$$L_0\psi^{(0)} = 0,$$
$$L_1\varphi^{(0)} = 0$$

и возьмем безразлично устойчивое решение

$$\psi^{(0)} = A^+\hat{q}^{(0)},$$
$$\varphi^{(0)} = A^-\hat{q}^{(0)}_x.$$

В порядке $O(k)$

$$L_0\psi^{(1)} = -\Omega^{(1)}\varphi^{(0)} = F_0^{(1)},$$
$$L_1\varphi^{(1)} = \Omega^{(1)}\psi^{(0)} = F_1^{(1)}.$$

Покажите, что имеется решение

$$\psi^{(1)} = -\frac{1}{2}\,\Omega^{(1)} A^- \hat{q}^{(0)}_x,$$
$$\varphi^{(1)} = \frac{1}{2\lambda}\,\Omega^{(1)} A^+ \frac{\partial}{\partial\lambda}\,\hat{q}^{(0)}.$$

d) Покажите, что условия совместимости удовлетворяются автоматически при $n = 1$. А в порядке $O(k^2)$ мы имеем

$$L_0\psi^{(2)} = -\Omega^{(2)}\varphi^{(1)} - \alpha\psi^{(0)} - \Omega^{(1)}\varphi^{(1)} = F_0^{(2)},$$
$$L_1\varphi^{(2)} = \Omega^{(2)}\psi^{(0)} - \alpha\varphi^{(0)} + \Omega^{(1)}\psi^{(1)} = F_1^{(2)}.$$

Покажите, что теперь условия совместимости дают

$$\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \hat{q}^{(0)}\psi^{(0)}\, dx + \Omega^{(1)} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{q}^{(0)}\, dx = 0,$$

или

$$\Omega^{(1)\,2} = 4\lambda^2\alpha,$$

и

$$\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \hat{q}_x^{(0)} \varphi^{(0)}\, dx - \Omega^{(1)} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{q}_x^{(0)} \psi^{(1)}\, dx = 0,$$

или

$$\Omega^{(1)\,2} = \frac{4}{3}\,\alpha\hat{\lambda}^2.$$

Последнее согласуется с результатами упр. 3.

Глава 4. Приложения

В этой главе мы рассмотрим некоторые вполне интегрируемые уравнения в качестве моделей конкретных явлений. Уравнения, представляющие физические модели, могут обслуживать сразу много различных физических ситуаций, так как в основу их вывода положены сходные предположения. В каждом случае мы остановимся главным образом на двух-трех физических задачах для того, чтобы продемонстрировать «типичный способ» вывода этих уравнений. Другие задачи могут быть рассмотрены аналогичным образом. При таком подходе из нашего поля зрения выпадают некоторые важные примеры, однако в данной книге невозможно дать исчерпывающий обзор нелинейных явлений. Другие приложения обсуждаются в работах [254], [511], [344] и [510].

В большинстве случаев вывод уравнений осуществляется более или менее стандартно, путем исследования относительно малых отклонений физической системы от ее равновесного состояния. В главном порядке это означает просто линеаризацию задачи около равновесного состояния. Затем делается попытка построить асимптотическое разложение; при этом в следующих порядках обычно возникают секулярные члены. Для того чтобы исключить секулярные члены с целью расширить область применимости разложения, используют метод многих времен (например, Коул (1968) [115]). Таким образом, наиболее общей чертой нелинейных эволюционных уравнений является то, что они возникают в результате исключения секулярных членов в формальном асимптотическом разложении.

Тот факт, что эти уравнения играют именно такую роль, приводит к некоторым следствиям, полезным для установления связи между теорией солитонов и физическими явлениями.

(i) Эволюционные уравнения являются нелинейными, и их решения необязательно малы. Несмотря на это, решения, имеющие первый порядок, в физической задаче соответствуют относительно малым отклонениям от равновесного состояния.

(ii) Преимущество нелинейных эволюционных уравнений состоит не в том, что они позволяют изучать большие отклонения от равновесного состояния, а скорее в том, что появилась возможность исследования малых отклонений в течение длительного времени.

(iii) Нелинейные эволюционные уравнения охватывают следующий по сравнению с линейными задачами временной масштаб. При интерпретации наблюдений физических явлений не имеет смысла говорить о солитонах, если время наблюдения не превышает характерного времени, соответствующего линейной задаче.

(iv) В поведении решений вполне интегрируемых уравнений не проявляется стохастичность. Однако аналогичный вывод о физической системе справедлив лишь для относительно малых отклонений от равновесия и для соответствующих характерных временных масштабов. Стохастичность может иметь место для больших отклонений от равновесия и на бóльших временах.

Прежде чем мы обсудим конкретные примеры, уместно привести еще один комментарий общего характера. Мир, в котором мы живем, имеет 3 (пространственных) + 1 (временну́ю) размерности, в то время как изучаемые нами уравнения являются $(1+1)$-мерными. В каком смысле эти уравнения могут моделировать физические явления?

В зависимости от конкретной проблемы можно убедиться, что линеаризованная задача допускает распространение волн в $(1+1)$ или $(3+1)$ измерениях. В первом случае трудностей не существует; нелинейные эволюционные уравнения описывают явления, которые по сути своей $(1+1)$-мерны. В двух других случаях эти уравнения возникают только после того, как они сведены от размерностей $(2+1)$ или $(3+1)$ к размерности $(1+1)$. Тогда возможны две интерпретации.

(i) Уравнение размерности $(1+1)$ является (нетривиальной) модельной задачей, решение которой позволяет понять суть явлений, имеющих место в задачах с бóльшими размерностями. Однако сравнение решений уравнения непосредственно с физическими наблюдениями не является целью данной работы.

(ii) Уравнения размерности $(1+1)$ имеют непосредственный физический смысл. Существуют реальные условия, когда решение задачи большей размерности, по крайней мере приблизительно, может эволюционировать таким образом. Это возможно только в том случае, если $(1+1)$-мерные решения устойчивы относительно возмущений по остальным измерениям. В противном случае такая эволюция в низшей размерности теоретически возможна, но практически неправдоподобна.

Ниже мы обсудим все такие случаи, имеющие место в приложениях.

4.1. КдФ и родственные уравнения. Исходной моделью служит уравнение Кортевега — де Фриза

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{4.1.1}$$

Однако изменение исходных упрощающих предпосылок приводит к появлению других интегрируемых моделей. Они включают в себя модифицированное уравнение КдФ

(4.1.2) $$u_t + 6\sigma u^2 u_x + u_{xxx} = 0,$$

уравнение Бенджамина — Оно

(4.1.3) $$u_t + 2uu_x + H[u_{xx}] = 0,$$

где H — преобразование Гильберта

$$H[f] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)\,dy}{y - x},$$

и уравнение Кадомцева — Петвиашвили

(4.1.4) $$(u_t + 6uu_x + \sigma u_{xxx})_x + u_{yy} = 0.$$

Каждое из них возникает как условие, необходимое для устранения секулярных членов формального асимптотического разложения по малой амплитуде. От уравнений, рассмотренных в разд. 4.2 и 4.3, их отличает то, что они появились в задачах, которые в главном порядке не обладают дисперсией. Поэтому низшим порядком аппроксимации является волновое уравнение

$$\varphi_{\tau\tau} = c^2 \varphi_{\chi\chi},$$

которое обычно возникает в пределе длинных волн, но существуют и исключения.

Сущность вывода уравнений, который мы сейчас рассматриваем, была понята несколькими исследователями, включая Бенни (1966) [55], Гарднера и Су (1969) [175], Карпмана (1975) [245]. Метод был формализован Таниути, Ваем и др. (например, (1968) [478]) и был назван ими упрощенным методом возмущений. Ряд приложений, помимо тех, которые здесь обсуждаются, может быть найден в работах, на которые ссылаются Карпман [245], Ядзима и Какутани [511], Махань [344] и Ядзима и Исикава [510].

4.1.а. Волны на воде. Проблема длинных волн на воде берет начало с ранней экспериментальной работы Рассела (см. (1938) [438], (1844) [438]) и теорий Эйри (1845) [37]. Первоначальной целью Кортвега и де Фриза (1895) [291] было создание теории, альтернативной теории Эйри, которая бы точнее соответствовала наблюдениям Рассела. Обширное описание этого вопроса с несколько отличной от приводимой здесь точки зрения было дано Лэмбом (1932) [314], Стокером (1957) [466], Вехаусеном и Лейтоном (1960) [500], Уиземом (1974) [506] и Майлсом (1980) [378].

Классическая задач волн на воде заключается в определении безвихревого движения невязкой несжимаемой однородной жидкости с плотностью ρ под действием постоянной силы тяжести. Жидкость находится над горизонтальным непроницаемым дном, простирающимся бесконечно ($z = -h$), и имеет свободную поверхность $z = \zeta(x, y, t)$, на которой действует сила поверхностного натяжения T. Во многих приложениях сила поверхностного натяжения несущественна и может быть приравнена нулю. Мы сохраним ее, потому что для наших целей учет поверхностного натяжения в некоторых случаях важен.

Жидкость имеет потенциал скоростей φ, удовлетворяющий уравнению

$$\nabla^2\varphi = 0, \quad -h < z < \zeta(x, y, t) \tag{4.1.5}$$

(безвихревое движение несжимаемой жидкости). Потенциал подчиняется граничным условиям на дне ($z = -h$)

$$\varphi_z = 0 \text{ (дно непроницаемо)} \tag{4.1.6}$$

и на свободной поверхности ($z = \zeta$)

$$\frac{D\zeta}{Dt} \equiv \zeta_t + \varphi_x\zeta_x + \varphi_y\zeta_y = \varphi_z \text{ (кинематическое условие)}, \tag{4.1.7a}$$

$$\varphi_t + g\zeta + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 = \frac{T}{\rho} \times \tag{4.1.7b}$$

$$\times \frac{\zeta_{xx}\left(1+\zeta_y^2\right) + \zeta_{yy}\left(1+\zeta_x^2\right) - 2\zeta_{xy}\zeta_x\zeta_y}{\left(1+\zeta_x^2+\zeta_y^3\right)^{3/2}} \text{ (динамическое условие).}$$

Нужны также начальные и граничные условия по (x, y). Если рассматриваемые волны являются уединенными, то $|\nabla\varphi|$ и ζ должны стремиться к нулю при $(x^2 + y^2) \to \infty$. В других задачах могут быть уместны периодические по x и y условия.

Мы можем линеаризовать (4.1.5—7) около состояния $|\nabla\varphi| = 0$, $\zeta = 0$ и искать решения линеаризованных уравнений, пропорциональные $\exp\{i(kx + my - \omega t)\}$ (см., например, [314]). Результатом является линеаризованное дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = (g\varkappa + \varkappa^3 T)\,\mathrm{th}\,(kh), \tag{4.1.8}$$

где $\varkappa = k^2 + m^2$. (Эти следствия, вытекающие из линейной теории, обсуждаются в приложении.) Отсюда вычисляется групповая скорость и показывается, что имеется дисперсия для большинства волновых чисел, и только в окрестности $\varkappa = 0$ (т. е. для длинных волн) дисперсия является слабой. Это существенный момент при выводе уравнения КдФ (мы будем рассматривать только такие волны, для которых дисперсия в линеаризо-

ванной задаче мала). Во многих задачах это осуществляется при $\varkappa = 0$.

Для вывода уравнения КдФ мы предполагаем, что:

(A) Движение строго двумерно, $m = 0$.

(B) Характерный масштаб волны в направлении x много больше глубины:

$$(kh)^2 \ll 1.$$

(C) Амплитуды волн малы:

$$\varepsilon = \frac{|\zeta|_{\max}}{h} \ll 1.$$

(D) Две последние величины имеют одинаковый порядок:

$$(kh)^2 = O(\varepsilon).$$

Замечание. При таких дополнительных предположениях (4.1.5—7) преобразуются к упрощенной модели, которая, как это станет ясно впоследствии, является уравнением (4.1.1). Модель является самосогласованной, если ее решения удовлетворяют перечисленным предположениям для $t > 0$, при условии что им удовлетворяло начальное условие. Тот факт, что модель выведена явно рациональным способом, еще не гарантирует ее самосогласованности или реалистичности.

Замечание. Предположение (A) можно ослабить. Необходимо только, чтобы волны были почти одномерными, или $(m/k)^2 \ll 1$. Мы можем заменить (A) условием

$$\left(\frac{m}{k}\right)^2 \ll \varepsilon$$

и по-прежнему получим (4.1.1); однако если взамен мы предположим

$$\left(\frac{m}{k}\right)^2 = O(\varepsilon),$$

то тот же способ вывода приведет к (4.1.4).

Замечание. Предположение (D) является примером «принципа максимального упрощения» Краскала (1963) [295], который гласит, что в рядах теории возмущений, содержащих два или больше малых параметров, наибольший интерес представляет выбор масштаба, максимально упрощающего задачу.

Предположения (A)—(D) наводят на мысль ввести в рассмотрение безразмерные переменные (помеченные *):

$$z^* = \frac{z}{h}, \quad x^* = \sqrt{\varepsilon}\,\frac{x}{h}, \quad t^* = \frac{\sqrt{\varepsilon g}}{h}\,t, \tag{4.1.9}$$
$$\varphi = h\sqrt{\varepsilon g h}\,\varphi^*, \quad \zeta = \varepsilon h \zeta^*,$$

Если φ аналитична при $z=-h$, ее можно представить в виде степенного сходящегося ряда:

$$\varphi = h\sqrt{\varepsilon g h}\sum_{n=0}^{\infty}(z^*+1)^n\varphi_n^*(x^*,\ t^*).$$

Рэлей в 1876 г. [426] обнаружил, что в случае длинных волн это разложение является асимптотическим. Подставляя этот ряд в (4.1.5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z^*, получаем

$$\varphi_{n+2}^* = -\frac{\varepsilon}{(n+2)(n+1)}\frac{\partial^2\varphi_n^*}{\partial(x^*)^2}. \tag{4.1.10}$$

Из (4.1.6) и (4.1.10) следует, что $\varphi_{2n+1}^*=0$. Таким образом,

$$\varphi = h\sqrt{gh\varepsilon}\left[\varphi_0^* - \frac{\varepsilon}{2!}(z^*+1)^2\frac{\partial^2\varphi_0^*}{\partial(x^*)^2} + \frac{\varepsilon^2}{4!}(z^*+1)^4\frac{\partial^4\varphi_0^*}{\partial(x^*)^4} + \ldots\right]. \tag{4.1.11}$$

До этого момента мы не сделали никаких приближений.

В главном порядке условия на свободной поверхности можно записать в виде

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\zeta^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x^*}\frac{\partial\varphi_0^*}{\partial x^*} = O(\varepsilon),\\ &\frac{\partial}{\partial t^*}\frac{\partial\varphi_0^*}{\partial x^*} + \frac{\partial\zeta^*}{\partial x^*} = O(\varepsilon).\end{aligned} \tag{4.1.12}$$

Чтобы решить (4.1.12), предположим, что

$$\zeta^* = \zeta_0 + \varepsilon\zeta_1 + \ldots, \qquad \frac{\partial\varphi_0^*}{\partial x^*} = u_0 + \varepsilon u_1 + \ldots. \tag{4.1.13}$$

Чтобы избавиться от секулярных членов, которые возникают в порядке $O(\varepsilon)$, введем медленное время (см. [115])

$$\tau = \varepsilon t^*, \tag{4.1.14a}$$

так что

$$\frac{\partial}{\partial t^*} \to \frac{\partial}{\partial t^*} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau}. \tag{4.1.14b}$$

Теперь (4.1.12) превратилось в линейное волновое уравнение для $(\zeta_0,\ u_0)$, общее решение которого имеет вид

$$\begin{aligned}\zeta_0 &= f(x^*-t^*;\ \tau) + g(x^*+t^*;\ \tau),\\ u_0 &= f(x^*-t^*;\ \tau) - g(x^*+t^*;\ \tau).\end{aligned} \tag{4.1.15}$$

Все это можно выразить через (линейные) характеристические переменные

$$r = x^* - t^* = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{h}(x - \sqrt{gh}\, t), \qquad (4.1.16)$$
$$l = x^* + t^* = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{h}(x + \sqrt{gh}\, t).$$

Таким образом, за короткое время ($t^* = O(1)$) произвольное начальное условие расщепляется на волны, бегущие вправо и влево. В течение этого времени наблюдение солитонов невозможно ввиду того, что *каждое* решение представляет собой (линейную) суперпропорцию волн неизменной формы. В данном случае взаимодействие отсутствует, потому что нелинейные члены слишком малы, чтобы их влияние успело проявиться.

В следующем порядке (4.1.12) принимает вид

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial t^*} + \frac{\partial u_1}{\partial x^*} = -\left[\frac{\partial \zeta_0}{\partial \tau} + \frac{\partial (u_0 \zeta_0)}{\partial x^*} - \frac{1}{6}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^{*3}}\right], \qquad (4.1.17)$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial t^*} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x^*} = -\left[\frac{\partial u_0}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x^*}\left(\frac{u_0^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^{*2}\partial t^*} + \hat{T}\frac{\partial^3 \zeta_0}{\partial x^{*3}}\right],$$

где $\hat{T} = T/\rho g h^2$ — безразмерное поверхностное натяжение.

Эти уравнения проще интегрировать, используя характеристические переменные (4.1.16). Решения, полученные таким образом, содержат слагаемые, линейно растущие по l, и другие, линейно растущие по r. Они являются секулярными членами и приводят к неравномерной сходимости разложений (4.1.13). Мы избавимся от них, положив коэффициенты при l и r равными нулю:

$$2\frac{\partial f}{\partial \tau} + 3f\frac{\partial f}{\partial r} + \left(\frac{1}{3} - \hat{T}\right)\frac{\partial^3 f}{\partial r^3} = 0, \qquad (4.1.18)$$
$$-2\frac{\partial g}{\partial \tau} + 3g\frac{\partial g}{\partial l} + \left(\frac{1}{3} - \hat{T}\right)\frac{\partial^3 g}{\partial l^3} = 0.$$

Таким образом, волны, бегущие влево и вправо, эволюционируют согласно своим собственным уравнениям КдФ, описывающим взаимодействия внутри каждого из двух наборов волн в течение длительного времени ($\tau = \varepsilon l^* = O(1)$).

На поверхности раздела вода — воздух $(1/3 - \hat{T}) > 0$, если $h > 0{,}5$ см. Обычно $\hat{T} \ll 1/3$, и мы вполне можем пренебречь T. Тогда форма поверхности, соответствующая одному солитону, принимает вид

$$\frac{z(x, t)}{h} = \frac{4}{3}\varepsilon a^2 1/\mathrm{ch}^2\left\{\frac{\sqrt{\varepsilon}\, a}{h}\left[x \pm \sqrt{gh}\left(1 + \frac{2\varepsilon a^2}{3}\right)t + x_0\right]\right\}. \qquad (4.1.19)$$

Отметим, что:

(i) Произвол в выборе ε несуществен, потому что в формулу (4.1.19) входит лишь комбинация (εa^2).

(ii) Солитоны поднимают свободную поверхность, в каком бы направлении они ни двигались.

(iii) Скорость каждого солитона превышает $\sqrt{gh}$.

(iv) В главном порядке скорость солитона с амплитудой α равна $c=\sqrt{g(h+\alpha)}$. Это выражение было найдено Расселом (1938) [437] экспериментально.

(v) Для тонкого слоя воды $\hat{T}>1/3$, и утверждения (ii), (iii) следует заменить на противоположные.

Взаимодействие между волнами, бегущими влево и вправо, может быть найдено интегрированием (4.1.17):

$$4\zeta_1(l,\ r;\ \tau)=[\partial_l g(l)-\partial_l g(l_0)]\int_{r_0}^{r} f\,dr+ \\ +[\partial_r f(r)-\partial_r f(r_0)]\int_{l_0}^{l} g\,dl+2[g(l)-g(l_0)][f(r)-f(r_0)]; \tag{4.1.20}$$

выражение для u_1 имеет аналогичный вид. Для того чтобы эти члены не стали секулярными, потребуем также

$$|f|,\ |\partial_r f|,\ \left|\int f\,dr\right|,\ |g|,\ |\partial_l g|,\ \left|\int g\,dl\right|<\infty. \tag{4.1.21}$$

Эти условия гарантируют, что взаимодействие между левой и правой волнами является одновременно слабым и локализованным. Для применимости модели КдФ необходимо, чтобы условия (4.1.21) удовлетворялись в течение всего времени (τ), если им удовлетворяют начальные условия.

В предположениях (A)—(D) мы заменили (4.1.5—7) упрощенной задачей, решение котрой формально аппроксимирует решение уравнений (4.1.5—7) с точностью до $O(\varepsilon^2)$. Именно в этом смысле уравнение КдФ моделирует длинные волны умеренной амплитуды на воде. Прежде чем сравнивать результаты, предсказанные этой моделью, с экспериментальными данными, можно сделать несколько замечаний по способу ее вывода.

(i) «Модель КдФ» для волн на воде фактически состоит из линейного волнового уравнения (4.1.12) для «быстрого времени» t^* и двух уравнений КдФ на масштабе времен τ. Модель должна быть асимптотически справедливой при $\varepsilon\to 0$, и важно чтобы как (4.1.12), так и (4.1.18) оставались нетривиальными в пределе $\varepsilon\to 0$. Как показал Краскал (1975) [298], модель КдФ предпочтительнее в этом отношении других моделей длинных волн умеренной амплитуды на воде, таких, как уравнение Бус-

синеска (4.1.22):

$$u_{tt} = u_{xx} + \varepsilon\,[(u^2)_{xx} + u_{xxxx}] + O(\varepsilon^2). \quad (4.1.22)$$

В пределе $\varepsilon \to 0$ (4.1.22) трансформируется в (4.1.12) и (4.1.18).

(ii) В выводе уравнений, приведенном здесь, τ представляло собой медленно меняющееся время, и решения КдФ при фиксированном τ соответствуют моментальному снимку волны на воде. В свете (4.1.16) x^* и t^* являются в некоторой степени взаимозаменяемыми, и вместо τ можно ввести в рассмотрение медленно меняющуюся пространственную переменную χ. По-прежнему остается два уравнения КдФ, но теперь решение КдФ при фиксированном χ будет соответствовать движению поверхности воды при прохождении волны над измерительным зондом, установленным в определенном месте. Таким способом выполнено большинство волновых измерений.

(iii) Этот вывод является формальным и фактически не доказывает того, что решения КдФ являются асимптотическими по отношению к (4.1.5—7). Такого доказательства в нашем распоряжении нет. В действительности лишь недавно было доказано, что (4.1.5—7) допускают существование волн с углом наклона поверхности воды вплоть до $\pi/6$, т. е. вплоть до предельного случая Стокса (Амик и Толанд (1979) [40]).

(iv) Жидкость считается невязкой, и модель не допускает никакой диссипации. Но вода имеет конечную вязкость, и можно оценить характерное время диссипации на основе ламинарного или турбулентного погранслоев [275]. Для применимости модели КдФ необходимо, чтобы характерное время диссипации намного превышало характерный временной масштаб КдФ ($\tau = O(1)$).

(v) Исходные уравнения движения (4.1.5—7) инвариантны относительно преобразований Галилея. Из (4.1.15b) следует, что уравнения КдФ сохраняют эту инвариантность, если f (или g) интерпретировать как горизонтальную скорость. Поэтому преобразование

$$\tau \to \tau, \quad r \to r - c\tau, \quad f \to f + c$$

не изменяет (4.1.18a).

(vi) Рассмотренный вывод уравнения КдФ наводит на мысль, что его можно получить лишь при отсутствии вихрей. Но, как показал Бенни [55], это неверно: см. также [52].

(vii) Динамическое условие на свободной поверхности (4.1.7b) означает, что давление на ней равно нулю. Для большинства случаев волн на воде это выполняется лишь приблизительно. Более точным является утверждение, что давление должно совпадать с давлением воздуха на этой поверхности, т. е. поверхностные волны фактически являются внутренними волна-

ми. Ввиду того что отношение плотности воздуха к плотности воды равно приблизительно 10^{-3}, этим тонким различием обычно пренебрегают. Однако для длинных волн ($kh \ll 10^{-3}$) этим эффектом пренебрегать нельзя, поэтому в качестве соответствующей модели следовало бы выбрать уравнение (4.1.3), а не (4.1.1). Аналогичные соображения применяются при исследовании вращения Земли и формы ее поверхности.

Уравнение КдФ было опробовано как модель волн на воде Забужским и Галвином [522], Хаммаком и Сигуром [196, 197], Вейдманом и Максуорси [501]. До сих пор заслуживает внимания также первая экспериментальная работа Рассела (1838, 1845) [437, 438].

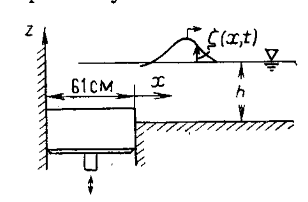


Рис. 4.1. Схема волнопродуктора (Хаммак и Сигур [196]).

Обширная работа в этом направлении, которая сейчас будет обсуждаться, была проделана Хаммаком и Сигуром. Эксперимент осуществлялся в бассейне длиной 31,6 м, глубиной 61 см и шириной 39,4 см. Как схематично изображено на рис. 4.1, волнопродуктор состоит из прямоугольного поршня, устройства для управления им и стен бассейна. Поршень в экспериментах, которые будут обсуждаться, имел длину 61 см и ширину 39,4 см. Вертикальное движение поршня задавалось для каждого эксперимента индивидуально.

Во время эксперимента в нескольких точках вдоль бассейна были проведены измерения при помощи датчиков с параллельными проволочными сопротивлениями. В первой серии экспериментов (1974 г.) глубина жидкости равнялась 5 см, измерения проводились при $x/h = 0$, 20, 120 и 400, где $x = 0$ на краю поршня. Во второй серии (1978 г.) $h = 10$ см, волны измерялись при $x/h = 0$, 50, 100 и 200.

На рис. 4.2 изображены волны, генерируемые простым приподниманием поршня. Движение поршня было достаточно быстрым для того, чтобы форма волны при $x/h = 0$ соответствовала форме поршня (благодаря наличию стенки у левого края поршня длина волны, измеряемая в точке $x = 0$, равнялась удвоенной длине поршня, а высота — половине его смещения).

На коротких временах, согласно (4.1.15), движение должно осуществляться путем параллельного переноса со скоростью $\sqrt{gh}$. Волна, измеренная при $x/h = 20$ (рис. 4.2, б), приближенно соответствует этому описанию; ее форма в основном та же, что у волны в точке $x = 0$. (Фронт волны изображен слева.) Из рисунка видно, что между сменяющимися конфигурациями (в движущейся системе отсчета, перемещающейся со скоростью $\sqrt{gh}$), нет горизонтального смещения.

Солитоны, возникающие на следующем временном масштабе, можно видеть на рис. 4.2, *г* и *в*. Решение задачи на собственные значения для оператора Шрёдингера (1.3.33) с измеренной при $x = 0$ волной в качестве потенциала дает три собственных значения, соответствующие трем солитонам. Это отвечает трем положительным более или менее неизменным волнам, наблюдаемым в точках $x/h = 180$ и $x/h = 400$. Согласно (4.1.19), все эти волны на рисунках должны смещаться влево, так как все их скорости превышают $\sqrt{gh}$. То, что этот эффект в эксперименте не наблюдается, свидетельствует о влиянии вязкости.

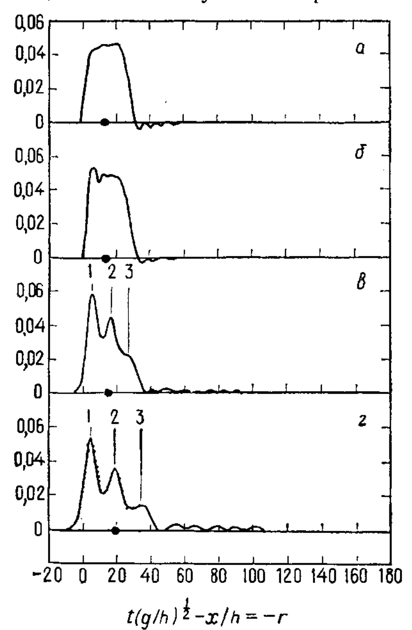


Рис. 4.3. Эволюция длинной положительной волны на поверхности воды в три солитона КдФ; $h = 5$ см. Сплошная линия соответствует измеренному профилю, пунктирная — вычисленному с использованием (4.1.19) профилю солитона: (*а*) $x/h = 0$; (*б*) $x/h = 20$; (*в*) $x/h = 180$; (*г*) $x/h = 400$. (Хаммак и Сигур [196].)

И все-таки, основываясь на наблюдении формы волн, мы утверждаем, что они являются солитонами. Профиль солитона определяется из (4.1.14) после того, как известна его амплитуда. Были измерены пики амплитуд первых двух волн на рис. 4.2 и отмечены точками результаты вычислений (на основе этих измерений) по формуле (4.1.19). Соответствие с измеренными профилями волн является поразительным.

Результаты, приведенные на рис. 4.2, раскрывают следующую картину длинных волн умеренной амплитуды на воде.

(i) Существует быстрый (линейный) масштаб времени, в течение которого волны, бегущие вправо и влево, отделяются друг от друга.

(ii) Существует более медленный масштаб времени, в течение которого волна, бегущая вправо (влево), трансформируется в солитоны плюс излучение.

(iii) Существует еще более медленный масштаб характерного времени вязкости, в течение которого энергия солитона понемногу диссипирует (теряется). Однако ввиду того, что харак-

терное время для уравнения КдФ короче, солитоны непрерывно «подправляют» свою форму и скорость в соответствии с энергетическими потерями, так что *локально* они выглядят и ведут себя подобно солитонам.

Заметим, что на рис. 4.2, *в*, *г* средний уровень поверхности воды осцилляторных волн является положительным. Вспомним (см. разд. 1.7), что *средний* уровень осцилляторных волн, удовлетворяющих уравнению КдФ на больших временах, является отрицательным (см. (1.7.51)). Несоответствие обусловлено влиянием вязкости и может быть объяснено следующим образом. Солитоны медленно теряют энергию вследствие вязкости, однако полная масса волны не изменяется. Поэтому когда масса «вытесняется» из солитона, она образует «полку», располагающуюся сзади него, которая увеличивает средний уровень воды. Это является аналогом полки, обсуждавшейся в разд. 3.8.

В этой серии было также сделано несколько других экспериментов с участием солитонов. В некоторых экспериментах начальные амплитуды волн были очень малы, и солитоны не наблюдались даже при $x/h = 400$. В каждом эксперименте, когда явно прослеживалось число солитонов в точке $x/h = 400$, оно находилось в соответствии с числом солитонов, предсказанным по начальному условию из эксперимента. Начальное условие играло роль потенциала в задаче на собственные значения для оператора Шрёдингера. Амплитуда первого солитона при $x/h = 400$ также с достаточной точностью совпала с предсказанной амплитудой, которая была вычислена в два этапа: 1) амплитуда (без учета вязкости) определялась путем решения задачи на собственные значения; 2) на основе формулы из работы [275] для определения вязкого затухания уединенной волны с такой амплитудой, прошедшей расстояние в 400 раз большее, чем глубина бассейна. С деталями можно ознакомиться в работе Хаммака и Сигура [196]. На рис. 4.3 приведена картина, соответствующая в точности противоположному по сравнению с рис. 4.2 движению поршня. Если бы волна эволюционировала линейно, каждая картина, изображенная на рис. 4.3, была бы противоположна изображенной на 4.2. Это приблизительно соответствует наблюдениям в первых двух отметках, которые осуществлялись на коротком масштабе времени, где справедливо линейное приближение. Однако на большем временном масштабе результаты измерений совсем другие. Первоначально отрицательная волна не может произвести ни одного солитона; вся ее энергия должна перейти в непрерывный спектр. Рис. 4.3 дает наглядный пример решения уравнения КдФ, соответствующего непрерывному излучению.

Более тщательный анализ соответствия следствий из модели КдФ такому излучению может быть сделан с помощью рис. 4.4,

на котором изображена волна большей амплитуды в случае несколько большей глубины. Напомним (разд. 1.7), что асимптотическое решение уравнения (4.1.1) в отсутствие солитонов состоит из четырех областей.

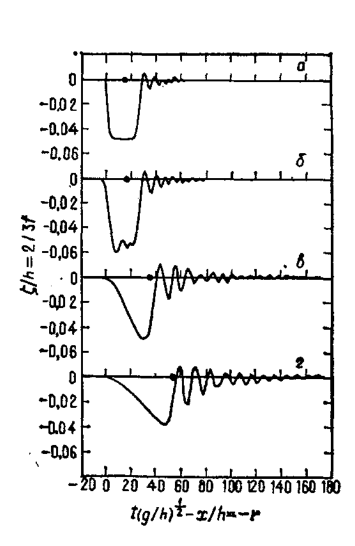


Рис. 4.3. Эволюция длинной отрицательной волны на поверхности воды в пакет осцилляторных волн без солитонов; $h=5$ см. Непрерывная линия соответствует измеренному профилю: (*а*) $x/h=0$; (*б*) $x/h=20$; (*в*) $x/h=180$; (*г*) $x/h=400$ (Хаммак и Сигур [196].)

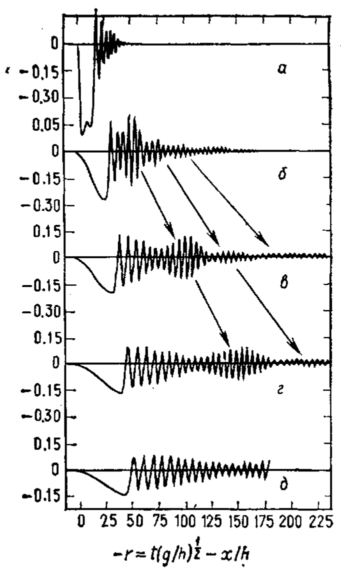


Рис. 4.4. Эволюция длинной отрицательной волны в совокупность осцилляторных волн с явно выраженными волновыми группами. Начальная амплитуда больше, чем на рис. 4.3; $h=10$ см. Сплошная линия — измеренные профили, стрелки — траектории волновых групп, построенные при помощи усреднения измеренной частоты волн и линеаризованного дисперсионого соотношения (4.1.8): (*а*) $x/h=0$; (*б*) $x/h=50$; (*в*) $x/h=100$; (*г*) $x/h=150$; (*д*) $x/h=200$. (Хаммак и Сигур [197].)

(i) Для $x \gg (3t)^{1/3}$ решение экспоненциально мало.

(ii) Для $|x| \leqslant O\left((3t)^{1/3}\right)$ решение является примерно автомодельным и аппроксимирует частное решение

$$u=\frac{x+x_0}{6t}.$$

(iii) Вблизи $-x \gg [O((3t)^{1/3}(\log 3t)^{2/3+p}]$, $1 \gg p \gg 0$, существует относительно тонкий слой, соответствующий бесстолкновительной ударной волне.

(iv) При $(-x) \gg (3t)^{1/3}(\log 3t)^{2/3+p}$ решение состоит из убывающих осцилляций. Эти осцилляции преобразуются в группы волн, узлы которых определяются нулями коэффициента отражения $\rho(k)$.

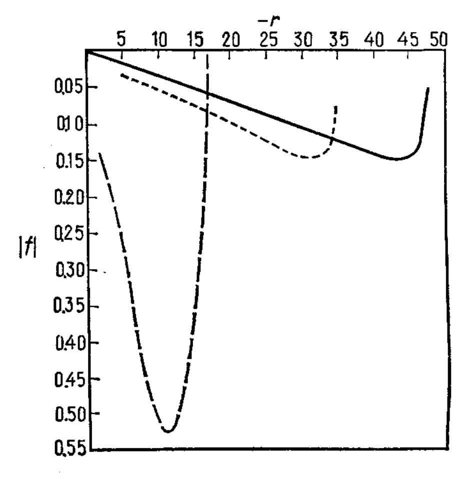


Рис. 4.5. Теоретический и экспериментальный профили волнового фронта при $x/h=200$ (рис. 4.4, случай (*д*)). Сплошная линия — измеренный профиль; штриховая — линейная асимптотическая теория (П.1.58); пунктирная — асимптотическая теория КдФ (1.7.41—45). (Хаммак и Сигур [197].)

Волновые числа каждого пакета, который движется с групповой скоростью соответствующей линеаризованной задачи, фиксированы. Скорость определяется преобладающим волновым числом в группе.

Это описание находится в качественном согласии с экспериментальными результатами, приведенными на рис. 4.4. Количественное сравнение для областей (i) и (ii) приведено на рис. 4.5, где лидирующая часть волны, изображенная на рис. 4.4, *д*, сравнивается с асимптотическим решением уравнения КдФ, вычисленным в соответствующий момент времени. Для сравнения также вычерчено асимптотическое решение линеаризованной задачи (П.1.49) с теми же самыми начальными условиями. В этом эксперименте совпадение теоретической кривой с результатами измерений лидирующей волны удивительно точное. Более того, очевидно, что соответствие улучшается, если учесть вязкость жидкости (Хаммак и Сигур (1978) [197]).

В этом эксперименте предсказание теории КдФ для осцилляторной области не столь точно в основном потому, что волны, генерируемые в этой области, не являются длинными в смысле нашего основного предположения (В), с. 278. Другими словами, начальное условие вначале состоит из длинных волн, но длинные волны порождают короткие волны, и уравнение КдФ не очень хорошо моделирует их эволюцию. И все-таки качественная картина является правильной. Волновые группы ясно видны на рис. 4.4*б*, *в*, *г*, и тщательный анализ показывает, что преобладающие волновые числа существенно не изменяются при эво-

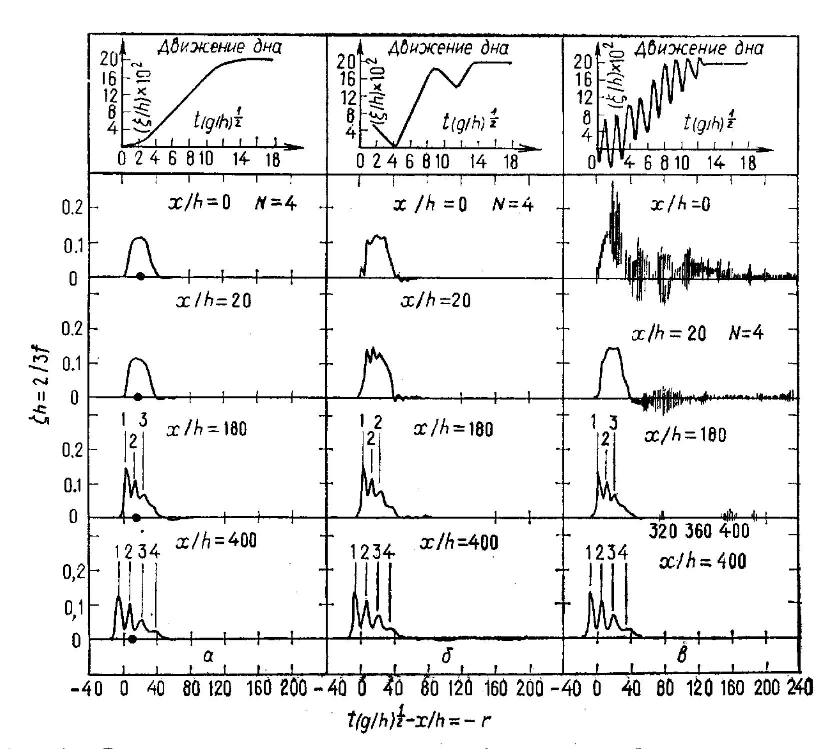


Рис. 4.6. Три случая движения поршня: графики движений и волны на воде, которые они порождают; $h = 5$ см. Случай (*а*) — монотонное движение, (*б*) и (*в*) — монотонное движение с наложением осцилляций. N — число дискретных собственных значений, полученных в каждом из экспериментов с использованием измеренных волновых профилей при $x/h = 0$ в задаче рассеяния (1.3.33). (Хаммак и Сигур [196].)

люции волн. Более того, траектории, изображенные на рис. 4.4, которые, очевидно, совпадают с наблюдаемыми траекториями волновых групп, были получены вычислением линеаризованной групповой скорости (4.1.8) при измеренных частотах волн.

То, что реальные начальные условия для (4.1.5—7) обычно содержат некоторые высокочастотные волны, поднимает вопрос о том, не ведет ли наличие этих коротких волн к несостоятельности модели КдФ. Другими словами, если эволюция длинных волн обусловлена главным образом наличием коротких волн и если модель КдФ правомерна только тогда, когда короткие волны отсутствуют, то уравнение КдФ не будет адекватной моделью (4.1.5—7). Результаты серии экспериментов, выполненных для проверки такой возможности, изображены на рис. 4.6. В трех независимых экспериментах (на рисунке каждому соответствует вертикальный столбец) поршень одинаковым образом смещался

вверх, но с возрастающей долей высокочастотных колебаний. Первый эксперимент был качественно подобен изображенному на рис. 4.2: начальное возмущение примерно имело вид поршня и распалось на четыре отдельных солитона. Два других эксперимента на ранней стадии выглядят по-другому, так как еще не разделены корогкие и длинные волны. Однако поверхностные волны малой амплитуды являются существенно дисперсионными (см. (4.1.8)), и при $x/h = 180$ (т. е. в масштабе времени КдФ) длинные и короткие волны физически разделены. Солитоны, которые появляются при наблюдениях в точке $x/h = 400$, не отличаются от зафиксированных в предыдущих экспериментах.

Подведем итог. Уравнение КдФ является частью модели, описывающей эволюцию длинных двумерных волн на воде с умеренной амплитудой в течение относительно длительного времени. Оно довольно неплохо предсказывает эволюцию длинных волн, особенно если производится поправка на влияние вязкости. Предсказания, касающиеся коротких волн, неправильны, однако наличие коротких волн вследствие сильной дисперсии поверхностных волн несущественно ухудшает точность модели для длинных волн.

В тех случаях, когда волны на поверхности воды не являются точно одномерными, возникает несколько вариантов (см. [378]). Одна из возможностей состоит в том, что волны являются близкими к двумерным. В этом случае (4.1.18) следует заменить на

$$\left(2f_\tau + 3ff_r + \left(\tfrac{1}{3} - \hat{T}\right) f_{rrr}\right)_r + f_{\eta\eta} = 0, \tag{4.1.23}$$

где $\eta = \varepsilon y/h$. Приведем сводку результатов, известных о решениях (4.1.23).

(i) Каждое решение (4.1.18) удовлетворяет (4.1.23).

(ii) Согласно результатам Кадомцева и Петвиашвили (1970) [252], одномерные солитоны неустойчивы по отношению к длинным поперечным возмущениям, если $(1/3 - \hat{T}) < 0$ (т. е. когда слой воды очень тонок); в обычном случае, когда $(1/3 - \hat{T}) < 0$, утверждение о неустойчивости теряет силу.

Экспериментальные результаты, приведенные на рис. 4.2 и 4.6, свидетельствуют о том, что солитоны устойчивы по отношению к коротким поперечным возмущениям в обоих случаях.

(iii) Если $\hat{T} < 1/3$ (обычный случай), (4.1.23) имеет N-солитонные решения и солитоны, которые взаимодействуют, пересекаясь под углом (3.3.90, 91). Взаимодействие двух наклонных солитонов, являющихся в соответствующей системе координат стационарными, изображено на рис. 4.7*а*.

Этот вид взаимодействия очень напоминает океанские волны, изображенные на фотографии 4.7*б*. Они сфотографированы на

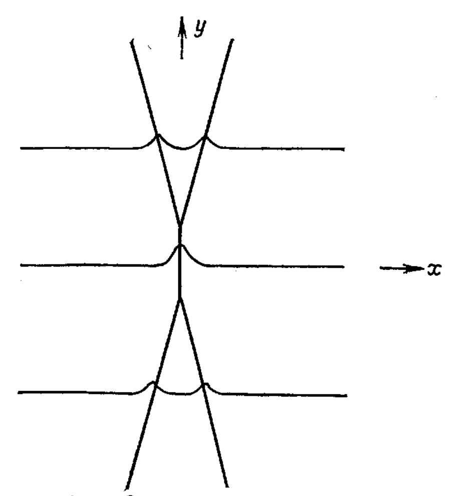


Рис. 4.7а. Эскиз двухсолитонного решения уравнения Кадомцева — Петвиашвили (3.3.91). В этом симметричном случае $k_1 = k_2$, $p_1 = p_2 = \sqrt{3}k_1$. Картинка движется в направлении x со скоростью $k_1^2 + k_2^2$.

побережье Орегона. По словам фотографа, глубина воды, где происходило взаимодействие, составляла около полуметра. На рисунке видно, что каждая из двух волн связана с периодическими цугами волн (по-видимому, пришедшими из области глубокой воды), но каждая волна имеет столь большую длину по отношению к малой глубине воды, что волны можно считать уединенными. Никакой количественной информации, касающихся этих волн, больше нет, и все-таки сходство между этой картиной и предсказанной теоретически уравнением (4.1.23) поразительно.

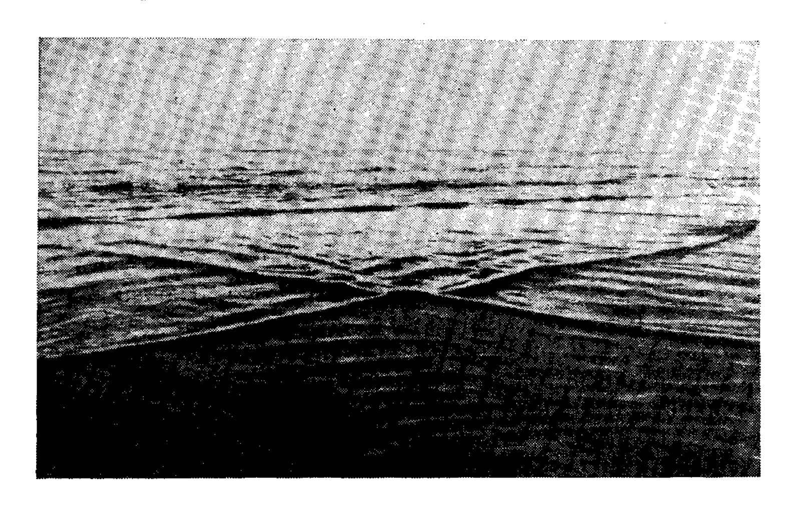


Рис. 4.7b. «Наклонное» взаимодействие двух волн на отмели. (Фотография любезно предоставлена Т. Тёдтемайером.)

(iv) Поверхностное натяжение оказывает большее влияние, чем сила тяжести, для очень тонких слоев воды, когда $\hat{T} > 1/3$. В этом случае одномерные солитоны неустойчивы, но сущест-

вуют решения (4.1.23) в виде «лампов»; см. разд. 3.4. Эти $(2+1)$-мерные аналоги солитонов экспериментально пока еще не наблюдались.

Экспериментаторам, которых интересует поиск лампов, следует иметь в виду, что для этой цели также применимо (4.1.23) с $\hat{T} > 1/3$, если пренебречь силой тяжести, удалить горизонтальное дно и связанный с ним вязкий погранслой и ограничиться только симметричными модами (для которых справедливо (4.1.7)). При этом мы рассматриваем волны на слое воды, который находится во взвешенном состоянии, так же как в случае, изучавшемся Тейлором (1969) [479]. Основное преимущество такой конфигурации состоит в том, что эффекты вязкости пренебрежимо малы.

(v) Для $\hat{T} > 1/3$ (преобладает поверхностное натяжение) Захаров и Манаков (1979) [530] получили точное решение уравнения (4.1.23) при помощи обобщения МОЗР. Наложенные ими граничные условия a priori исключали лампы. Манаков, Сантини и Тахтаджан (1980) [349] при таких граничных условиях описали асимптотическое поведение решения $(t \to \infty)$.

4.1.b. Внутренние волны. Внутренние колебания жидкости с устойчивой стратификацией, обусловленные силой тяжести, известны как внутренние волны. Океан и атмосфера обычно стратифицированы и обладают богатым спектром таких волн (см., например, [422]). Действительно, волны на поверхности раздела воздух — вода, которые мы только что обсуждали, можно представить как предельный случай внутренних волн (обусловленных чрезвычайно большим градиентом плотности на границе раздела).

При соответствующих условиях длинные внутренние волны умеренной амплитуды, так же как поверхностные волны, эволюционируют согласно уравнению КдФ. Однако для внутренних волн уравнения КдФ не играют столь универсальной роли, как это было в случае поверхностных волн. В зависимости от обстоятельств длинные внутренние волны могут эволюционировать согласно уравнению КдФ (4.1.2), уравнению Бенджамина — Оно (4.1.3) или модели, промежуточной между КдФ и (4.1.3). В этом подразделе мы будем анализировать одну довольно простую (двухслойную) модель внутренних волн для того, чтобы показать, как возникают эти уравнения и в каком смысле они моделируют эволюцию длинных внутренних волн.

Рассмотрим две несжимаемые несмешиваемые жидкости с плотностями $\rho_1 < \rho_2$ и глубинами h_1, h_2 $(H = h_1 + h_2)$, как показано на рис. 4.8. Нижний слой более тяжелой жидкости покоится на горизонтальном непроницаемом дне, в то время как жидкость, находящаяся сверху, имеет свободную поверхность.

На обе жидкости действует вертикальная сила тяжести. Мы пренебрежем поверхностным натяжением как на поверхности раздела, так и на свободной поверхности. Пренебрежем также и вращением Земли (см. [185]). Если предположить, что движение каждой жидкости является безвихревым, то существуют потенциалы скоростей (φ_1, φ_2), которые удовлетворяют в соответствующих областях уравнению Лапласа. Граничные условия ставятся следующим образом: на дне ($z = -H$) вертикальная скорость

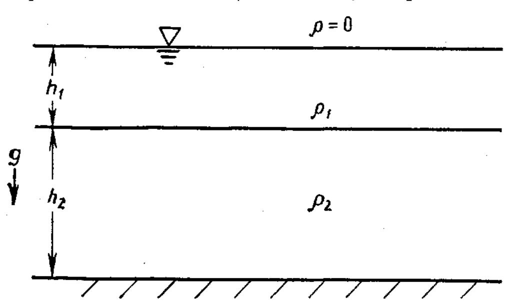


Рис. 4.8. Двухслойная модель. Поверхностные волны имеют максимальную амплитуду на свободной поверхности, внутренние волны — на поверхности раздела.

должна обращаться в нуль; на поверхности раздела ($z = -h_1 + \eta(x, y, t)$) вертикальная скорость и давление меняются непрерывно; на свободной поверхности ($z = \zeta(x, y, t)$) условия те же, что и в случае (4.1.7) с $T = 0$; при $x^2 + y^2 \to \infty$ потребуем, чтобы ($\nabla\varphi_1$, $\nabla\varphi_2$, ζ, η) стремились к нулю. После того как задано начальное условие (при $t = 0$), можно ставить вопрос об эволюции $\eta(x, y, t)$, $\zeta(x, y, t)$, $\varphi_1(x, y, z, t)$ и $\varphi_2(x, y, z, t)$ для $t > 0$. Далее главным образом будет изучаться двумерное движение ($\partial_y \equiv 0$).

Начнем с исследования линеаризованной задачи и поиска ее дисперсионного соотношения. Эти вопросы был рассмотрены Лэмбом [314, § 231].

Обозначим

$$\Delta = (\rho_1 - \rho_2)/\rho_2. \tag{4.1.24}$$

Следовательно,

$$\omega^4 [1 + (1 - \Delta) \operatorname{th} kh_1 \operatorname{th} kh_2] - \omega^2 gk [\operatorname{th} kh_1 + \operatorname{th} kh_2] + \Delta g^2 k^2 \operatorname{th} kh_1 \operatorname{th} kh_2 = 0. \tag{4.1.25}$$

Представляют интерес следующие моменты:

(i) Для каждого k (4.1.25) — это уравнение четвертого порядка относительно $\omega(k)$, тогда как линеаризованное дисперсионное соотношение для поверхностных волн (4.1.8) является квадратичным

(ii) (4.1.25) сводится к (4.1.8) при $T = 0$, если $\Delta = 0$, или $h_2 = 0$, или $h_1 = 0$, или $\Delta = 1$ (заметим, что $\Delta \to 1$ можно интерпретировать либо как $\rho_1 \to 0$, либо как $\rho_2 \to \infty$).

(iii) Для достаточно малых Δ, сравнивая ζ (свободная поверхность) и η (поверхность раздела), можно видеть, что при фиксированных k бóльшая (по величине) пара корней (4.1.25) соответствует двум волнам, максимальные амплитуды которых достигаются на свободной поверхности. Эти две моды называются поверхностными волнами; при $\Delta \to 0$ они превращаются в волны на поверхности однородной жидкости.

(iv) Меньшая (по величине) пара корней (4.1.25) соответствует двум волнам, максимальные амплитуды которых реализуются на поверхности раздела, если Δ достаточно мало. Эти две моды называются внутренними волнами; они исчезают, когда $\Delta = 0$. В первую очередь нас будет интересовать эволюция внутренних волн на длительном отрезке времени.

(v) И для поверхностных, и для внутренних волн

$$\omega^2 = O(k^2) \text{ при } kh_1,\ kh_2 \to 0,$$
$$(4.1.26)\qquad \frac{\partial\omega}{\partial k} > 0,\ \frac{\partial^2\omega}{\partial k^2} < 0 \text{ для } k > 0,$$
$$\omega^2 = O(|k|) \text{ при } kh_1,\ kh_2 \to \infty.$$

Отсюда следует, что длинные внутренние волны движутся быстрее остальных внутренних волн, но при этом существуют как более быстрые, так и более медленные поверхностные волны (в смысле групповой скорости).

Далее будем решать (4.1.25) в длинноволновом пределе. Однако, как отмечал Бенджамин [53] (см. также [133] и [314, § 231]), уравнение (4.1.25) имеет несколько предельных случаев, каждый из которых можно было бы назвать «пределом длинных волн». Все эти пределы имеют физический смысл.

(i) Если длина изучаемой волны больше, чем все вертикальные глубины, то kh_1, kh_2, $kH \ll 1$. В этом пределе (4.1.25) сводится к

$$(4.1.27)\qquad \left(\frac{\omega}{k}\right)^4 - gH\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 + g^2\Delta h_1 h_2 = O(k^2)$$

и все четыре корня принимают вид

$$(4.1.28)\qquad \omega \sim Ck + ak^3 \text{ для } kH \ll 1.$$

Этот случай аналогичен уже обсуждавшейся задаче о поверхностных волнах. Начальное возмущение малой амплитуды, состоящее только из длинных волн (в том смысле, что $kH \ll 1$), расщепляется на две поверхностные и две внутренние волны на коротком (линейном и бездисперсионном) масштабе времени

(см. [314, § 231—234]). Если скорости всех четырех волн различны, то четыре волны пространственно разделяются за короткое время, и каждая взаимодействует лишь сама с собой на следующем (нелинейном и дисперсионном) временно́м масштабе.

Как будет показано ниже, основным уравнением на длительном временно́м масштабе является либо КдФ (4.1.1), либо мКдФ (4.1.2).

(ii) Если $h_1 \ll h_2$, то изучаемые волны могут быть длинными по сравнению с толщиной слоя ($kh_1 \ll 1$) и короткими по сравнению с полной глубиной ($kH \gg 1$). Этот «длинноволновый предел» часто имеет место в случае океанских волн. Например, летом глубина термоклина примерно равна 50—100 м, в то время как глубина океана может быть равна нескольким тысячам метров. Как детально обсуждал Бенджамин [53], в этом пределе уравнение (4.1.25) сводится к

$$\omega^2 = g|k| \text{ (короткие поверхностные волны)}$$

и

$$\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 - g\Delta h_1 = O(|k|h_1) \text{ (длинные внутренние волны)}, \tag{4.1.29}$$

Как и прежде, начальное возмущение малой амплитуды за короткое время распадается на четыре линейные волновые моды (две поверхностные и две внутренние). В следующем временном масштабе каждая из внутренних волн описывается уравнением Бенджамина — Оно (4.1.3) (см. также [409] и [29]). Напомним, что (4.1.3), по-видимому, решается применением некоторого варианта МОЗР, хотя общая теория до настоящего времени не завершена.

(iii) Другая возможность состоит в том, что $kh_1 \ll 1$, $kH = O(1)$. В этом случае «длинноволнового предела» Джозеф [246] и Кубота, Коул и Доббс [301] получили уравнение (3.5.39) как промежуточное между (4.1.1) и (4.1.3). Оно содержит произвольный параметр (который в действительности равен kH) и сводится к (4.1.1), если $kH \to 0$, и к (4.1.3), если $kH \to \infty$. Уравнение (3.5.39) также решается точно (см. разд. 3.5).

Вернемся к случаю $kH \ll 1$. Для простоты потребуем, чтобы $\Delta \ll 1$ (в океане обычно $\Delta < 0{,}02$). Из (4.1.27) для скорости длинной волны вытекает соотношение

$$\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 \sim \begin{cases} C_s^2 = gH \text{ (поверхностные волны).} \\ C_i^2 = \dfrac{g\Delta h_1 h_2}{H} \text{ (внутренние волны).} \end{cases}$$

Ввиду того что $\Delta \ll 1$, эти скорости различаются. Следовательно, если внутреннее возмущение имеет конечную протяженность и

состоит только из длинных волн, то поверхностные и внутренние волны разделяются на «линейном» масштабе времени.

Для того чтобы рассмотреть внутренние волны на следующем масштабе времени, определим

$$(4.1.30)\quad \tau=\frac{1}{6}\left(\frac{g\Delta}{H}\right)^{1/2}t,\quad \chi=\frac{x-C_i t}{(h_1h_2)^{1/2}},\quad f=\frac{3(h_1-h_2)}{2h_1h_2}\eta_i,$$

где η_i — пространственное отклонение границы раздела, вызванное внутренней волновой модой, скорость которой равна C_i.

Далее можно показать, что эта внутренняя волна эволюционирует согласно уравнению КдФ

$$(4.1.31)\qquad f_\tau+6ff_\chi+f_{\chi\chi\chi}=0.$$

Ввиду того что солитон является существенно положительным решением (4.1.31), из (4.1.30) следует, что *внутренний солитон всегда является волной, в которой тонкий слой утолщается.* Таким образом, отклонения поверхности раздела направлены вниз, если тоньше верхний слой, и вверх, если тоньше нижний слой. Такие внутренние солитоны впервые обсуждались в работе [276].

Пример внутреннего солитона, который был образован в бассейне, использованном в экспериментах Хаммака и Сигура (рис. 4.1—4.6), приведен на рис. 4.9. В этом случае жидкость была стратифицирована по плотности. На рисунке изображены начальная внутренняя волна и результат ее эволюции. Как и на рис. 4.2, точками отмечена форма точного односолитонного решения, которое вычислено по максимуму измеренной амплитуды. Детали можно найти в работе (458). Аналогичные эксперименты выполнили Куп и Бутлер [289].

Чтобы непосредственно сравнить теоретические результаты с экспериментом, как и в случае поверхностных волн, необходим учет вязкостных потерь. Оказывается, что в случае длинных внутренних волн потери больше, чем в случае длинных поверхностных волн. Причина состоит в том, что дополнительно ко всем погранслоям, возникающим в поверхностных волнах, внутренние волны имеют погранслои на границе раздела, где сдвиговая скорость больше. Фактически этот дополнительный погранслой часто служит наиболее важной причиной энергетических потерь.

Обобщение теории Коулегана [275], которое позволяет учесть этот дополнительный погранслой, не представляет никаких принципиальных трудностей [324]. Эта обобщенная теория связана с моделью КдФ для невязкой жидкости и поэтому способна предсказать эволюцию длинноволновых внутренних солитонов [325].

Из (4.1.30) следует, что f обращается в нуль, если оба слоя имеют одинаковую глубину и разница их плотностей мала. При

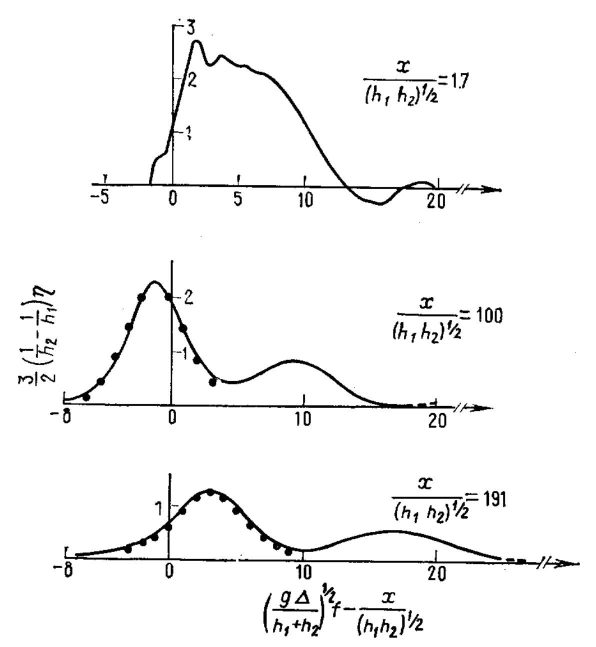


Рис. 4.9. Трансформация начального профиля длинной внутренней волны в два солитона. Сплошная линия обозначает результат измерений, пунктирная — соответствующее солитонное решение уравнения КдФ.

такой специальной конфигурации в задаче возникает симметрия, приводящая к исчезновению нелинейных членов. В этом случае изменение масштабов, неявно содержащееся в предположении (D), непригодно, и уравнение КдФ не является адекватной асимптотической моделью. Правильный масштаб в этом случае выбирается из условия

$$kh = O(\varepsilon).$$

В этом случае асимптотическим уравнением служит уравнение мКдФ, которое определяет эволюцию волны для следующего масштаба времени ($\varepsilon^2 t = O(1)$). Обычно уравнение мКдФ возникает в длинноволновом пределе, когда $\omega(k) \sim C_0 k + ak^3$. Рассматриваемая задача обладает симметрией, обуславливающей динамическую неразличимость положительных и отрицательных волн, что имеет место в случае $h_1 = h_2$.

Можно упомянуть еще об одной дополнительной аномалии. Если соответствующее одномерное уравнение, обусловленное симметрией задачи, является уравнением мКдФ, то почти одномерные волны удовлетворяют не уравнению (4.1.4), а

$$(u_t + au^2 u_x + bu_{xxx})_x + u_{yy} = 0, \tag{4.1.32}$$

где a, b являются константами. Как отмечалось в разд. 3.7, эти уравнения не обладают свойством Пенлеве. Вероятно, по этой причине отсутствуют все особенности (солитоны, законы сохранения, полная интегрируемость и т. д.), позволяющие выделить (4.1.32) в особый класс уравнений.

Наконец, отметим еще одну модификацию уравнений, определяющих эволюцию длинных внутренних волн умеренной амплитуды. Такие волны могут быть резонансно связаны с пакетом коротких поверхностных волн, групповая скорость которых соответствует скорости внутренних волн. В результате возникают не (4.1.1), (4.1.2) или (4.1.3), а система из двух нелинейных эволюционных уравнений [192], [138], [339], [340]. Из-за такого взаимодействия длинные внутренние волны иногда могут наблюдаться в виде резонансно возбужденных поверхностных волн. Наблюдения таких явлений приведены Филлипсом [421] и Осборном и Бэрчем [413].

4.1.с. Волны Россби. В атмосфере вращающихся планет частицы обладают угловой скоростью, определяемой их географической широтой. Следовательно, закон сохранения углового момента препятствует движению частиц в направлении север — юг, подобно тому как сила тяжести препятствует вертикальному движению стратифицированной по плотности жидкости. Крупномасштабные атмосферные волны, обусловленные вариацией угловой скорости частиц по широте, известны как волны Россби [434].

Можно ожидать, что между внутренними волнами и волнами Россби при соответствующих предположениях существует аналогия. Поскольку уравнение КдФ моделирует внутренние волны, то можно предположить, что оно справедливо и для волн Россби. Это было показано Бенни (1966) [55] и Лонгом (1964) [331] (см. также [378] и цитируемые там работы). При простейших предположениях (длинные волны, несжимаемая жидкость, приближение β-плоскости и т. д.) в присутствии стационарного восточно-западного зонального потока вывод уравнения КдФ как модели волн Россби производится стандартным образом, описанным в работе Бенни [55], к которой мы отсылаем читателя, интересующегося подробностями. Особое внимание к такому приложению уравнения КдФ обусловлено предположением Максуорси и Редекоппа (1976) [356] о том, что Большое красное пятно Юпитера может быть уединенной волной Россби.

На рис. 4.10 изображена фотография Юпитера, полученная в ходе осуществления недавней программы «Вояджер». Картина облачности показывает, что в атмосферном движении Юпитера преобладает ряд восточно-западных зональных потоков, похожих на конверсионный след реактивных самолетов в нашей зем-

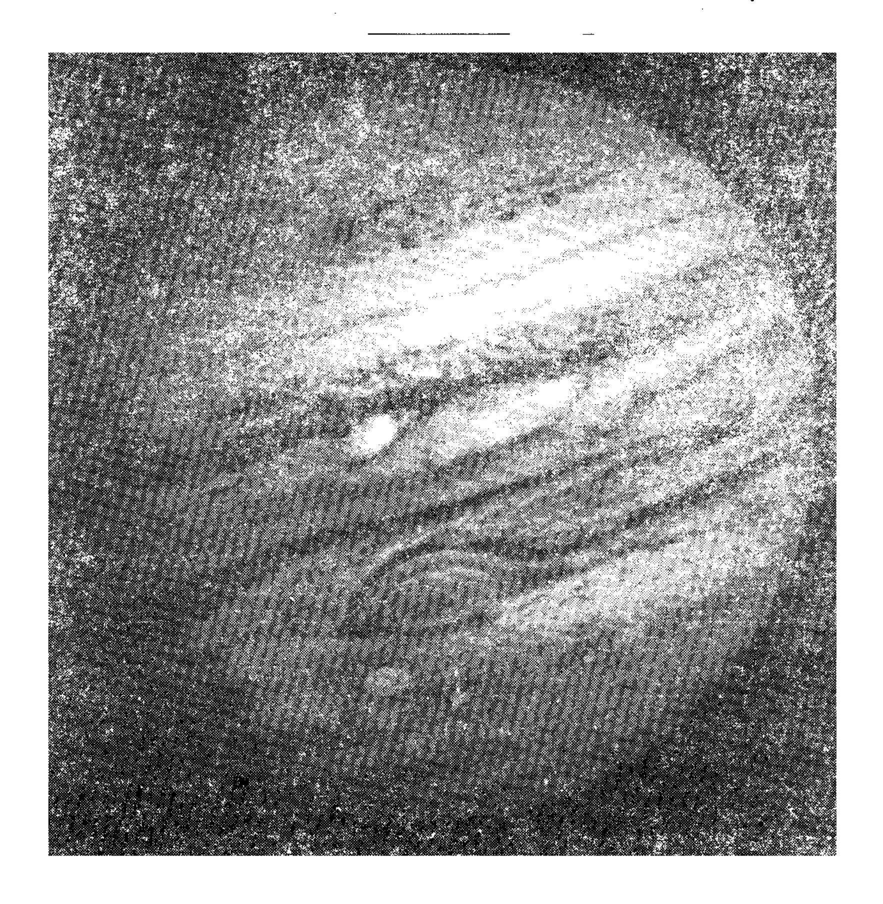


Рис. 4.10. Юпитер. Большим красным пятном называется обширное завихрение овальной формы ниже экватора. Полость лежит точно к северу от пятна. (Фотография любезно предоставлена НАСА.)

ной атмосфере. Можно видеть также несколько овальных пятен, включая хорошо известное Большое красное пятно в Южном полушарии. Большое красное пятно было обнаружено примерно на этой же широте сотни лет назад; известно, что оно медленно перемещается на запад и сохраняет свою целостность, несмотря на взаимодействие с другими атмосферными объектами. В течение ряда лет было предложено большое число моделей для объяснения загадочного объекта в атмосфере Юпитера, включая модель уединенной волны.

В соответствии с недавней версией такой модели, описанной Редекоппом и Вейдманом [430], рассмотрим квазигеострофич-

ную форму уравнения потенциала скоростей для несжимаемой жидкости [417]:

(4.1.33) $$\{(\partial_t + U\partial_x) + \varepsilon\psi_y(\partial_x - \psi_x\partial_y)\}\{\mu^2\partial_x^2 + \partial_y^2 + \\ + \partial_z(K^2\partial_z)\}\psi + (\beta - U'')\psi_x = 0.$$

Здесь (x, y, z) соответствуют восточному, северному и вертикальному направлениям. Функцию полного горизонтального потока Ψ запишем в виде

$$\Psi(x, y, z, t) = \int_{\bar{y}}^{y} U(\eta)\, d\eta + \varepsilon\psi(x, y, z, t).$$

Первый член соответствует неоднородному зональному течению, второй — возмущениям. Затем воспользуемся приближением β-плоскости; тогда параметр Кориолиса аппроксимируется формулой

(4.1.34) $$f = 2\Omega \sin\theta + \beta y.$$

Кроме того,

(4.1.35) $$K(z) = \frac{2\Omega \sin\theta_0 l_2}{N(z)\, d},$$

где $N(z)$ является частотой Брента — Вяйсяля и l_2, d — характерные масштабы длины восточно-западного и вертикального направлений соответственно. Величина K характеризует соотношение эффектов вращения и вариаций плотности (т. е. центробежной и гравитационной сил). И наконец,

$$\mu = l_2/l_1$$

представляет отношение характерных масштабов в направлениях север — юг и восток — запад.

В линейном $(\varepsilon \to 0)$ длинноволновом $(\mu \to 0)$ пределе ψ принимает вид

(4.1.36) $$\psi = \sum_n A_n(x - c_n t)\varphi_n(y)p_n(z),$$

где c_n является конечным результатом решения двух задач на собственные значения:

(4.1.37) $$(K^2 p_n') + k_n^2 p_n = 0, \quad p_n(0) = p_n(1) = 0,$$
$$\varphi_n'' - k_n^2\varphi_n + (\beta - U'')\varphi/(U - c_n) = 0, \quad \varphi_n(y_S) = \varphi_n(y_N) = 0.$$

Здесь предполагается, что атмосфера заключена между двумя горизонтальными «твердыми крышками» (при $z = 0, 1$) и неоднородный зональный поток течет между y_S и y_N. Из (4.1.37)

следует, что распространение волн возможно только в восточно-западном направлении, т. е. проблема является существенно одномерной, поэтому вопрос о поперечной неустойчивости здесь не возникает.

Если различные моды (4.1.36) разделяются на коротком масштабе времени, следовательно, можно вывести эволюционное уравнение, описывающее взаимодействие мод самих с собой на более длительных временны́х масштабах. Аналогично рассмотренным случаям уравнения выводятся путем исключения секулярных членов, возникающих в следующем порядке разложения. В зависимости от природы и устойчивости стратификации по плотности, характеризуемой величиной $N(z)$, для данной моды может возникнуть либо уравнение КдФ, либо мКдФ. Если две или

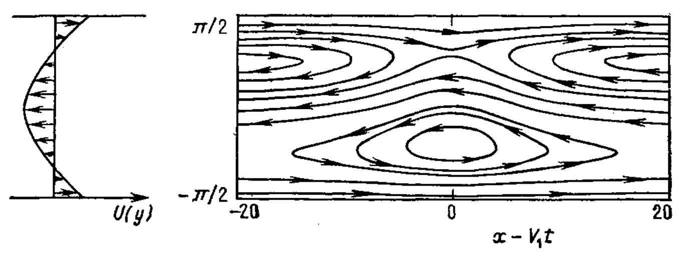


Рис. 4.11. Картина линий тока для солитона Россби в однородной атмосфере. Фоновый профиль скоростей показан слева. (Редекопп и Вейдман [430].)

более мод имеют примерно одинаковые линейные фазовые скорости, могут возникнуть также системы эволюционных уравнений. К сожалению, об атмосфере Юпитера известно настолько мало, что модель в настоящее время невозможно сделать более точной или пригодной для количественной проверки.

На рис. 4.11 изображена горизонтальная картина линий тока, соответствующая одному солитону в системе координат, движущейся вместе с волной. Движение происходит в однородной атмосфере и, как предполагалось выше, в неоднородном зональном потоке. Форма завихрения очень похожа на Большое красное пятно, изображенное на рис. 4.10. Область над вихрем на рис. 4.11 можно сопоставить «дырке», которая находится севернее пятна. Однако, повторяем, это сравнение в настоящее время следует рассматривать как гипотетическое.

Если солитонная модель Большого красного пятна и «дырки» адекватна, то их комбинация должна взаимодействовать с другими волнами, подобно солитону. Максуорси и Редекопп [356] заметили, что в Южном полушарии существовало другое большое возмущение, известное как южное тропическое возмущение, появившееся в начале нынешнего века и сохранявшееся несколько десятилетий. Эти два объекта имели разные скорости и за

время существования южного тропического возмущения проходили друг через друга девять раз. Одно из взаимодействий детально описал Пик [418]:

«За шесть недель, необходимых для прохождения граничной точки p южного тропического возмущения от одного конца «дырки» до другого... не наблюдалось никаких признаков взаимопроникновения; вместо этого в течение нескольких дней после прибытия граничной точки p возмущения в точку f «дырки» на противоположном краю дырки... стал возникать образ p-края возмущения... Это новое образование впоследствии оказалось истинным p-краем возмущения, которое удалялось от Красного пятна примерно с той же скоростью (с которой оно к нему ранее приближалось). Таким образом, вместо трех месяцев, необходимых для взаимного прохождения при нормальном положении вещей, процесс взаимодействия завершился за четырнадцать дней».

Максуорси и Редекопп [356] интерпретируют это взаимопрохождение как взаимодействие двух солитонов с соответствующим фазовым сдвигом. Более детальный анализ приведен в работе [357].

Для простоты изложения мы опустили некоторые важные аспекты проблемы. Один из них состоит в том, что амплитуда Большого красного пятна не мала, т. е. $\varepsilon = O(1)$ в (4.1.33), поэтому ε-разложение, использованное выше, является чисто формальным. Следующий аспект заключается в том, что любая реалистичная модель Красного пятна должна включать некий механизм отбора энергии из неравновесного зонального течения со скоростью, достаточной для компенсации диссипативных потерь. Это обусловлено длительным существованием Красного пятна. Обсуждение подробного круга вопросов можно найти в работах [356], [428], [430] и [357].

4.2. Трехволновые взаимодействия. Резонансное взаимодействие трех волн, по-видимому, является простейшим нелинейным взаимодействием, линейный предел которого учитывает дисперсию. Обычно соответствующие уравнения возникают при изучении дисперсионных систем в слабо нелинейном пределе и должны иметь две характерные особенности.

(i) В низшем порядке разложения по малой амплитуде определяется линеаризованное дисперсионное соотношение $\omega(\mathbf{k})$. Оно должно допускать существование резонансной триады, т. е. трех линейных волн, удовлетворяющих резонансному соотношению

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = 0, \quad \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0. \tag{4.2.1}$$

(В этом разделе мы предположим, что $\omega(\mathbf{k}) = -\omega(-\mathbf{k})$, иначе (4.2.1) будет неполной.)

(ii) В следующем порядке разложения могут появиться квадратичные взаимодействия. Поэтому если медленно меняющиеся амплитуды этих трех волн не удовлетворяют уравнениям

$$\partial_\tau a_1 + (\mathbf{C}\cdot\nabla)\,a_1 = i\gamma_1 a_3^*, \quad \partial_\tau a_2 + (\mathbf{C}_2\cdot\nabla)\,a_2 = i\gamma_2 a_3^* a_1^*, \\ \partial_\tau a_3 + (\mathbf{C}\cdot\nabla)\,a_3 = i\gamma_3 a_1^* a_2^*, \tag{4.2.2}$$

то могут возникнуть секулярные члены. Здесь $\mathbf{C}_j$ — линеаризованные групповые скорости, вычисленные при $\mathbf{k}_j$. Если исходная система консервативна, то γ_1, γ_2, γ_3 вещественны и $\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \leqslant 0$.

На общую природу таких уравнений прямо указали (наряду с другими авторами) Бенни и Ньюэлл (1967) [58], хотя частные случаи были известны и ранее. Некоторые ситуации, в которых возникают резонансные триады, можно найти в работах [132], [259] и [421].

Большое внимание привлек частный случай (4.2.2), в котором комплексные амплитуды волн зависят только от одной независимой переменной. Ему соответствует немодулированный, однородный цуг волн, и эволюционные уравнения (4.2.2) сводятся к виду

$$\dot a_1 = i\gamma_1 a_2^* a_3^*, \quad \dot a_2 = i\gamma_2 a_3^* a_1^*, \quad \dot a_3 = i\gamma_3 a_1^* a_2^*, \tag{4.2.2$'$}$$

где $\dot a_i = \partial_t a_i$ или $\dot a_i = c_i \partial_x a_i$. Так же как и (4.2.2), уравнения (4.2.2) могут быть решены точно при помощи МОЗР в эллиптических функциях [47], [77].

4.2.а. Нелинейная оптика. Идеальный диэлектрик можно рассматривать как вещество, в молекулах которого электроны прочно связаны с ядрами. Воздействие электрического поля на такую среду не вызывает электрического тока, но приводит к некоторому смещению каждого связанного электрона. Макроскопический эффект суммирования всех смещений в единице объема называется *поляризацией* **P**.

Соотношение между поляризацией и электрическим полем является одним из фундаментальных соотношений, которые характеризуют вещество. В простейшем случае это соотношене является линейным,

$$P_i = \chi_{ij} E_j, \tag{4.2.3}$$

где χ_{ij} — (линейная) *восприимчивость* среды. Для изотропных сред χ_{ij} сводится к скаляру. Простейшим обобщением (4.2.3) служит случай, когда поле представляет собой плоскую волну с частотой ω и χ_{ij} зависит от ω.

До изобретения лазера этой модели было достаточно для большинства задач оптики. Однако лазеры оказались способными создавать поля столь высокой интенсивности, что стал не-

обходимым учет нелинейных эффектов в восприимчивости. Под «нелинейной оптикой» обычно понимается класс явлений, обусловленных нелинейными поправками к восприимчивости диэлектрических материалов. Исследования таких эффектов ведутся во многих наиболее интенсивно развивающихся разделах прикладной физики, поэтому наше изложение будет заведомо неполным. Последующее обсуждение будет основано на работах Ахманова и Хохлова (1972) [38], Уизема (1974) [50] и Ярива (1975) [51]; см. также [277].

Рассмотрим идеальный немагнитный и однородный диэлектрик. Уравнения Максвелла (в системе МКС) имеют вид

$$\nabla \times \mathbf{H} = \partial_t \mathbf{D}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \tag{4.2.4a}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{4.2.4в}$$

где

$$\mathbf{D}(\mathbf{E}) = \frac{1}{\mu_0 c^2}\mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \tag{4.2.4c}$$

c — скорость света в вакууме. Их можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2 \mathbf{E} + \partial_t^2 \mathbf{P} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = 0. \tag{4.2.5}$$

Смещение электрона **Z** в среде без диссипации можно описать при помощи неоднородного уравнения ангармонического осциллятора:

$$m\mathbf{Z}_{tt} + \nabla_Z U(\mathbf{Z}) = \mathbf{l} q \tilde{E}, \tag{4.2.6}$$

где m — эффективная масса осциллятора, U — его потенциальная энергия, вектор $\mathbf{l}(t)$ направлен вдоль электрического дипольного момента, q — заряд электрона, $\tilde{E}$ — локальная напряженность поля. В простейшем случае все молекулы одинаковы, поэтому

$$\mathbf{P} = Nq\mathbf{Z}, \tag{4.2.7}$$

где N — число осцилляторов в единице объема. В конце концов получаем, что **P** удовлетворяет уравнению

$$\partial_t^2 \mathbf{P} + \nabla_P V(\mathbf{P}) = \frac{Nq^2}{m}\mathbf{E} = \frac{\Omega^2}{c^2}\mathbf{E}, \tag{4.2.8}$$

где V учитывает как суммирование по всем индивидуальным потенциальным энергиям, так и разницу между локальным и макроскопическим полями. Уравнения (4.2.5) и (4.2.8), после того как V задано, вместе с граничными и начальными условиями определяют поле. Заметим, что и нелинейность, и анизотропия среды учтены в $\mathbf{V}(\mathrm{P})$.

Многие недиссипирующие диэлектрические материалы в приближении слабых полей являются изотропными, и для них формулу (4.2.8) можно приближенно записать в виде

$$(4.2.9) \qquad \partial_t^2 P_i + \omega_0^2 P_i + d_{ijk} P_j P_k \sim \frac{\Omega^2}{c^2} E_i, \quad i = 1,\ 2,\ 3.$$

По соображениям симметрии $d_{ijk} = d_{ikj}$. В работе Ярива (1975) [517] приводится таблица значений d_{ijk} для некоторых кристаллов. Для кристалла кварца $d_{111} \neq 0$, и все три взаимодействующих вектора поляризации параллельны. Для дигидрофосфата аммония (АДФ) и для дигидрофосфата калия (КДФ) $d_{ijk} = 0$, если не все индексы различны. (Эти два кристалла в линейном приближении также являются анизотропными.)

Если вещество изотропно или является кристаллом с центром симметрии, то $d_{ijk} \equiv 0$, и нелинейный эффект будет обусловлен приближением следующего порядка:

$$(4.2.10) \qquad \partial_t^2 P_i + \omega_0^2 P_i + c_{ijkl} P_j P_k P_l \sim \frac{\Omega}{c^2} E_i, \quad i = 1,\ 2,\ 3.$$

В случае таких материалов резонансные триады отсутствуют, и существенными становятся резонансные квартеты.

В линейном пределе решение уравнений (4.2.5—9) может быть представлено в виде плоско-поперечных волн:

$$(4.2.11) \qquad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\theta}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}_0 e^{i\theta}, \quad \theta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t.$$

Здесь $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0$. Эта подстановка приводит к линеаризованному дисперсионному соотношению

$$(4.2.12) \qquad c^2 k^2 = \omega^2 - \frac{\omega^2 \Omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2},$$

которое приведено на рис. 4.12. В тех случаях, когда рассматривается начальная задача, мы используем дисперсионное соотношение в виде $\omega(\mathbf{k})$. В оптических экспериментах более естественно рассматривать $\mathbf{k}(\omega)$, т. е. ω дано и $\mathbf{k}$ определяется исследователем. Более того, в оптике общепринято вводить показатель преломления

$$(4.2.13) \qquad \mathbf{n} = \mathbf{k} \frac{c}{\omega}$$

и выражать дисперсионное соотношение в виде ($n^2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}$)

$$(4.2.14) \qquad n^2 = 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

Очевидно, что эта линейная бездиссипативная модель несостоятельна для ω, близких к ω_0, когда частота действующего поля почти совпадает с частотой осцилляций атомов среды.

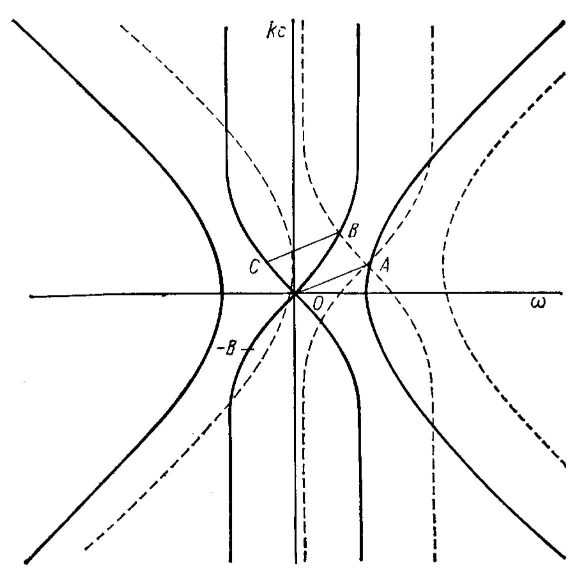


Рис. 4.12. Линеаризованное дисперсионное соотношение (2.2.12) для изотропного диэлектрического вещества. A, $(-B)$ и C — форма резонансной триады: $\mathbf{A} + (-\mathbf{B}) + \mathbf{C} = 0$.

В разд. 4.4 мы рассмотрим этот резонансный случай более детально. Здесь будет рассматриваться только нерезонансный случай.

Теперь с помощью рис 4.12 мы проиллюстрируем метод нахождения резонансных триад, допускаемых линеаризованным дисперсионным соотношением, подобным (4.2.12). Эта процедура была переоткрыта несколько раз (см., например, Займан (1960) [550], Болл (1964) [47]). Сначала выберем произвольную точку A на одной из ветвей дисперсионной кривой. Затем воспроизведем все ветви дисперсионного соотношения, сместив начало координат из O в A. На рис. 4.12 они изображены штриховыми линиями. Каждое пересечение штриховой и сплошной линий (например, точка B) представляет вторую волну, которая вместе с A может включаться в резонансную триаду. Из B проведем вектор, параллельный и равный $\overrightarrow{AO}$. По построению, этот вектор упирается в дисперсионную кривую в точке C. Следовательно, все точки A, B и C лежат на дисперсионной кривой и поэтому представляют решения (4.2.12). Более того, очевидно, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$, так что волны, соответствующие $(A, -B, C)$, также удовлетворяют (4.2.1).

Триады, найденные таким путем, являются одномерными ($\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_3$ — коллинеарны). В более общем случае, когда $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ и $\mathbf{k}_3$

компланарны, решения (4.2.12) лежат на поверхности, которая может быть получена вращением рис. 4.12 относительно оси ω. Только что изложенный геометрический метод поиска резонансных триад до сих пор используется при решении задач более высокой размерности.

Если в обсуждаемой проблеме диэлектрический материал остается анизотропным в линейном приближении, то размерность дисперсионного соотношения будет обязательно выше. В этом случае тоже используется геометрический метод, хотя очевидно, что он может оказаться довольно сложным.

Далее, найдем слабонелинейные решения (4.2.5, 9). Соответствующей мерой нелинейности, как это следует из (4.2.9), является

$$\varepsilon = \max\left\{\frac{d_{ijk}P_j}{\omega_0^2}\right\}.$$

Поле является слабо нелинейным, если $\varepsilon \ll 1$. Будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t, \varepsilon) &= \varepsilon\mathbf{E}_1(\mathbf{x}, t, \varepsilon) + \varepsilon^2\mathbf{E}_2 + O(\varepsilon^3), \\ \mathbf{P}(\mathbf{x}, t, \varepsilon) &= \varepsilon\mathbf{P}_1 + \varepsilon^2\mathbf{P}_2 + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \tag{4.2.15a}$$

где

$$\begin{gathered} \mathbf{E}_1 = \sum_{m=1}^{N}\{\mathbf{A}_m(\mathbf{y}, \tau)\exp(i\theta_m) + \mathbf{A}_m^*\exp(-i\theta_m)\}, \\ \tau = \varepsilon t, \quad \mathbf{y} = \varepsilon\mathbf{x}, \quad \theta_m = \mathbf{k}_m\cdot\mathbf{x} - \omega_m t. \end{gathered} \tag{4.2.15b}$$

Поясним сказанное.

(i) В лабораторных условиях, обеспечивающих точное управление входящими волнами, представление поля в виде дискретной суммы N волн является вполне оправданным. Однако если входящие волны содержат две волны резонансной триады, третья волна триады также должна содержаться в $\mathbf{E}_1$. Изначально она может иметь нулевую амплитуду.

(ii) В этой задаче временны́е и пространственные переменные меняются своими обычными ролями. Электрическое поле, определенное на границе материала во все моменты времени, эволюционирует в пространстве, проходя через среду. Возможные медленные модуляции входящего волнового пакета определяются зависимостью $\mathbf{A}_m$ от τ.

(iii) Термин «медленные» модуляции нужно понимать следующим образом. Период волны, испускаемой рубиновым лазером, примерно равен 2×10^{-15} с. Для того чтобы достичь большей интенсивности поля, лазерный импульс (модулируя доброт-

ность) делают столь коротким во времени, что он может измеряться пикосекундами (т. е. 10^{-12} с). Такие короткие импульсы содержат порядка тысячи осцилляций поля и могут рассматриваться как медленная модуляция!

В низшем порядке разложения (4.2.15) мы просто получаем решение линейной задачи

$$\mathbf{P}_1 = \sum_{m=1}^{N} \frac{\Omega^2 c^{-2}}{\omega_0^2 - \omega_m^2} \{\mathbf{A}_m \exp(i\theta_m) + \mathbf{A}_m^* \exp(-i\theta_m)\},$$

где $(\mathbf{k}_m, \omega_m)$ связаны соотношением (4.2.12).

Предположим, что это линеаризованное решение имеет единственную резонансную триаду, в которой $(\mathbf{k}, \omega)$ удовлетворяют (4.2.1), а вектор поля имеет постоянную ориентацию, определяемую d_{ijk}. Например, в случае кристалла кварца ($d_{111} \neq 0$)

$$\mathbf{A}_m = \mathbf{v} a_m (\mathbf{y}, \tau), \quad m = 1, 2, 3,$$

где $\mathbf{v}$ — постоянный единичный вектор, а все a_m — скаляры. Такое решение в низшем порядке порождает сингулярные члены следующего порядка, если отсутствует трехволновое резонансное взаимодействие на больших масштабах пространственных координат, определяемое уравнениями

$$\partial_\tau a_1 + (\mathbf{c}_1 \cdot \nabla_y) a_1 = i\gamma_1 a_2^* a_3^*, \quad \partial_\tau a_2 + (\mathbf{c}_2 \cdot \nabla_y) a_2 = i\gamma_2 a_3^* a_1^*,$$

(4.2.16а)

$$\partial_\tau a_3 + (\mathbf{c}_3 \cdot \nabla_y) a_3 = i\gamma_3 a_1^* a_2^*,$$

где

$$\mathbf{c}_l \cdot \Delta_y = \sum_{j=0}^{3} \frac{\partial \omega}{\partial k_j}\bigg|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_l} \frac{\partial}{\partial y_j},$$

(4.2.16в)

$$\gamma_l = \frac{c^2 d_{ijk} \omega_l}{\left[1 + \omega_0^2 \Omega^2 / (\omega_l^2 - \omega_0^2)^2\right] \prod_{m=1}^{3} (\omega_m^2 - \omega_0^2)}.$$

Ввиду того что $d_{ijk} \geqslant 0$, а $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ не могут иметь один и тот же знак (этот факт следует из (4.2.1)), то $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ также имеют разные знаки.

Таким образом, мы имеем дело с распадной неустойчивостью, обсуждавшейся в разд. 2.1.

Генерация второй гармоники является особым случаем резонансной триады, в котором $\omega_3 = \omega_1$, $\omega_2 = -2\omega_1$. Более того, мы можем отождествить a_3 с a_1 и преобразовать уравнения к виду

(4.2.17)
$$\partial_\tau a_1 + (\mathbf{c}_1 \cdot \nabla_y) a_1 = i a_1^* a_2^*,$$
$$\partial_\tau a_2 + (\mathbf{c}_2 \cdot \nabla_y) a_2 = -2i (a_1^*)^2.$$

Следовательно, вторая гармоника a_2, даже если она первоначально отсутствовала, будет возбуждаться основной гармоникой a_1. В нелинейной оптике этот частный случай широко представлен в эксперименте. В формулировке метода обратной задачи он оказывается сингулярным пределом (см. [263]).

Ограничимся исследованием стационарной одномерной задачи, когда все три волны распространяются вдоль одной оси, т. е. ($\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_3$) параллельны и ($\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$) ориентированы в соответствии с d_{ijk}. Обозначим основную пространственную координату буквой y. Тогда (4.2.16) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(4.2.18) \qquad \dot{a}_1 = i\gamma_1 a_2^* a_2^*/c_1, \quad \dot{a}_2 = i\gamma_2 a_3^* a_1^*/c_2, \quad \dot{a}_3 = i\gamma_3 a_1^* a_2^* m/c_3.$$

где $\dot{a} = \partial_y(a)$.

Два интеграла этих уравнений, иногда называемые соотношениями Менли — Роу, имеют следующий вид:

$$(4.2.19) \qquad \frac{c_1|a_1|^2}{\gamma_1} - \frac{c_2|a_2|^2}{\gamma_2} = \text{const}, \qquad \frac{c_1|a_1|^2}{\gamma_1} - \frac{c_3|a_3|^2}{\gamma_3} = \text{const}.$$

Отсюда следует закон сохранения энергии

$$(4.2.20) \qquad \sum_{j=1}^{3} \frac{k_j|a_j|^2}{\omega_j} = \text{const}.$$

Здесь мы воспользовались формулами (4.2.16b), (4.2.12) и (4.2.1). Таким образом, полная энергия входящих волн распределяется по трем взаимодействующим волнам. Эти соотношения имеют также квантовомеханическую интерпретацию, обсуждавшуюся Ахмановым и Хохловым (1972) [38]. Как отмечал Болл [47], полное решение системы (4.2.18) можно выразить через эллиптические функции.

Как же обстоит дело с непосредственными экспериментальными данными? Можно сказать, что нелинейная оптика берет начало с экспериментальной демонстрации эффекта генерации второй гармоники Франкеном, Хиллом, Петерсом и Вейнрейхом (1961) [167].

Они сфокусировали «стационарный» луч рубинового лазера (0,6943 мкм) на торцевой поверхности кристалла кварца и зарегистрировали излучение удвоенной частоты, испускаемое с обратной стороны, что соответствует синему цвету с длиной волны 0,347 мкм. (В данном случае импульс, длительность которого превышает 10^{-6} с, можно считать стационарным.) Доля мощности второй гармоники в этом стационарном одномерном эксперименте составила всего 10^{-8}. В последующих более тонких экспериментах удалось существенно увеличить долю мощности второй гармоники.

Впечатляющая демонстрация этого эффекта запечатлена на фотографии 4.13. Более детальное обсуждение данного вопроса приведено в работах Ярива (1975) [515] и Клейнмана (1972) [277].

Следует отметить, что эти эксперименты имеют важное практическое значение. Получить источник когерентного излучения с частотой, вдвое большей, чем у рубинового лазера, — это значит сделать «синий лазер». Очевидно, что с этой целью желательно перераспределить как можно больше энергии в гармоническую моду.

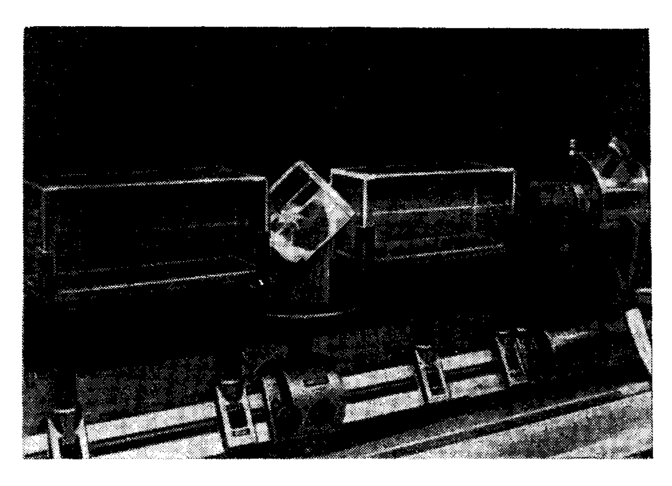


Рис. 4.13. Оптическая демонстрация генерации второй гармоники: луч красного цвета, проходя сквозь кристалл кислого фосфорно-кислого аммония, генерирует луч голубого цвета. (Фотография любезно предоставлена Р. В. Теруном.)

Это только один из примеров применения трехволнового взаимодействия в нелинейной оптике. Фактически в этой области было реализовано несколько тонких следствий из формулы (4.2.1), которые обсуждались Ахмановым и Хохловым (1972) [38], а также Яривом (1975) [515]. Здесь мы рассмотрим только два из них.

(i) *Параметрические осцилляции* возникают в тех случаях, когда лазерный луч высокой частоты ($-\omega_3$) используется для «накачки» в резонаторе двух более низкочастотных сигналов ω_1, ω_2 ($\omega_1+\omega_2=-\omega_3$). При этом нелинейное взаимодействие должно быть достаточно интенсивным, чтобы сигналы ω_1 и ω_2 получали по крайней мере столько же энергии, сколько они теряют из-за несовершенства зеркал и других потерь. Практическая выгода заключается в том, что хотя ω_3 фиксирована частотой резо-

нансных переходов лазера, но частоты ω_1 и ω_2 определяются только формулой (4.2.1) и дисперсионным соотношением для среды. Таким образом, ценой некоторого уменьшения КПД мы получили возможность перестраивать частоты ω_1, ω_2 в довольно широких пределах. Следовательно, получен источник когерентного излучения с переменной частотой.

(ii) *Повышение частоты* относится к взаимодействию низкочастотного оптического сигнала ω_1 с интенсивным лазерным излучением частоты ω_2 для получения сигнала высокой частоты $-\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Практическая ценность такого преобразования состоит в том, что оно позволяет регистрировать излучение в инфракрасной части спектра, в которой возможности существующих детекторов весьма органиченны. Регистрация осуществляется путем преобразования сигнала в видимую область спектра, для которой существуют детекторы значительно более высокого качества.

Для всех этих приложений следует повторить, что даже если задача одномерна, формулы (4.2.18) справедливы только в тех случаях, когда входящий луч стационарен. Если он представляет собой существенно короткий импульс, то справедливы уравнения (4.2.16).

4.2.b. Внутренние волны. Одна из фундаментальных проблем физической океанологии [177, 178] — объяснение динамических источников спектра внутренних волн, измеряемого в океанах [177, 178]. Одним из аспектов этой проблемы является объяснение начальной генерации внутренних волн. Другим аспектом является объяснение механизма перераспределения энергии по различным модам внутренних волн. Полагают, что резонансные триады играют роль в обоих процессах, здесь мы обсудим только первый (см. также [421], [499], [362], [404]).

Один из возможных механизмов генерации внутренних волн — это резонансная триада, включающая комбинацию поверхностных и внутренних волн. В частности, если первоначально имели место только поверхностные волны, а внутренние отсутствовали, то эта триада может возбудить внутреннее волновое движение.

Простая двухслойная модель, обсуждавшаяся в разд. 4.1, допускает резонансные триады, включающие поверхностные и внутренние волны [47]. Поэтому в целях упрощения анализа взаимодействия мы будем использовать эту модель. Однако читатель должен заметить, что эта система в дополнение к поверхностным волнам допускает только один набор внутренних волн. Поэтому на ее примере можно продемонстрировать перенос энергии в первую внутреннюю волновую моду, но не перенос энергии из этой моды в другие внутренние волны. Это ограничение суще-

ственно, если система используется для изучения океанских волн.

Рассматриваемая конфигурация показана на рис. 4.8. Линеаризованное дисперсионное соотношение для волн в этой системе было дано формулой (4.1.25), рис. 4.14. Используя геометрический метод Болла [47] (см. также [455]), легко показать, что (4.1.25) допускает несколько резонансных триад, включающих либо две поверхностные и одну внутреннюю волны, либо две внутренние и одну поверхностную волну.

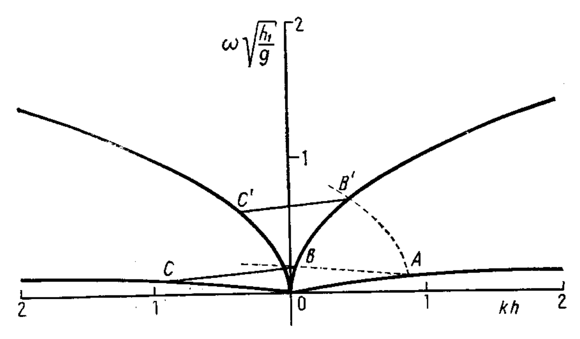


Рис. 4.14. Линеаризованное дисперсионное соотношение для двухслойной системы (4.1.25). Рисунок соответствует случаю $h_2 = \infty$. Показаны две резонансные триады, одна из них включает две поверхностные волны, другая две внутренние волны.

Далее, необходимо показать, что коэффициенты взаимодействия в (4.2.2) не обращаются в нуль. Соответствующие вычисления можно выполнить несколькими способами, одним из которых является обычное применение метода нескольких временны́х масштабов (см., например, [483], [248]). Для того чтобы избежать утомительных алгебраических вычислений, с которыми связан этот подход, Симонс [462] изобрел вариационный метод, более эффективный в вычислительном плане. С другими методами можно ознакомиться в работах, на которые ссылается Филлипс [421]. Обычно эти построения включают однородные волновые цуги, так что эволюционные уравнения соответствуют (2.2.2′), а не (4.2.2). Учет пространственной и временной модуляции, однако, несложен. Важным моментом в нашем обсуждении является то, что коэффициенты резонансных триад в двухслойной модели не равны нулю тождественно.

Каково значение этих триад? Для простоты рассмотрим сначала случай пространственно однородного цуга волн. Изменив порядок нумерации мод линеаризованных волн, можно переписать кинематическое условие (4.2.1) в виде

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3, \quad \omega_1 + \omega_2 = \omega_3, \tag{4.2.21}$$

где $\omega_i > 0$. Для консервативных систем, не зависящих от пространственных переменных, Хассельман [204] заметил возможность следующего представления условия (4.2.2а):

$$\partial_\tau a_1 = ia_2^* a_3^*, \quad \partial_\tau a_2 = ia_3^* a_1^*, \quad \partial_\tau a_3 = -ia_1^* a_2^*, \tag{4.2.22}$$

т. е. отрицательному коэффициенту взаимодействия в (4.2.22) соответствует наибольшая частота в (4.2.21). Это соответствие не зависит от вида коэффициентов взаимодействия, достаточно только, что бы они не обращались в нуль. Рассмотрим однородный цуг волн частоты ω_s с безразмерной амплитудой a_3 (порядка единицы). Если a_1 и a_2 вначале бесконечно малы, то на начальной стадии, как это следует из (4.2.22), a_3 постоянно, и

$$\partial_\tau^2 a_i \sim |a_3|^2 a_i, \quad i = 1, 2. \tag{4.2.23}$$

Таким образом, бесконечно малые моды экспоненциально нарастают за счет a_3, т. е. a_3 является нелинейно неустойчивой модой по отношению к малым возмущениям в триаде, определяемой (4.2.21). (Следует иметь в виду, что эта неустойчивость кратковременна, общее решение (4.2.22) является периодическим.)

Если резонансные триады, связанные с двухслойной моделью, пронумерованы в соответствии с (4.2.21), где $\omega > 0$, то ω_3 обязательно относится к поверхностной волне (см. рис. 4.14). Ввиду того что коэффициенты взаимодействия не обращаются в нуль, из теоремы Хассельмана следует, что поверхностные волны в двухжидкостной системе неустойчивы. Начальная скорость развития неустойчивости пропорциональна амплитуде $|a_3|$ из (4.2.23). Заметим, что в данном случае скорость развития неустойчивости выше, чем неустойчивость Бенджамина — Фейера, которая пропорциональна $|a_3|^2$ (см. разд. 4.3).

Как обстоит дело с экспериментальным подтверждением такой неустойчивости? Льюис, Лейк и Коу [326] изучали (4.2.22) с точки зрения устойчивости и рассматривал только начальную стадию возникновения внутренних мод за счет возбуждения двух поверхностных волн. Предсказанные наблюдения оказались в сравнительно хорошем соответствии с решениями (4.2.22) на начальной стадии, но эксперимент прекращался раньше, чем мог проявиться периодический характер решения.

Возбуждением двумя поверхностными волнами внутреннего волнового движения занимался также Джойс [248]. В его экспериментах вязкие потери были сравнимы с нелинейным ростом, поэтому в уравнения (4.2.22) были добавлены слагаемые, учитывающие потери по линейному приближению. Одной из его основных задач являлось наблюдение переходного процесса установления стационарного состояния, в котором подпитка поверх-

ностных волн происходит с той же скоростью, что и диссипация всех трех волн. Ясно, что периодические решения (4.2.22) в этом эксперименте не возникали.

В тех случаях, когда в уравнения (4.2.22) включены линейные вязкостные слагаемые, как отметил Мак-Эван [364], существует минимальная амплитуда a_3, ниже которой неустойчивость исчезает. Он также экспериментально продемонстрировал эту амплитудную отсечку (см. также [365]).

Отметим, что во всех перечисленных экспериментах изучались модуляции однородных волновых шлейфов по времени или пространству, что соответствует (4.2.2′), а не (4.2.2). Заметим также, что в экспериментах не наблюдались точные периодические решения (4.2.2′); причиной тому служит или сильная диссипация, которая не учитывается в (4.2.2′), или малая продолжительность эксперимента.

Рассмотрим резонансные триады волновых пакетов, промодулированных как по времени, так и по пространству, что соответствует уравнениям (4.2.2). Не вызывает сомнений, что в случае океанских волн эта модель более предпочтительна. Ввиду того что кинематическое условие (2.2.21) не зависит от групповых скоростей волн, три волновых пакета резонансных волн (конечных размеров) могут пространственно разделиться, что и происходит на самом деле (см. разд. 2.1). Таким образом, из всех резонансных триад, допускаемых линеаризованным дисперсионным соотношением (4.1.25), особое внимание следует уделять тем триадам, в которых близки групповые скорости, что приводит к увеличению времени их эффективного взаимодействия.

Существуе семейство триад, удовлетворяющих (4.1.25), в которых k_1 представляет длинные внутренние волны, а k_2, k_3 — короткие поверхностные волны, причем $k_1 = k_3 - k_2 \ll k_3$.

Из (4.2.21) следует, что

$$\frac{\omega_3 - \omega_2}{k_3 - k_2} = \frac{\omega_1}{k_1}. \tag{4.2.24}$$

Для достаточно малых $k_3 - k_2$ левая часть (4.2.24) является групповой скоростью поверхностной волны k_3 ($\approx k_2$), а правая часть — фазовой скоростью внутренней волны. Но поскольку внутренняя волна длинная, то эта фазовая скорость равна групповой. Таким образом, длинные внутренние и короткие поверхностные волны распространяются совместно. В некоторых случаях этот факт известен как взаимодействие длинных и коротких волн ([176], [421], [57], [432], [340]).

Наконец отметим, что нами не рассматривались волновые процессы, происходящие на фоне неоднородного по вертикали (сдвигового) течения. Кернс (1979) [84] и Крейк и Адам (1979) [126] показали, что если равновесной конфигурации соответ-

ствует устойчивая стратификация (т. е. существует горизонтальная скорость $U(z)$, где $U'(z)=0$), то все коэффициенты взаимодействия могут иметь один и тот же знак. В этом случае имеет место «взрывная неустойчивость», первоначально известная только для плазмы (см. [132], [468]). Она состоит в том, что три резонансные волны поглощают энергию из фонового течения, формируя сингулярность за конечное время (в данном приближении).

4.2. с. Резонансные квартеты. Мы видели, кто в пределе малой амплитуды резонансные триады зачастую адекватны первой нелинейной поправке линейной теории. Основные уравнения (4.2.2) или (4.2.2′) являются условиями подавления секулярных членов $O(\varepsilon^2)$. Если в этом порядке нет растущих секулярных членов, то первая нетривиальная нелинейная поправка возникает для $O(\varepsilon^3)$. В нелинейной оптике это имеет место, когда диэлектрик является изотропным или кристаллом с центром симметрии. Для внутренних и поверхностных волн такая ситуация возникает при рассмотрении взаимодействий только между различными волнами одной и той же вертикальной моды. В частном случае поверхностных волн в однородной жидкости резонансных триад нет [420].

Резонансные квартеты, если соответствующие коэффициенты взаимодействия не обращаются в нуль, возникают в следующем порядке. Резонансное условие, соответствующее (4.2.1), имеет вид

$$\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4=0,\quad \omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4=0, \tag{4.2.25}$$

где $\omega_i=\omega(\mathbf{k}_i)$ определяется из линеаризованного дисперсионного соотношения. Ввиду того что мы предположили $\omega(\mathbf{k}) = -\omega(-\mathbf{k})$, (4.2.25) имеет решения вида

$$\mathbf{k}_1=-\mathbf{k}_2,\quad \mathbf{k}_3=-\mathbf{k}_4. \tag{4.2.26}$$

Таким образом, дисперсионное соотношение всегда допускает существование резонансных квартетов. (Это остается в силе, даже если $\omega(\mathbf{k})+\omega(-\mathbf{k})\neq 0$.)

Для резонансных триад соответствующими медленными переменными являлись $(\varepsilon\mathbf{x}, \varepsilon t)$. Так как резонансные квартеты возникают в следующем порядке, их медленными переменными являются $(\varepsilon^2\mathbf{x}, \varepsilon^2 t)$; нелинейная связь является более слабой и эволюция более медленной. Определяющие уравнения имеют вид

$$\partial_\tau a_m+(\mathbf{c}_m\cdot\nabla)a_m=i\sum_{p=1}^{4}\beta_{mp}a_m a_p a_p^*+i\sum_{q,\,r,\,s\neq m}\gamma_{mqrs}a_q^* a_r^* a_s^*, \tag{4.2.27}$$

где $m = 1, 2, 3, 4$ и $\mathbf{c}_m$ — линеаризованная групповая скорость, соответствующая вектору $\mathbf{k}_m$ (см., например, Бенни и Ньюэлл [58]). Бенни и Ньюэлл также отметили, что если (4.2.26) является единственным решением (4.2.25), то последняя сумма в (4.2.27) обращается в нуль, и решение упрощенных уравнений может быть представлено в компактном виде:

$$a_m(\mathbf{x}, \tau) = f_m(\mathbf{x} - \mathbf{c}_m\tau) \exp i \left\{ \int_0^\tau \sum_p \beta_{mp} \left| f_p(\mathbf{x} - \mathbf{c}_m\tau + (\mathbf{c}_m - \mathbf{c}_p) T) \right|^2 dT \right\}, \tag{4.2.28}$$

где $a_m(\mathbf{x}, 0) = f_m(\mathbf{x})$ — начальные комплексные амплитуды. Другие общие результаты, касающиеся системы (4.2.27), нам не известны. В частности, вопрос о полной интегрируемости (4.2.27) остается открытым.

Совершенно иная картина наблюдается в теории четырехволнового взаимодействия, развитой Хассельманом [202, 203] для поверхностных волн; см. также [205], [504] и [507]. При выводе уравнения (4.2.27) предполагалось, что эффекты нелинейности преобладают над эффектами случайности, а в модели Хассельмана и др. предполагается обратное. Результатом является уравнение переноса типа уравнения Больцмана, а не (4.2.27). По-видимому, решения этих двух моделей не совпадают, поскольку их исходные предположения различны. Необходимо тщательное изучение области применимости каждой модели. По нашим сведениям, это еще не сделано.

4.3. Нелинейное уравнение Шрёдингера и его обобщения. В разд. 4.2 мы видели, что в зависимости от специфики задачи один и тот же метод построения уравнений может привести к взаимодействию либо трех, либо четырех (может быть, и больше) волн. Нелинейное уравнение Шрёдингера (кубическое)

$$i\psi_t + \psi_{xx} + 2\sigma |\psi|^2 \psi = 0, \quad \sigma = \pm 1 \tag{4.3.1}$$

возникает как результат применения подобного метода к линейной системе с дисперсией, но соответствует другой совокупности взаимно компенсирующих слагаемых. Мы можем уточнить это утверждение.

Предположим, что некоторая физическая величина представляет собой суперпозицию N плоских волн с комплексными скалярными амплитудами a_i, $i = 1, 2, \ldots, N$. Как показано в разд. 4.2, уравнения для скалярных триад или квартетов возникают в том случае, если N огибающих медленно меняются во времени и пространстве так, чтобы $(\partial_t + \mathbf{c}_i \cdot \nabla) a_i$ по порядку величины совпадало с нелинейными членами. Здесь $\mathbf{c}_i$ — групповая скорость i-й волны. В тех случаях, когда нелинейные члены

много меньше, т. е. $(\partial_t + \mathbf{c}_i \cdot \nabla) a_i \approx 0$, возникает другая ситуация. В этом случае каждый волновой пакет на данной временной шкале, не взаимодействуя, движется со своей собственной групповой скоростью. Если групповые скорости не совпадают и если все волновые пакеты локализованы, то они разделяются в пространстве. Поэтому нелинейности, возникающие в следующем временном масштабе, приводят к взаимодействию каждого волнового пакета только с самим собой. Для размерности $1+1$ в этом масштабе определяющим уравнением часто служит (4.3.1). При некоторых ограничениях этот вывод справедлив и в том случае, когда начальными условиями являются локальные возмущения, которые не могут быть выражены через N плоских волн.

В разд. 4.2 читатель мог заметить, что линеаризованная групповая скорость, допускающая одну резонансную триаду, как правило, допускает и несколько триад (например, см. рис. 4.12 и 4.14). Требуются дополнительные соображения, чтобы выбрать из них одну «доминирующую» триаду, основными уравнениями которой являются (4.2.2). При исследовании уравнения (4.3.1) таких проблем не возникает, если никакие две линейные групповые скорости не совпадают. В такой ситуации имеет место только автовзаимодействие, так как волновые пакеты разошлись на предыдущем временном масштабе. Однако поперечная неустойчивость, как мы увидели ниже, ограничивает физическую применимость $(1+1)$-мерной модели (4.3.1).

4.3. а. Нелиейнная оптика. Рассмотрим изотропный диэлектрический материал, показатель преломления которого демонстрирует нелинейную поправку в электрическом поле умеренной напряженности:

$$n(\omega, |\mathbf{E}|) = \frac{kc}{\omega} \sim n_0(\omega) + n_2(\omega) |\mathbf{E}|^2. \tag{4.3.2}$$

Для определенности выберем $n_0 > 0$. Ахманов, Хохлов и Сухоруков (1972) [39] обсуждали несколько механизмов возникновения такого нелинейного поправочного члена (см. также [515] и [254]):

(i) «Ориентационный» (или высокочастотный) эффект Керра, отражающий тенденцию анизотропных молекул жидкости ориентироваться вдоль напряженности сильного электрического поля. Естественно, что среда в присутствии поля приобретает анизотропию. Этот эффект в ряде случаев дает основной вклад в n_2.

(ii) «Электрострикция» относится к эффекту сжатия диэлектрического материала электрическим полем. Сжатие в свою очередь меняет показатель преломления. Этот эффект обычно преобладает в жидкостях с изотропными молекулами, в газах и изотропных твердых телах,

(iii) Если вещество поглощает какое-то количество света, то поглощенная энергия приводит к его разогреву и расширению. Ландауэр (1967) [316] показал, что при отсутствии поглощения $n_2 > 0$. Будет показано, что неравенство $n_2 > 0$ отвечает самофокусировке, а $n_2 < 0$ — самодефокусировке света. Следовательно, самодефокусировка может иметь место только в среде, поглощающей свет. Каков бы ни был механизм, формула (4.3.2) предполагает, что отклик среды является квазилокальным и квазистатическим для каждой частоты. Ахманов, Хохлов и Сухоруков (1972) [39] отметили, что электрострикционный и тепловой эффекты обычно нелокальны, а последний к тому же часто является нестатическим. Далее будет рассмотрен простейший способ вывода уравнения (4.3.1), основанный на предположении о применимости (4.3.2). Однако, как мы увидим ниже, обсуждая волны на воде (разд. 4.3.b), в некоторых случаях возможен учет нелокальных эффектов.

Предположим, что стационарная плоская волна фиксированной частоты, распространяясь в направлении x_1, падает на диэлектрик. Комплексная амплитуда поля может медленно меняться в пространстве, но не во времени (по предположению). В соответствии с (4.3.2) подходящей мерой нелинейности является

$$\varepsilon^2 = \max_{x,\,t} \left| \frac{n_2 \,|\, \mathbf{E} \,|^2}{n_0} \right|;$$

предполагаем, что $\varepsilon \ll 1$. В соответствии с (4.3.2)

$$c^2\mathbf{P} = (n^2 - 1)\,\mathbf{E} \sim (n_0^2 - 1 + 2n_0 n_2 |\,\mathbf{E}\,|^2)\,\mathbf{E}, \tag{4.3.3}$$

так что соотношение (4.2.5) принимает вид

$$c^{-2}\partial_t^2 \{(n_0^2 + 2n_0 n_2 |\,\mathbf{E}\,|^2)\,\mathbf{E}\} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} \sim 0. \tag{4.3.4}$$

Введем в рассмотрение медленные пространственные переменные

$$y_1 = \varepsilon x_1, \quad y_2 = \varepsilon x_2, \quad y_3 = \varepsilon x_3, \quad \chi = \varepsilon^2 x_1. \tag{4.3.5}$$

В главном порядке ($O(\varepsilon)$) выражение для электрического поля принимает вид

$$\mathbf{E} = \hat{e}\varepsilon\,\{\psi(\mathbf{y};\,\chi)\exp\{ikx_1 - i\omega t\} + (^*)\} + O(\varepsilon^2), \tag{4.3.6}$$

где $\hat{e}$ — единичный вектор, ортогональный к $\mathbf{k}$, и $\omega(k)$ определяется линейным дисперсионным соотношением (т. е. посредством $n_0(\omega)$, (4.2.14)). Пренебрегая однородными членами следующего порядка, мы получаем

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_1} = 0. \tag{4.3.7}$$

Это значит, что на расстояниях порядка $O(\varepsilon^{-1})$ вдоль направления распространения модуляции волн нет.

Условие исключения секулярных членов, возникающих в порядке $O(\varepsilon^2)$, имеет вид

$$(4.3.8) \qquad 2ik\partial_\chi\psi + \nabla_\perp^2\psi + \{2\omega^2 n_0^2 c^{-2}\,\mathrm{sign}\,(n_2)\}\,|\psi|^2\psi = 0,$$

где $\nabla_\perp^2 = \partial_{y_2}^2 + \partial_{y_3}^2$ — поперечный лапласиан. Уравнение (4.3.8) получил Келли (1965) [273] и независимо Таланов (1965) [473]. При рассмотрении стационарной задачи форма входящего луча задается функцией $\psi(y_2, y_3; \chi = 0)$. Следовательно, (4.3.8) вместе с граничными условиями (y_2, y_3) определяет пространственную эволюцию луча при прохождении диэлектрика в направлении x_1.

Заметим, что (4.3.8) не зависит от ε, так же как (4.3.7) и (4.2.14). Поэтому указанные уравнения не вырождаются в пределе $\varepsilon \to 0$. Это свойство желательно, поскольку указанные уравнения были получены как часть асимптотического разложения по степеням ε.

Обсудим две экспериментальные ситуации. В менее традиционной входящий луч промодулирован только в одном поперечном направлении.

Пусть

$$\frac{\partial\psi}{\partial y_3} = 0.$$

В этом случае уравнение (4.3.8) описывает эволюцию в размерности $(1+1)$. Оно может быть приведено к виду (4.3.1), позволяющему применить результаты метода обратной задачи (см. гл. 1). В частности, если ψ быстро стремится к нулю при $|y_2| \to \infty$ и если $n_2 > 0$, то входящий луч, имеющий достаточную напряженность, будет «самофокусироваться» в N солитонов плюс остаточное излучение (связанное с непрерывным спектром). В данном контексте солитоны имеют вид прямых линий (в плоскости (y_2, χ)), вдоль которых интенсивность луча при $\chi \to \infty$ становится постоянной. Эти солитоны иногда называются волноводами, и параметр, в обычной ситуации определяющий скорость солитона, задает ориентацию волновода в окружающей среде. Этот эффект иногда именуется автолокализацией для того, чтобы отличать его от более сильной самофокусировки, возникающей в случае размерности $(2+1)$.

Термин «автолокализованный волновод» в диэлектрике является более предпочтительным, так как луч не подвержен влиянию дисперсии (или дифракции, что было оговорено выше). К сожалению, как отмечалось в разд. 3.8, $(1+1)$-мерные волноводы неустойчивы по отношению к длинным поперечным возмущениям (т. е. в направлении y_3). Возможно, что недостаточ-

ность экспериментальной информации об автоволноводах обусловлена их неустойчивостью. В этой связи уместно заметить, что соответствующие солитоны огибающих в волнах на воде также неустойчивы по отношению к длинноволновым возмущениям. Тем не менее в эксперименте они получены без особых трудностей: одна из волновых картин приведена на рис. 4.16. Хитрость заключалась в использовании узкого бассейна, поэтому неустойчивые поперечные моды исключались геометрией экспериментальной установки. В принципе аналогичный подход может быть использован для получения устойчивых автоволноводов в диэлектрике. Однако, насколько нам известно, экспериментальная работа в этом направлении не ведется.

Перейдем к рассмотрению более естественной постановки задачи для уравнения (4.3.8), в которой входящий луч имеет сечение, близкое к круговому. Фундаментальным является вопрос: можно ли решить уравнение (4.3.8) при помощи МОЗР в случае размерности $(2+1)$? По-видимому, ответ отрицателен: по крайней мере уравнение (4.3.8) не обладает свойством Пенлеве (см. разд. 3.7). Чтобы убедиться в этом, заметим, что анзатц

$$r = \lambda\left(y_2^2 + y_3^2\right)^{1/2},$$

(4.3.9)

$$\psi\left(y_2, y_3; \chi\right) = \lambda\left|2\omega^2 n_0^2 c^{-2}\right|^{-1/2} R(r) \exp\left(\frac{i\lambda^2\chi}{2k}\right)$$

позволяет осуществить редукцию (4.3.8) к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \operatorname{sign}(n_2) R^3 - R = 0. \tag{4.3.10}$$

Это уравнение обладает сильными подвижными логарифмическими сингулярностями, а значит, не относится к P-типу. Поэтому, основываясь на предположениях разд. 3.7, не следует рассчитывать на то, что уравнение (4.3.8) может быть решено при помощи МОЗР, имеет полный набор переменных действие — угол, обладает свойством возвращаемости и т. д.

Другой фундаментальный вопрос относится к природе самофокусировки в случае размерности $(2+1)$. Захаров и Сынах (1976) [549] доказали, что решения (4.3.8) с $n_2 > 0$ должны фокусироваться за конечное время (см. разд. 3.8).

Существование неустойчивости взрывного типа в решении уравнения (4.3.8) свидетельствует лишь о неприменимости представления в виде ряда по степеням ε, при помощи которого было получено (4.3.8). Ее наличие не является свидетельством существования сингулярности в исходной задаче. Однако характер сингулярности в уравнении (4.3.8) может быть использован для отдельного анализа, который необходим в данной области. Оцен-

ка порядка сингулярности была произведена в работах Келли (1965) [273] и Захарова, Сынаха (1976) [549]. Однако, как отмечено в [28], ни одна из этих оценок, по-видимому, не является исчерпывающей. Точный характер самофокусирующихся сингулярностей решений уравнения (4.3.8) в настоящее время остается невыясненным.

Ахманов, Хохлов и Сухоруков (1972) [39] обсуждали много экспериментальных наблюдений эффекта самофокусировки для размерности (2 + 1). В некоторых случаях сфокусированный луч был столь интенсивным, что происходило физическое повреждение материала. Как отметил Ярив [515], «этот эффект очень интересует экспериментаторов, работающих с очень мощными лазерными импульсами, так как эти повреждения могут происходить внутри самого источника лазерного излучения».

До сих пор мы рассматривали только стационарные падающие лучи. Это ограничение с физической точки зрения нежелательно, потому что высокие интенсивности, необходимые для выполнения (4.3.2), часто достигаются применением лазеров с модуляцией добротности, излучающих короткие или ультракороткие импульсы. К тому же без него можно обойтись. Для того чтобы устранить это ограничение, наряду с (4.3.5) рассмотрим медленное время

(4.3.11) $$\tau = \varepsilon t$$

и обобщим (4.3.6) так, что $\psi = \psi(y, \tau; \chi)$. Следовательно, с точностью до $O(\varepsilon^2)$ (4.3.7) должно быть заменено на

(4.3.12) $$(\partial_\tau + c_1\partial_{y_1})\,\psi = 0,$$

где c_1 — одномерная линеаризованная групповая скорость. Это значит, что импульс распространяется, не меняя форму, с линеаризованной групповой скоростью несущей волны. В следующем порядке (4.3.8) принимает вид

(4.3.13) $$2ik\partial_\chi\psi + \alpha\partial_\eta^2\psi + \nabla_\perp^2\psi + \{2\omega^2 n_0^2 c^{-2}\,\mathrm{sign}\,(n_2)\}\,|\psi|^2\psi = 0,$$

где $\alpha = -k(\partial^2 k)/(\partial\omega^2)$ и $\eta = \tau - y_1/c_1$. Здесь эволюция осуществляется в размерности (3 + 1), но качественно совпадает со случаем размерности (2 + 1). Уравнения (4.3.13) не обладают свойством Пенлеве и, по-видимому, не могут быть решены при помощи МОЗР. Существование самофокусирующейся сингулярности для $\alpha > 0$ доказали Захаров и Сынах (1976) [549], а также Глэсси (1977) [187]. В этом случае природа сингулярности, по-видимому, является не столь тонкой, и Захаров и Сынах (1976) [549] установили, что для $\chi \to \bar{\chi}$

(4.3.14) $$\psi \sim (\bar{\chi} - \chi)^{-1/2}.$$

4.3. b. Волны на воде. Нелинейное уравнение Шрёдингера моделирует эволюцию одномерного пакета волн на поверхности достаточно глубокой воды. Различные способы вывода уравнения в этом случае дали Захаров (1968) [524], Бенни и Роскес (1969) [59], Хасимото и Оно (1972) [201], Дэви и Стюардсон (1974) [131], Юэн и Лейк (1975) [517], Фриман и Дэви (1975) [168], Джорджевик и Редекопп (1977) [138], см. также [28], [518]. Существуют два принципиальных различия между проблемой волн на воде и задачами нелинейной оптики, которые мы обсудим. Во-первых, в случае конечной глубины осцилляторные волны возбуждают среднее течение, которое является нелокальным эффектом. (Нелокальные эффекты могут появляться также и в нелинейной оптике, но в предыдущем обсуждении мы их не рассматривали.) Во-вторых, существует различие в интерпретации уравнения и соответствующих граничных условий. Имеется несколько контекстов, в которых возникало уравнение (4.3.1) или его обобщения для размерности $(2+1)$.

(i) Монохроматические волны можно генерировать пластинкой, осциллирующей на одном из концов длинного бассейна. Эволюция этих волн очень похожа на эволюцию электромагнитных волн, обсуждавшихся выше.

(ii) Локальный шторм на море возбуждает широкий спектр волн, которые разбегаются по горизонтали во всех направлениях. Если бегущие волны имеют малые амплитуды и не взаимодействуют с ветром, выйдя из зоны шторма, то в силу своей дисперсионной природы они в итоге преобразуются в квазиодномерные пакеты квазимонохроматических волн. Если масштабы выбраны правильно, то уравнение, обобщающее (4.3.1) на случай размерности $(2+1)$, описывает эволюцию каждого из этих пакетов в течение длительного времени. Если пакет существенно локализован, то естественно потребовать, чтобы волны исчезали на больших расстояниях от центра пакета.

(iii) Квазимонохроматические и квазиодномерные волны могут покрывать обширные области поверхности моря в результате действия длительного, устойчивого ветра. То же самое уравнение, обобщающее (4.3.1) на случай размерности $(2+1)$, может описывать эволюцию этих волн после прекращения ветра. В этом случае естественно наложить периодические граничные условия в горизонтальных направлениях (см., однако, упр. 5).

В любом случае нас интересует решение (4.1.5)—(4.1.7), имеющее вид совокупности квазимонохроматических, квазиодномерных волновых цугов малой амплитуды. Эти цуги движутся в направлении x с соответствующим (средним) волновым числом $\varkappa = (k, l)$. Пусть a обозначает характерную амплитуду возмущения и δk — характерную вариацию k. Нелинейное уравне-

ние Шрёдингера для размерности $(2+1)$ является следствием следующих предположений $(\varkappa^2 = k^2 + l^2)$:

(i) малость амплитуды

(4.3.15a) $$\varepsilon \equiv \varkappa a \ll 1;$$

(ii) медленное изменение модуляций

(4.3.15b) $$\frac{\delta k}{\varkappa} \ll 1;$$

(iii) квазиодномерность волн

(4.3.15c) $$\frac{|l|}{\varkappa} \ll 1;$$

(iv) баланс всех трех эффектов

(4.3.15d) $$\frac{\delta k}{\varkappa} = O(\varepsilon),$$

(4.3.15e) $$\frac{|l|}{\varkappa} = O(\varepsilon).$$

Безразмерная глубина kh может быть конечной или бесконечной, но для того, чтобы исключить предельный случай мелкой воды (и КдФ), необходимо потребовать

(4.3.16) $$(kh)^2 \gg \varepsilon.$$

В этом предельном случае решением линейной задачи в низшем порядке является

(4.3.17a) $$\varphi \sim \varepsilon \left(\frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh} \right) [\tilde{A} \exp(i\theta) + (^*)] + \text{const}),$$

где (*) обозначает комплексное сопряжение,

(4.3.17b) $$\theta = kx - \omega(k)t,$$

и $\omega(k)$ определяется формулой (4.1.8). Для того чтобы учесть более высокий порядок, введем в рассмотрение медленные (пространственные) переменные (снова используем метод нескольких масштабов)

(4.3.18) $$x_1 = \varepsilon x, \quad y_1 = \varepsilon y, \quad t_1 = \varepsilon t, \quad t_2 = \varepsilon^2 t$$

и разложим φ и ζ в ряд

$$\varphi \sim \varepsilon \Big\{ \Phi(x_1, y_1, t_1, t_2) + \frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh} [\tilde{A}(x_1, y_1, t_1, t_2) \times$$

(4.3.19) $$\times \exp(i\theta) + (^*)] \Big\} + O(\varepsilon^2),$$

$$\zeta = \varepsilon \{\tilde{\zeta}_{11} \exp(i\theta) + (^*)\} + O(\varepsilon^2), \quad \zeta_{11} = \frac{i\omega}{g + k^2 T} \tilde{A},$$

Разложение должно быть произведено до членов порядка $O(\varepsilon^3)$. Переменные, введенные в $\tilde{A}$, отражают то обстоятельство, что рассматриваются волновые пакеты, а не однородные наборы волн, причем $\tilde{\Phi}$ описывает возбуждаемое пакетом среднее течение. Далее будут обсуждаться секулярные эффекты, воздействие которых на $\tilde{\Phi}$ и $\tilde{A}$ проявляется в членах более высокого порядка. Детали обсуждения можно найти в работах Бенни и Роскеса [59], Дэви и Стюартсона [131] или Джорджевика и Редекоппа [138].

В следующем порядке аппроксимации условие секулярности требует перемещения волнового пакета с линейной групповой скоростью

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial t_1} + C_g(k)\frac{\partial \tilde{A}}{\partial x_1} = 0, \tag{4.3.20}$$

где $C_g = d\omega/d\varkappa$. В этом масштабе времени $\tilde{\Phi}$ удовлетворяет неоднородному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial t_1^2} - gh\left\{\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial y_1^2}\right\} = k\omega\beta_1 \frac{\partial}{\partial x_1}|\hat{A}|^2, \tag{4.3.21}$$

где

$$\beta_1 = \frac{kC_g}{\omega}\operatorname{sech}^2 kh + \frac{2}{1+\tilde{T}},$$

$$\tilde{T} = \frac{k^2 T}{g} = (kh)^2\hat{T}.$$

Решение (4.3.21) изменяется коренным образом в зависимости от того, выполнено или нет неравенство

$$gh > C_g^2. \tag{4.3.22}$$

Если отношение $C_g/\sqrt{gh}$ интерпретировать как «число Маха» волнового пакета, то (4.3.22) является условием того, что поток «дозвуковой». Когда $\tilde{A}$ имеет компактный носитель, $\tilde{\Phi}$ содержит слагаемое, которое является решением неоднородного уравнения. Эта компонента решения описывает вынужденное движение со скоростью C_g, т. е. удовлетворяет (4.3.20). Волна, соответствующая решению однородного уравнения (свободная компонента), по порядку величины равна $O\left(t_1^{-1/2}\right)$ при $t_1 \to \infty$; она излучается из области со скоростью $\sqrt{gh}$. Поэтому при выполнении (4.3.22), когда $t_1 \to \infty$, $\tilde{\Phi}$ удовлетворяет как (4.3.20), так и

$$\alpha\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial y_1^2} = -\frac{k\omega}{gh}\beta_1\frac{\partial}{\partial x}|\tilde{A}|^2, \tag{4.3.23}$$

где

$$\alpha = \frac{gh - C_g^2}{gh},$$

вместе с граничными условиями $\tilde{\Phi} \to 0$ при $\left(x_1^2 + y_1^2\right) \to \infty$.

Эти граничные условия были сформулированы Дэви и Стюартсоном (1974) [131], они корректны в тех случаях, когда нет поверхностного натяжения.

Если поверхностное натяжение достаточно велико, то (4.3.22) нарушается, и поток становится «сверхзвуковым». В данном случае, даже если $\tilde{A}$ имеет компактный носитель, $\tilde{\Phi}$ и ее производные отличны от нуля вдоль «линии Маха», выходящей из носителя $\hat{A}$. В пределе $t_1 \to \infty$, как и прежде, Φ удовлетворяет одновременно (4.3.20, 23). Однако теперь соответствующими граничными условиями уравнения (4.3.23) является обращение $\tilde{\Phi}$ вместе со своими производными в нуль впереди носителя $\tilde{A}$ (т. е. при $x_1 \to \infty$); при $x_1 \to -\infty$ *никаких* граничных условий нет.

Поэтому в общем случае нельзя ожидать сходимости интегралов, содержащих $\tilde{\Phi}$ при интегрировании по всей области.

Предел $t_1 \to \infty$ интересен тем, что нелинейное уравнение Шрёдингера возникает при устранении секулярных членов в *следующем* временном масштабе $t = O(\varepsilon^{-2})$. Выполняя это, подставляя результат в безразмерной форме и вводя новые обозначения

$$\xi = \varepsilon k (x - C_g t), \qquad \eta = \varepsilon k y,$$
$$\tau = \varepsilon^2 (gk)^{1/2} t, \tag{4.3.24}$$
$$A = k^2 (gk)^{-1/2} \tilde{A}, \qquad \Phi = k^2 (gk)^{-1/2} \tilde{\Phi},$$

мы убеждаемся, что A и Φ удовлетворяют уравнениям

$$iA_\tau + \lambda A_{\xi\xi} + \mu A_{\eta\eta} = \chi |A|^2 A + \chi_1 A \Phi_\xi, \tag{4.3.25a}$$
$$\alpha \Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\eta\eta} = -\beta (|A|^2)_\xi, \tag{4.3.25b}$$

где

$$\sigma = \operatorname{th} kh, \quad \tilde{T} = \frac{k^2 T}{g}, \quad \varkappa = \sqrt{k^2 + l^2},$$
$$\omega^2 = gh\sigma (1 + \tilde{T}) \geqslant 0,$$
$$\omega_0^2 = g\varkappa,$$
$$\lambda = \frac{\varkappa^2 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \varkappa^2}\right)}{2\omega_0},$$
$$\mu = \frac{\varkappa^2 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial l^2}\right)}{2\omega_0} = \frac{\varkappa C_g}{2\omega_0} \geqslant 0,$$

$$\chi = \left(\frac{\omega_0}{4\omega}\right) \left\{ \frac{(1 - \sigma^2)(9 - \sigma^2) + \tilde{T}(2 - \sigma^2)(7 - \sigma^2)}{\sigma^2 - \tilde{T}(3 - \sigma^2)} + 8\sigma^2 - 2(1 - \sigma^2)^2 (1 + \tilde{T}) - \frac{3\sigma^2 \tilde{T}}{1 + \tilde{T}} \right\}, \tag{4.3.26}$$

$$\chi_1 = 1 + \frac{\varkappa C_g}{2\omega}(1-\sigma)^2(1+\tilde{T}) \geqslant 0,$$

$$\alpha = \frac{(gh - C_g^2)}{gh},$$

$$\beta = \left(\frac{\omega}{\omega_0 kh}\right)\left\{\frac{\varkappa C_g}{\omega}(1-\sigma^2) + \frac{2}{1+\tilde{T}}\right\} \geqslant 0,$$

$$\nu = \chi - \frac{\chi_1 \beta}{\alpha}.$$

В предыдущих формулах все функции вычислялись при $l = 0$, так как мы предполагаем, что рассматриваемые цуги волн распространяются только в направлении x.

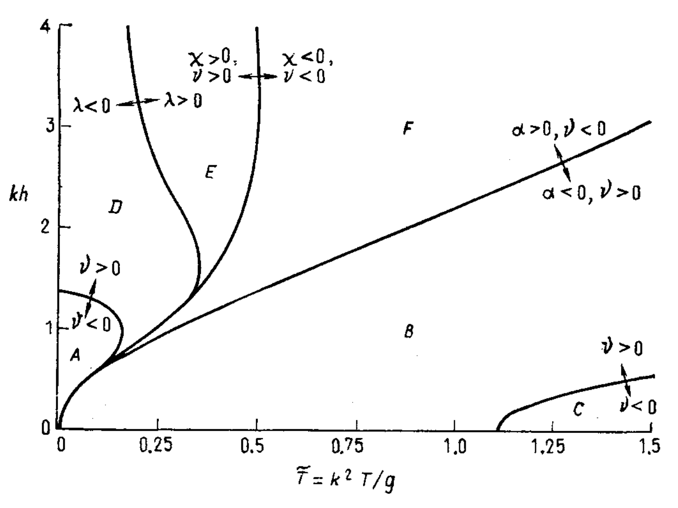


Рис. 4.15. Карта пространства параметров для пакетов осцилляторных волн на вдое, показывающая, где коэффициенты уравнений (4.3.25) меняют знак. Динамика эволюции волн различна в каждой области. Самофокусировка возможна в области F. (Абловиц и Сигур [28].)

Пара связанных уравнений (4.3.25) описывает эволюцию комплексной амплитуды волн A и возбуждаемое или среднее течение $(\nabla\Phi)$. Если волновой пакет локален, естественно потребовать, чтобы A стремилось к нулю при $\xi^2 + \eta^2 \to \infty$. Как указано выше, граничные условия для Φ зависят от знака α. Характер решений (4.3.25) существенно зависит от знаков коэффициентов уравнений. На рис. 4.15 изображена карта пространства параметров, показывающая, где изменяются эти знаки. Как видно из рисунка, каждая граничная линия соответствует простому нулю коэффициента, за исключением двух кривых, ограничивающих область F. Эти две кривые отвечают сингулярности ν. В ок-

рестности каждой из этих кривых процессы происходят на более коротком временно́м масштабе, чем $O(\varepsilon^{-2})$, имеющем место в других случаях (см. [138]).

Этим завершается вывод основных уравнений (4.3.26). Прежде чем перейти к рассмотрению их следствий, сделаем два дополнительных замечания, которые помогут уяснить место полученных уравнений в нашем обсуждении.

(i) В недавних работах Лонгет-Хиггинса (1975) [333], Кокелета (1977) [113] и др. были выяснены некоторые аспекты динамики волн на воде в состоянии, близком к опрокидыванию. Очевидно, что между этими работами и (4.3.25) нет ничего общего, поскольку в первом случае изучались волны большой амплитуды, в то время как уравнения (4.3.25) описывают волны малой амплитуды.

(ii) С уравнениями (4.2.21, 25а) тесно связаны уравнения Захарова (1972) [526], полученные в физике плазмы. В случае размерности $(1+1)$ мы можем отождествить осцилляторные волны на воде с высокочастотными ленгмюровскими волнами в плазме, а Φ_ξ — с плотностью ионов. Поэтому (4.3.2) описывает ионно-акустические моды с учетом пондермоторных сил в правой части уравнения, в то время как (4.3.25а) при $\chi = 0$ описывает эволюцию ленгмюровских волн.

Рассмотрим теперь разрешимость (4.3.25) в различных предельных случаях. В случае глубокой воды ($kh \to \infty$) среднее течение обращается в нуль, и (4.3.25) сводится к нелинейному уравнению Шрёдингера для размерности $(2+1)$:

$$iA_\tau + \lambda_\infty A_{\xi\xi} + \mu_\infty A_{\eta\eta} = \chi_\infty |A|^2 A, \tag{4.3.27}$$

где

$$\lambda_\infty = -\frac{\omega_0}{8\omega}\left(\frac{1 - 6\tilde{T} - 3\tilde{T}^2}{1 + \tilde{T}}\right),$$

$$\mu_\infty = \frac{\omega_0}{4\omega}(1 + 3\tilde{T}),$$

$$\chi_\infty = \frac{\omega_0}{4\omega}\frac{8 + \tilde{T} + 2\tilde{T}^2}{(1 - 2\tilde{T})(1 + \tilde{T})}.$$

Соответствующие граничные условия для локализованных начальных данных имеют вид $A \to 0$ при $\xi^2 + \eta^2 \to \infty$.

Как указано выше, это уравнение не обладает свойством Пенлеве и, по-видимому, не может быть решено при помощи МОЗР. Более того, в случае периодических условий нет надежды на наблюдение возвращаемости в течение сколь угодно большого промежутка времени. В работах Йена и Фергюсона (1978) [516] сообщалось о почти возвращаемости численного решения (4.3.27) за сравнительно короткое время. Интегрирование на бо́льших

временных масштабах, по-видимому, должно показать, что возвращаемость приближенно реализуется лишь в течение короткого времени. Последующая работа Мартина и Йена (1980) [353], похоже, согласуется с этим предположением.

В области F рис. 4.15 (т. е. в случае достаточно сильного поверхностного натяжения для достаточно глубокой воды) уравнение (4.3.27) имеет решения, которые фокусируются за конечное время, так же как это было в случае (4.3.8). Предельный случай бесконечно глубокой воды не исключает возможности фокусировки, которая может иметь место и в решениях (4.3.25) для области F. В отличие от оптики этот эффект пока не наблюдался для волн на воде. Подробности можно найти в работе Абловица и Сигура [28].

В пределе мелкой воды, т. е. когда $kh \to 0$, но $\varepsilon \ll (kh)^2$, ситуация совсем другая. В этом пределе после масштабных преобразований мы получим уравнения

$$(4.3.28)\qquad \begin{aligned} iA_t - \sigma A_{xx} + A_{yy} &= \sigma |A|^2 A + A\Phi_x, \\ \sigma\Phi_{xx} + \Phi_{yy} &= -2(|A|^2)_x, \end{aligned}$$

где $\sigma = \operatorname{sign}\left(\frac{1}{3} - \hat{T}\right)$. К этому уравнению применим МОЗР, и точные N-солитонные решения были получены в работах [7] и [42]. Решения типа лампов были найдены в [447]. Таким образом, очевидно, что решения (4.3.25) ведут себя хорошо в пределе мелкой воды и имеют плохое поведение, если глубина достаточно велика.

В заключение рассмотрим уравнения (4.3.25) в случае размерности $(1+1)$. Как отмечено в [28] и [236], возможны различные способы понижения порядка в зависимости от того, в каком направлении допустима модуляция огибающей. Однако экспериментально модуляция волн наблюдалась только в направлении их распространения, и поэтому мы рассмотрим только этот случай. Если в уравнениях (4.3.25) $\partial_\eta = 0$, то второе уравнение может быть один раз проинтегрировано, и (4.3.25a) принимает вид

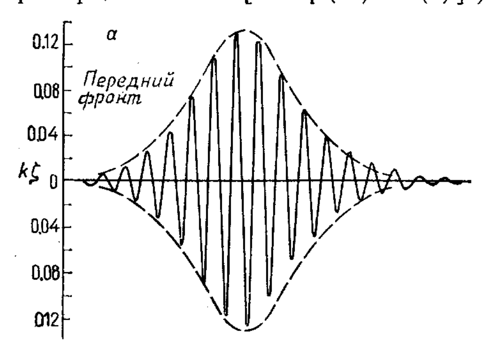
$$(4.3.29)\qquad iA_\tau + \lambda A_{\xi\xi} = \nu |A|^2 A,$$

где λ, ν определены формулами (4.3.26). Начальные данные в эксперименте можно сформировать, модулируя (во времени) амплитуду осциллирующей пластинки на одном из концов одномерного бассейна. Если $\lambda\nu > 0$, что соответствует областям A, B и E на рис. 4.15, то солитонов нет. Произвольные начальные данные, гладкие и обращающиеся в нуль при $|\xi| \to \infty$, порождают излучение, которое убывает как $\tau^{-1/2}$ (см. разд. 1.7).

Солитоны огибающих возможны в областях C, D и F, где $\lambda\nu < 0$. Односолитонным решением (4.3.29) является функция

$$A = a\left|\frac{2\lambda}{\nu}\right|^{1/2} \operatorname{sech}\{a(\xi - 2b\tau)\} \exp\{ib\xi + i\lambda(a^2 - b^2)\tau\}. \qquad (4.3.30)$$

(Напомним, что возвышение свободной поверхности, см. (4.3.19), пропорционально $[A\exp(i\theta) - (*)]$.) На рис. 4.16 изображены результаты экспериментальных измерений таких волн в двух точках бассейна, расположенных ниже по направлению движения волн.



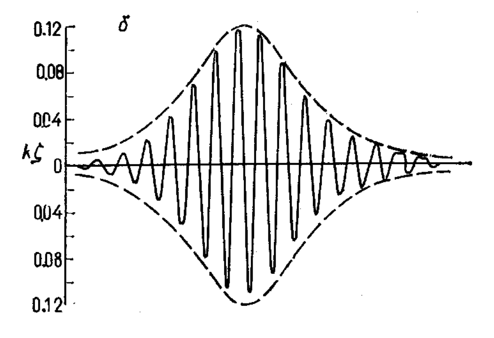


Рис. 4.16. Смещение поверхности воды, показывающее эволюцию огибающей в двух отметках вдоль потока. Здесь $h = 1$ м, $kh = 4{,}0$, $\omega = 1$ Гц, $T = 1\cdot 10^{-4}$, сплошной линией показано смещение поверхности в эксперименте, штриховой — теоретическая форма огибающей; $k\zeta = ka\operatorname{sech}(z)$, $z = [ag/\omega](\nu/8\lambda)^{1/2}(C_g t - x)$.
(*а*) 6 м от волнопродуктора, $ka = 0{,}132$: (*б*) 30 м от волнопродуктора, $ka = 0{,}116$. (Абловиц и Сигур [28].)

На рисунке мы совместили солитонное решение уравнения (4.3.29) с соответствующим пиком амплитуды в каждой точке. Заметим, что амплитуда волн во втором измерении уменьшилась, что свидетельствует о наличии эффектов, обусловленных вязкостью. И все-таки ввиду того, что характерный временно́й масштаб, на котором влияние вязкости становится заметным, больше характерного времени эффектов, описываемых уравнением (4.3.29), то волна сохраняет свою форму, чтобы локально выглядеть как солитон.

Напомним, что в разд. 1.1 солитоны были определены через их свойство сохранять форму независимо от взаимодействия. Йен и Лейк [517] показали интересную экспериментальную демонстрацию этого свойства, запечатленную на рис. 4.17. В первом столбце изображена картина распространения солитона огибающей без изменения формы на расстояние 9,15 м. Второй столбец изображает другую волну с несколько

иной частотой несущих волн. Эта волна не является солитоном, и при распространении на то же расстояние ясно наблюдается эволюция волнового пакета. Последний столбец демонстрирует взаимодействие этих двух волновых пакетов. Несмотря на то что взаимодействие сложно, измеренная форма волны является суперпозицией двух волн, зарегистрированных ранее, т. е. после взаимодействия волны снова восстанавливают свои исходные формы.

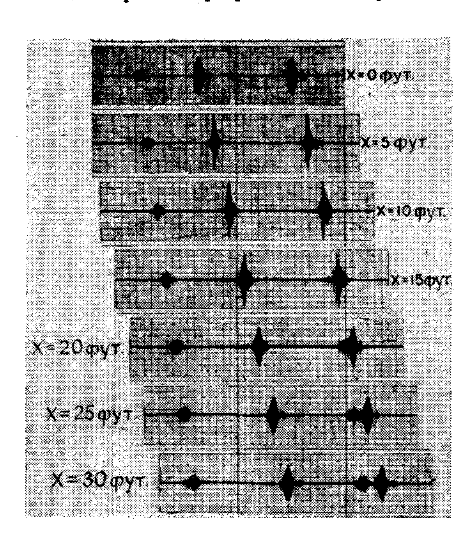


Рис. 4.17. Взаимодействие двух движущихся волновых пакетов, Слева: первый единичный импульс, $\omega_0 = 1{,}5$ Гц, начальное $(ka) = 0{,}10$, пакет содержит 6 периодов; в центре: второй единичный импульс, $\omega_0=3$ Гц, начальное $(ka)_{max} = 0{,}2$, пакет, содержащий 12 периодов, распадается на два солитона; справа: взаимодействие двух волновых пакетов. (Йен, Лейк [517].)

Лейк, Йен, Рангальдер и Фергюсон (1977) [308] рассмотрели также (4.3.29) при периодических граничных условиях. В этом случае теория предсказывает возвращаемость, которую они наблюдали экспериментально. Они также установили связь между временем возвращения и начальной неустойчивостью (Бенджамина — Фейра) набора стоксовских волн на этой частоте. Йен и Лейк (1980) [518] дали более полное описание этого эксперимента.

Каждое решение уравнения (4.3.29), разумеется, также удовлетворяет (4.3.25), но, как обсуждалось в разд. 3.8, солитоны неустойчивы по отношению к длинноволновым поперечным возмущениям. Солитоны, показанные на рис. 4.16, 4.17, измерены в сравнительно узких бассейнах, которые исключают дестабилизирующие моды. Следовательно, те же самые эксперименты не могут быть проведены успешно в бассейнах существенно большей ширины. Экспериментальное подтверждение этой неустойчивости можно видеть, сравнивая результаты измерений волн, полученные Хаммаком [195] и приведенные на рис. 4.16 и 4.18. Начальные и прочие условия, при которых выполнялись оба эксперимента, были почти одинаковы, за исключением того, что рис. 4.16 соответствует сравнительно узкому бассейну (шириной 86,4 см), в то время как рис. 4.18 — более широкому (244 см). В частно-

сти, широкий бассейн допускает существование дестабилизирующих поперечных мод, которых нет в узком бассейне. Неустойчивый характер солитона огибающей ясно виден на рис. 4.18.

Подведем итог: уравнения (4.3.25) описывают эволюцию локализованных волновых пакетов осцилляторных волн на воде относительно малой амплитуды для размерности $(2+1)$. При уменьшении размерности до $(1+1)$ уравнения могут быть решены точно при помощи МОЗР. Теоретические результаты с при-

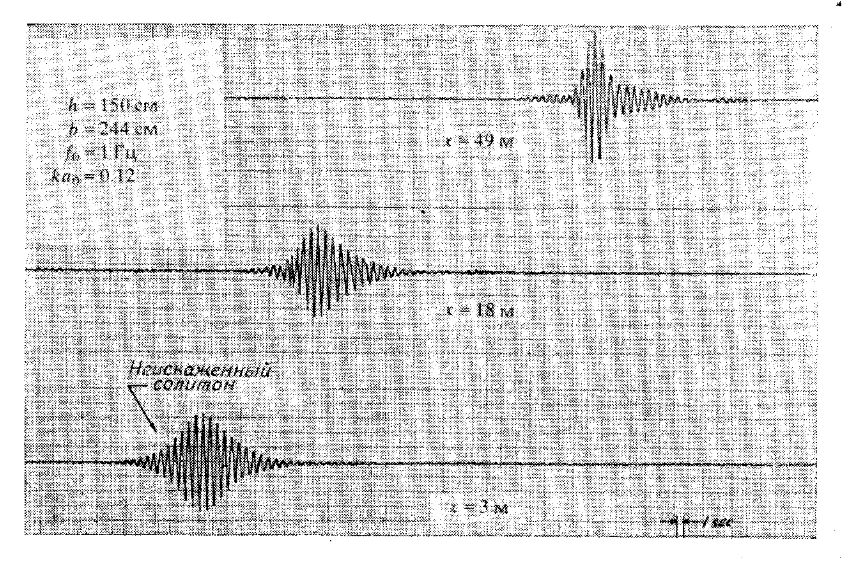


Рис. 4.18. Эволюция волнового пакета в широком бассейне, демонстрирующая поперечную неустойчивость, отсутствующую на рис. 4.16. (Материал любезно предоставлен Дж. Л. Хаммаком.)

емлемой точностью совпадают с экспериментами, проведенными при условиях, также обеспечивающих размерность $(1+1)$. Однако ввиду неустойчивости солитонов по отношению к длинноволновым поперечным возмущениям ни теория, ни эксперименты, соответствующие размерности $(1+1)$, не могут быть использованы для прогноза эволюции волн размерности $(2+1)$. Теории, пригодной для описания таких волн, в настоящее время не существует.

4.4. Уравнения типа sin-Гордон. Уравнение sin-Гордон для размерности $(1+1)$ может быть представлено в виде

(4.4.1a) $$\varphi_{xx} - \varphi_{tt} = \sin\varphi$$

или в конусных переменных:

(4.4.1b) $$\varphi_{\chi\tau} = \sin\varphi,$$

Подобно другим уравнениям, которые мы рассмотрели в этой главе, оно возникает в самых различных областях. Скотт, Чу и Мак-Лафлин [452] перечислили некоторые из них, приведя обширный библиографический список. Будет показано, что в предельном случае бесконечно узкой спектральной линии в задаче о самоиндуцированной прозрачности это уравнение возникает как условие отсутствия секулярных членов при разложении в ряд по теории возмущений. При этом предполагается малость амплитуд. Гиббон, Джеймс, Мороз (1979) [185] показали, что аналогичный анализ бароклинной неустойчивости вращающейся системы двух слоев жидкости также приводит к уравнениям (4.4.1). По-видимому, такой способ вывода уравнений (4.4.1) является типичным. Он соответствует процедуре, рассмотренной в разд. 4.1, 4.2 и 4.3 в том смысле, что эволюционные уравнения возникали как некоторые условия на секулярные члены в разложениях по теории возмущений, возникавшие в более высоком порядке. Однако существуют и другие случаи, такие, как описание псевдосферических поверхностей в дифференциальной геометрии или распространение магнитного вихря в бесконечно длинном джозефсоновском контакте, в которых уравнение sin-Гордон возникает без применения теории возмущений. Примеры, представленные здесь, были выбраны главным образом с целью демонстрации разнообразия явлений, описываемых уравнением sin-Гордон.

4.4. а. Дифференциальная геометрия. Начнем с самого раннего из известных приложений уравнения sin-Гордон. Уравнение (4.4.1) описывает двумерные поверхности с постоянной отрицательной кривизной. В этом случае модель является точной, интересующая нас задача имеет размерность $(1+1)$ и не является сужением задачи с большей размерностью. Важная работа Бэклунда о преобразованиях поверхностей (см. разд. 3.1) была посвящена этим приложениям. Приводимое здесь обсуждение проблемы, которое предполагает знакомство читателя с дифференциальной геометрией, является сокращенным вариантом более подробного обсуждения проблемы из работы Эйзенхарта (1909) [148].

Рассмотрим гладкую двумерную поверхность в трехмерном евклидовом пространстве. Пусть y^i $(i = 1, 2, 3)$ обозначают ортогональные декартовы координаты в трехмерном пространстве, а u^α $(\alpha = 1,\ 2)$ — координаты на поверхности. Три уравнения вида

$$y^i = y^i(u^1, u^2)$$

определяют поверхность. Пусть $\mathbf{r}(y^i)$ — радиус-вектор точки P, лежащей на поверхности. Если точку P переместить вдоль по-

верхности на бесконечно малую величину, приращение радиуса-вектора определяется формулой

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha} du^\alpha$$

(здесь и далее по повторяющемуся индексу производится суммирование).

Модуль приращения определяется первой фундаментальной квадратичной формой

$$\mathrm{I} \equiv d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = g_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta, \tag{4.4.2}$$

где

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\beta}$$

является ковариантным метрическим тензором поверхности. Аналогично пусть $\hat{\mathbf{n}}$ — единичный вектор, нормальный к поверхности в точке P. При бесконечно малом перемещении P $\hat{\mathbf{n}}$ изменяется согласно формуле

$$d\hat{\mathbf{n}} = \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial u^\alpha} du^\alpha.$$

Вторая фундаментальная квадратичная форма имеет вид

$$\mathrm{II} \equiv -d\hat{\mathbf{n}} \cdot d\mathbf{r} = h_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta, \tag{4.4.3}$$

где $h_{\alpha\beta}$ — тензор внешней кривизны. Любая гладкая кривая на поверхности, проходящая через точку P, имеет в этой точке некоторый радиус кривизны (в евклидовом пространстве). Меняя направление, в котором кривая пересекает точку P, можно найти максимальный (ρ_1) и минимальный (ρ_2) радиусы кривизны, соответствующие двум главным направлениям в точке P, эти направления ортогональны друг к другу. *Полная* (*гауссова*) *кривизна* поверхности в точке P определяется формулой

$$K = \frac{1}{\rho_1 \rho_2}. \tag{4.4.4}$$

Поверхность имеет отрицательную полную кривизну ($K < 0$), если главные радиусы находятся с противоположных сторон касательной плоскости в точке P. Раструб духовой трубы, седло и тонкие ломтики жареного картофеля — все это примеры поверхностей с отрицательной кривизной.

Пусть λ^1, λ^2 — единичный касательный вектор к кривой C, которая пересекает точку P. C является асимптотической линией, если

$$h_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta = 0 \tag{4.4.5}$$

вдоль C. Точку на поверхности пересекают две различные вещественные асимптотические линии тогда и только тогда, когда полная кривизна в этой точке отрицательна. Если вся поверхность целиком имеет отрицательную кривизну, мы можем использовать систему асимптотических линий в качестве внутренних координат на поверхности.

Рассмотрим поверхность постоянной отрицательной кривизны ($K = -1/a^2$) с внутренними координатами, определенными при помощи асимптотических линий. При соответствующем выборе масштаба первая фундаментальная квадратичная форма может быть записана в виде

$$\mathrm{I} = a^2 (du^2 + 2 \cos \varphi \, du \, dv + dv^2), \tag{4.4.6}$$

где φ — угол между асимптотическими линиями. В этих координатах уравнение Гаусса превращается в уравнение sin-Гордон

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \, \partial v} = \sin \varphi.$$

Уравнение Гаусса является условием совместности, которому должен удовлетворять произвольный тензор $h_{\alpha\beta}$, для того чтобы он мог быть тензором внешней кривизны поверхности. Таким образом, каждое решение этого уравнения определяет поверхность постоянной отрицательной кривизны $(-1/a^2)$ с первой фундаментальной формой, определяемой формулой (4.4.6). Такие поверхности называются *псевдосферическими.* Некоторые специальные случаи обсуждаются в работе Эйзенхарта (1909, § 116, 117) [148].

Это приложение мы приводим в качестве первого примера, когда уравнение, решаемое при помощи МОЗР, возникает как точная модель. При выводе уравнения даже не предполагалось никаких асимптотических разложений. Отсюда следует вопрос, отличается ли фундаментальным образом уравнение sin-Гордон от других уравнений, к которым применим МОЗР? Ответ отрицателен. Сасаки [442, 443] показал, что *каждое* уравнение вида (1.5.16) описывает поверхности с постоянной отрицательной кривизной. Различные уравнения из этого класса просто соответствуют различным метрикам. То, что это геометрическое свойство ассоциируется скорее с уравнением sin-Гордон, чем с уравнением мКдФ, — это факт истории математики, а не самой математики.

Для того чтобы обобщить уравнения (4.4.1) на большую размерность, естественно задать вопрос, какие уравнения определяют псевдосферические поверхности размерности 3 или больше. Недавние исследования по этому вопросу опубликовали Черн и

Тернг [107]. Вопрос об интегрируемости полученных ими обобщений уравнения sin-Гордон при помощи МОЗР остается открытым.

4.4. b. Самоиндуцированная прозрачность (СИП). В разд. 4.2 было установлено, что показатель преломления (т. е. линеаризованное дисперсионное соотношение) идеального диэлектрика сингулярен на частоте, совпадающей с любой из резонансных частот атомов вещества. Самоиндуцированная прозрачность является одним из эффектов, возникающих при взаимодействии диэлектрика с электрическим полем на частоте, близкой к резонансу.

Эффект был открыт Мак-Коллом и Ханом в 1965 г., см. [358, 359, 360, 361]. К настоящему времени по данному вопросу существует обширная библиография, мы выделим особо работы Мак-Колла и Хана (1969) [360], Лэма (1971) [309], Слашера и Гиббса (1972) [465], Куртена (1972) [125] и Каупа (1977) [261]. Каждая из них к моменту своего появления более или менее полно отражала состояние вопроса.

Мы начнем с физического описания самоиндуцированной прозрачности. В простейшем случае СИП диэлектрик состоит из двухуровневых атомов, каждый из которых имеет основное и возбужденное состояния. Предположим, что эти два состояния не имеют *вырождения по моменту*. Далее, пусть вначале атомы находятся в основном состоянии, т. е. среда является *аттенюатором*, а не *усилителем*. Падающее электрическое поле, настроенное на резонансную частоту, возбуждает атомы. Такой перенос энергии от электрического поля к веществу обычно необратим и в конце концов истощает энергетический запас электрического импульса. Скорость поглощения энергии веществом определяется законом Бэра (1852) [50].

СИП возникает, когда достаточно мощный и очень короткий падающий импульс формируется во времени так, что фронт импульса отдает энергию (когерентно) в среду, которая запасает ее, а затем возвращает ее (когерентно) назад в импульс. Взаимодействуя с таким импульсом, атомы вещества остаются в своем основном состоянии, суммарный перенос энергии от излучения к веществу равен нулю, а импульс распространяется с постоянной (меньшей чем скорость света) скоростью сквозь среду, которая становится как бы прозрачной. Это и есть самоиндуцированная прозрачность.

Теперь мы рассмотрим основные уравнения (уравнения Максвелла — Блоха). Уравнение Максвелла для идеального диэлектрика имеет вид

$$c^{-2}\partial_t^2 \mathbf{E} + \partial_t^2 \mathbf{P} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = 0. \tag{4.4.7}$$

В этом уравнении **P** обозначает полную поляризацию, обусловленную полной совокупностью как резонансных, так и нерезонансных диполей. (Например, эксперимент Мак-Колла и Хана был проведен в рубине, в котором резонировали ионы Cr^{+3}, составляющие лишь очень небольшую часть от общего числа атомов. «Основная среда» Al_2O_3 являлась нерезонансной. Для дальнейшего обсуждения будет удобно предположить, что **P** соответствует поляризации, обусловленной резонансными или околорезонансными диполями. Такая интерпретация допустима в том случае, если мы обозначим через c фазовую скорость света в среде без резонансных или околорезонансных атомов. Следовательно, для рубина c обозначает фазовую скорость света в Al_2O_3 и **P** соответствует поляризации, обусловленной только ионами Cr^{+3}.

В задаче о СИП предполагается, что резонансные диполи распределены так редко, что они, взаимодействуя с внешним полем, не взаимодействуют друг с другом. При таких условиях предположим, что $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t; \omega)$ соответствует поляризации индивидуального двухуровневого атома с частотой перехода ω и $\tilde{\eta}(\mathbf{x}, t, \omega)$ соответствует относительной разности заселенностей между возбужденным и основным состояниями. Таким образом, $|\tilde{\eta}| \leqslant 1$; $\tilde{\eta} = -1$, если все диполи с частотой ω находятся в основном состоянии (по предположению это имеет место при $t \to -\infty$). Лэм (1971) [309] из квантовомеханических соображений показал, что $\mathbf{p}$, η и $\mathbf{E}$ удовлетворяют уравнениям типа Блоха

$$\partial_t^2 \mathbf{p} + \omega^2 \mathbf{p} = -\frac{1}{3}\left(\frac{2\omega \wp^2}{\hbar}\right) \mathbf{E}\tilde{\eta}, \tag{4.4.8a}$$

$$\partial_t \tilde{\eta} = \left(\frac{2}{\hbar\omega}\right) \mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{p}, \tag{4.4.8b}$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, $\wp$ — элемент дипольной матрицы для данного перехода,

$$\wp = O(q\bar{r}),$$

где q — заряд электрона, $\bar{r}$ — средний радиус атома. В задаче размерности $(1 + 1)$ из формулы (4.4.8a) следует исключить множитель 1/3. Заметим, что если мы пренебрежем правой частью уравнения (4.4.8b), то (4.4.8a) эквивалентно линеаризованному уравнению (4.2.6).

В уравнения (4.4.8) также могут быть включены члены, учитывающие различные медленные релаксации и потери (см., например, [465]). Мы не будем принимать во внимание эти эффекты, но следует учесть, что наша модель будет несостоятельна в том случае, когда индивидуальные диполи остаются возбужденными в течение времени, сравнимого с характерными временами

релаксации: для паров Rb наименьшее из этих времен примерно равно $3\cdot 10^{-8}$ с [465]. Говорят, что среда неоднородно уширена, если частоты переходов резонансных диполей не равны друг другу и сосредоточены вблизи резонансной частоты. Такое уширение спектральной линии обусловлено доплеровским сдвигом частоты в газах и статическими магнитными или электрическими полями в твердых телах (Мак-Колл и Хан [360]). В любом случае мы потребуем

$$|\omega - \omega_0| \leqslant \omega_0. \tag{4.4.9}$$

Далее, если в единице объема находится $N_0 (= \text{const})$ резонансных диполей, то полная поляризация равна

$$\mathbf{P} = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{p}(\mathbf{x}, t, \omega)\, g(\omega)\, d\omega \equiv N_0 \langle \mathbf{p} \rangle, \tag{4.4.10}$$

где $g(\omega)$ — нормированная на единицу плотность вероятности, характеризующая неоднородное уширение:

$$\int g\, d\omega = 1.$$

Уравнения (4.4.7, 8, 10) известны как уравнения Максвелла — Блоха, не учитывающие потерь.

Существенным моментом в теории СИП является то, что резонансные диполи настолько разрежены, что их полная поляризация мала, т. е.

$$|c^{-2}\partial_t^2 \mathbf{E}| \gg |\partial_t^2 \mathbf{P}|. \tag{4.4.11}$$

Поэтому в уравнении (4.4.7) можно пренебречь рассеянием назад. Элбек (1972) [145] показал, что в качестве меры разреженности можно выбрать величину

$$\delta^2 = \frac{N_0 \wp c^2}{2\hbar\omega_0} \ll 1, \tag{4.4.12}$$

которую можно интерпретировать как отношение энергий. Для того чтобы из уравнений Максвелла — Блоха получить уравнения СИП, необходимо потребовать малость параметра δ.

Аналогично всем обсуждавшимся выше динамическим моделям уравнения СИП возникают в пределе слабых полей. В данном случае потребуем, чтобы

$$|\mathbf{E}| = O\left(\delta \frac{\hbar\omega_0}{\wp}\right).$$

Таким образом, мы предположили, что электрическое поле представляет собой слабую поперечную волну с частотой ω_0, движущуюся в направлении x, амплитуда которой является медлен-

но меняющейся величиной. Для размерности $(1+1)$ имеем

(4.4.13a) $$\mathbf{E} \sim \frac{\hbar\omega_0}{2\wp} [\delta\hat{\mathbf{j}}\, \{E(\chi, \tau) e^{i\theta} + E^* e^{-i\theta}\} + \delta^2 \mathbf{E}_1],$$

где

$$\theta = k_0 x - \omega_0 t, \quad \chi = \delta k_0 x, \quad \tau = \delta\omega_0 t.$$

Здесь мы рассматриваем линейно поляризованное поле; случай круговой поляризации отличается незначительно. В соответствии с (4.4.7, 8, 10) рассмотрим:

(4.4.13b) $$\omega = \omega_0 (1 + 2\delta\alpha),$$

(4.4.13c) $$\tilde{\eta} \sim \eta_0 (\chi, \tau; \alpha) + \delta\eta_1,$$

(4.4.13d) $$\mathbf{p} \sim \frac{\wp}{2}\, \hat{\mathbf{j}}\, \{p(\chi, \tau; \alpha) e^{i\theta - i\pi/2} + p^* e^{-i\theta + i\pi/2}\} + \wp\delta\mathbf{p},$$

(4.4.13e) $$\mathbf{P} = \delta^2 \frac{2\hbar\omega_0}{c^2 \wp^2} \langle \mathbf{p} \rangle.$$

Таким образом, в главном порядке из уравнения (4.4.7) следует соотношение

(4.4.14) $$k_0^2 = \frac{\omega_0^2}{c^2},$$

так что волновое число несущей волны определяется свойствами основной среды при отсутствии резонансных атомов. Условие подавления секулярных членов, которые могли бы появиться в следующем порядке (в члене $\hat{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{E}_1$), имеет вид

(4.4.15) $$\frac{\partial E}{\partial \chi} + \frac{\partial E}{\partial \tau} = \langle p \rangle.$$

Аналогичное устранение секулярных членов в (4.4.8) приводит к уравнениям

(4.4.16a) $$\partial_\tau p + 2i\alpha p = E\eta,$$

(4.4.16b) $$\partial_\tau \eta = -\frac{1}{2} (Ep^* + E^* p).$$

В характеристических переменных

$$\chi = \chi, \qquad T = \tau - \chi$$

мы получаем уравнения СИП в том виде, в котором они приведены у Лэма [310]:

(4.4.17) $$\begin{aligned} E_\chi &= \langle p \rangle, \\ p_T + 2i\alpha p &= E\eta, \\ \eta_T &= -\frac{1}{2} (Ep^* + E^* p). \end{aligned}$$

Соответствующие начально-граничные условия таковы: для всех $\chi > 0$ имеем $E \to 0$ при $T \to \pm\infty$, $p \to 0$, $\eta \to 0$ при $T \to -\infty$; кроме того, задается $E(\chi = 0, T)$, достаточно быстро стремящаяся к нулю при $T \to \pm\infty$. Различные аспекты этих уравнений были рассмотрены в работе Элбека, Гиббона и Буллоу [147].

Уравнение sin-Гордон является частным случаем (4.4.17) и возникает в пределе бесконечно узкой линии, когда не учитывается неоднородное уширение. В этом пределе

$$g(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$$

и уравнения (4.4.17) принимают вид

$$\begin{aligned} E_\chi &= p, \\ p_T &= E\eta, \\ \eta_T &= -\frac{1}{2}(Ep^* + E^*p). \end{aligned} \tag{4.4.18}$$

Из двух последних уравнений следует соотношение

$$\eta^2 + |p|^2 = 1, \tag{4.4.19}$$

которое наводит на мысль о параметризации следующего вида:

$$\eta = \cos\theta, \quad p = \exp(i\psi)\sin\theta. \tag{4.4.20a}$$

Тогда если в начале E обладала постоянной фазой, то

$$\psi = \text{const}, \quad E = \exp(i\psi)\,\partial_T\theta \tag{4.4.20b}$$

и

$$\theta_{\chi T} = \sin\theta. \tag{4.4.21}$$

Ввиду того что и (4.4.21), и (4.4.17) могут быть решены при помощи МОЗР, нет причин ограничиваться исследованием (4.4.21).

Следуя важной работе Лэма [310], Абловиц, Кауп и Ньюэлл [9] рассмотрели задачу рассеяния

$$\begin{aligned} \partial_T v_1 + i\zeta v_1 &= \frac{1}{2} E v_2, \\ \partial_T v_2 - i\zeta v_2 &= -\frac{1}{2} E^* v_1 \end{aligned} \tag{4.4.22a}$$

вместе с «временной» зависимостью

$$\begin{aligned} \partial_\chi v_1 &= A v_1 + B v_2, \\ \partial_\chi v_2 &= C v_1 - A v_2. \end{aligned} \tag{4.4.22b}$$

Из условий интегрируемости (4.4.22) вытекают уравнения

$$A_T = \frac{1}{2}(EC + E^*B),$$

(4.4.23) $$B_T + 2i\zeta B = \frac{1}{2}E_\chi - AE,$$

$$C_T - 2i\zeta C = -\frac{1}{2}E^*_\chi - AE^*,$$

которые соответствуют (1.2.8). Сравнивая эти уравнения с (4.4.17), они нашли, что решения (4.4.23) имеют вид

(4.4.24) $$A(\chi, T; \zeta) = \frac{i}{4}\left\langle\frac{\eta}{\zeta - \alpha}\right\rangle = \frac{i}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta(\chi, T; \alpha)\, g}{\zeta - \alpha}\, d\omega(\alpha),$$

$$B = -\frac{i}{4}\left\langle\frac{p}{\zeta - \alpha}\right\rangle, \quad C = -B^*.$$

Следовательно, (4.4.17) могут быть решены при помощи МОЗР, хотя для этого требуется некоторое обобщение метода. Различные аспекты решения этой задачи детально обсуждались в работах [310], [9] и [261]. Здесь мы рассмотрим несколько основных моментов.

1) В литературе солитон часто называют «2π-импульсом». Огибающая электрического поля для изолированного солитона определяется формулой

(4.4.25a) $$E(\chi, T) = 4\zeta i \exp(-i\varphi)\operatorname{sech}\psi,$$

где $\zeta = \zeta_r + i\zeta_i$ является собственным значением, соответствующим этому солитону,

(4.4.25b) $$\psi = \Omega_i\chi - 2\zeta_i T + \psi_0,$$

(4.4.25c) $$\varphi = \Omega_r\chi - 2\zeta_r T + \varphi_0$$

и

(4.4.25d) $$\Omega_r + i\Omega_i = -\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{g\, d\omega(\alpha)}{\zeta_r - \alpha + i\zeta_i}.$$

Для симметричной относительно ω_0 функции $g(\omega)$ в случае когда $\zeta_r = 0$, формула (4.4.25a) сводится к солитону, который впервые был найден Мак-Коломи Ханом (1967) [359]. Скорость распространения 2π-импульса равна

(4.4.26) $$v = c\left(1 + \frac{\Omega_i}{2\zeta_i}\right)^{-1}.$$

Следовательно, импульс движется со скоростью, *меньшей* скорости света в основной среде. Запаздывание импульса при движе-

нии в аттенюаторе дает принципиальную возможность экспериментального обнаружения (Патель [416]).

2) Аналогом бризера является «0π-импульс». Огибающая электрического поля в этом случае имеет вид

$$E = 8\zeta_r\zeta_i \frac{\zeta_r \operatorname{ch} \psi \sin \varphi + \zeta_i \operatorname{sh} \psi \cos \varphi}{\zeta_r^2 \operatorname{ch}^2 \psi + \zeta_i^2 \cos^2 \varphi}, \tag{4.4.27}$$

где ψ, φ определены формулами (4.4.25). Такие решения имеют особый практический интерес, поскольку соответствующие решения существуют и при наличии вырождения уровней (см. [309], [269]).

3) В разд. П.2 в деталях показано, что линеаризованный вариант уравнения не имеет дисперсионного соотношения, и возникает затухание типа затухания Ландау. Соответственно решения уравнений (4.4.17), относящиеся к непрерывному спектру, убывают не по степенному закону, как описано в разд. 1.7, а как затухание Ландау экспоненциально. Как показано в [9], скорость затухания пропорциональна $g(\omega_0[1+\delta\alpha])$. Таким образом, все моды затухают экспоненциально в том и только том случае, когда $g(\omega) > 0$. Скорость затухания в законе Бэра обычно содержит коэффициент $g(\omega_0)$.

4) Согласно (1.3.16), если выполнено неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} |E|\, d\tau \leqslant 0{,}904,$$

то нет дискретного спектра, а вместе с ним и самоиндуцированной прозрачности. Каупом [261, 262] обсуждался вопрос об отношении этого результата и знаменитой теоремы площадей Мак-Кола — Хана [370]; см. также [232].

5) Произвольный начальный импульс достаточной напряженности будет распадаться на конечное число 2π- и 0π-импульсов плюс излучение (или «рябь»), которое затухает экспоненциально. Гиббс и Слашер [186] наблюдали этот эффект экспериментально (рис. 4.19). На рисунке слева показаны результаты серии экспериментов, в которых меняются интенсивности начальных импульсов. Как видно из рисунка, в случае (*а*) происходит поглощение, (*в*) — трансформация в 2π-импульс, *г* и *д* — распад на два или три 2π-импульса.

6) Уравнения СИП (4.4.17) вступают в противоречие со многими общими утверждениями, которые представляются справедливыми для задач, решаемых при помощи МОЗР. Конкретно мы должны отметить, что: (i) (4.4.17) не имеет дисперсионного соотношения; (ii) за исключением специальных случаев, описываемые процессы являются необратимыми; (iii) существует беско-

нечно много локальных законов сохранения, но (4.4.19) может быть единственным глобальным интегралом движения; (iv) коэффициент прохождения $a(\zeta)$ зависит от времени и поэтому не порождает переменные типа действие — угол. Конечно, все эти утверждения связаны между собой. В частности, все они требуют некоторого неоднородного уширения ($g(\omega) \neq \delta(\omega - \omega_0)$). Но даже с учетом этого факта они все равно показывают, насколько необычна задача о СИП.

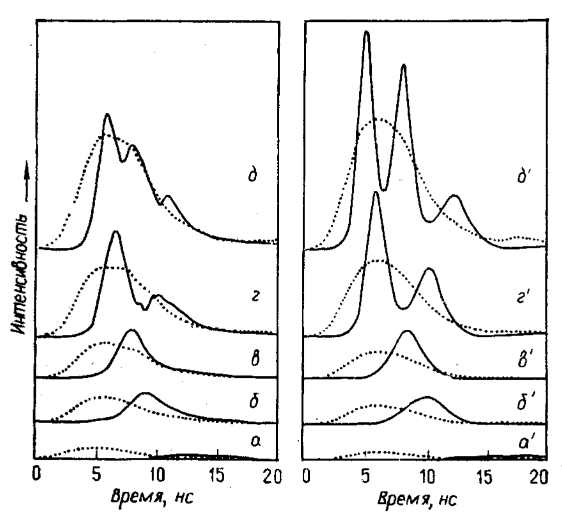


Рис. 4.19. Эволюция оптических импульсов разных интенсивностей в случае, близком к резонансу. Форма входного импульса показана пунктиром, выходного — сплошной линией. Слабый импульс (рис. (*а*)) поглощается; более сильные (кривые (*в*), (*г*) и (*д*)) демонстрируют СИП. Соответствующие результаты численного счета приведены справа. (Гиббс и Слашер [186].)

На этом завершается наше обсуждение (1 + 1)-мерной модели без затухания или без вырождения уровней. Как обычно, в случае размерности (3 + 1) возникает вопрос об устойчивости 2π- и 0π-импульсов по отношению к поперечным возмущениям. Кодама и Абловиц [282, 283] показали, что оба эти импульса неустойчивы. Поперечную неустойчивость наблюдали экспериментально Мак-Кол и Хан (1969) [360], которые называли этот эффект «обдиранием импульса»; см. также [354]. Однако Слашер и Гиббс [465] сообщали, что входную и выходную апертуры аттенюатора можно с успехом использовать на практике для контроля неустойчивости.

Проблема вырождения уровней, по-видимому, более серьезна. В большинстве аттенюаторов для подходящих переходов наблюдается вырождение одного или другого уровня. В работе Лэ-

ма [309] дано обширное обсуждение данной проблемы. Для нашей цели важно отметить, что для простейшего случая вырождения уровней в пределе узкой линии ($g(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$) уравнение (4.4.20) следует заменить на [1])

(4.4.28) $$\theta_{xt} = \sin\theta + \lambda \sin 2\theta.$$

Нетрудно показать, что автомодельное решение этого уравнения не обладает свойством Пенлеве и, по-видимому, (4.4.28) не может быть решено при помощи МОЗР. Додд, Буллор и Дакворт (1975) [139] пришли к такому же выводу, основываясь на том, что для (4.4.28) не существует преобразований Бэклунда определенного типа. Численные эксперименты Абловица, Краскала и Ладика [15] подтвердили, что две уединенные волны, являющиеся решениями уравнения (4.4.28), взаимодействуя, при $0 < \lambda < \infty$ генерируют излучение, которое при некоторых условиях может быть очень мало. Саламо, Гиббс и Черчиль [439], основываясь на своих экспериментах в парах натрия, отметили, что излучение является слабым. Буллоу и Кодри [78] также отметили слабый характер излучения, наблюдавшийся в численных экспериментах. По-видимому, (4.4.28) и его обобщения на случай неоднородного уширения хорошо *аппроксимируются* точно решаемыми моделями. Для практических приложений этого может оказаться достаточным. Однако нет оснований ожидать, что эти задачи адекватны самоиндуцированной прозрачности в общем смысле или что они могут быть точно решены при помощи МОЗР.

4.4.с. Общая теория относительности. Одной из наиболее впечатляющих возможностей МОЗР является то, что он способен дать новый класс нетривиальных решений уравнений Эйнштейна общей теории относительности. Существенные результаты в этом направлении были получены Мейзоном [342], Белинским и Захаровым [51], Харрисоном [199]; см. также работы Мейзона [343] и Ногебауэра [395]. Ввиду того что эти результаты являются предварительными, мы охарактеризуем лишь основные моменты. По всей видимости, наше обсуждение вскоре устареет.

В четырехмерном пространстве — времени как Мейзон [342], так и Белинский с Захаровым [51] использовали обозначения, в которых метрика имеет вид

$$-ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j,$$

где g_{ij} обладает сигнатурой $(-+++)$. Мейзон изучал модель

---

[1]) На самом деле вырожденность уровней приводит к необходимости учитывать обе поляризации. Оказывается, что соответствующая модель является интегрируемой с помощью МОЗР (см. [1*]). — *Прим. перев.*

стационарно вращающейся звезды (зависимость от угла отсутствовала), поэтому он предположил, что

(4.4.29a) $$ds^2 = \lambda_{ij}\, dx^i\, dx^j - h\,(dz^2 + dr^2), \quad i, j = 1, 2,$$

где λ_{ij} и h зависят только от (z, r) и $\det \lambda < 0$. Белинский и Захаров интересовались космологическими вопросами и предполагали

(4.4.29b) $$ds^2 = \lambda_{ij}\, dx^i\, dx^j - h\,(dz^2 + dt^2), \quad i, j = 1, 2.$$

Однако эти предположения трансформируются одно в другое при помощи сложной замены переменных, и способы дальнейшего анализа аналогичны. В обоих случаях определим

(4.4.30) $$\tau^2 = -\det \lambda > 0.$$

Уравнения Эйнштейна в пустоте означают равенство нулю тензора Риччи

(4.4.31) $$R_{ij} = 0.$$

Для (4.4.29a) каждая компонента (4.4.31) равнозначна 2×2-матричному уравнению

(4.4.32) $$\partial^i/(\tau\lambda^{-1}\partial_i\lambda) = 0,$$

где $i = 3{,}4$ и $x^3 = z$, $x^4 = r$. Опустим уравнение для h, которое содержится в (4.4.31), так как оно может быть проинтегрировано в квадратурах, если известно λ.

Мейзон ввел новые координаты

(4.4.33) $$\xi = z + ir, \quad \xi^* = z - ir,$$

и заметил, что след (4.4.32) стал равным нулю:

(4.4.34) $$\tau_{\xi\xi^*} = 0.$$

Уравнение (4.4.34) интегрируется тривиально. Вплоть до настоящего момента между работами Мейзона и Белинского и Захарова существенных различий не было. Далее возникают расхождения.

Мейзон определил новые переменные, α (вещественное) и A (комплексное), и показал, что (4.4.32) можно представить в виде (4.4.34) плюс

(4.4.35) $$\begin{gathered} 2A_{\xi^*} + \tau^{-1}\tau_\xi A^* \cos\alpha - \tau^{-1}\tau_{\xi^*} A = 0, \\ 2\overset{*}{A}_\xi + \tau^{-1}\tau_{\xi^*} A \cos\alpha + \tau^{-1}\tau_\xi \overset{*}{A} = 0, \\ \alpha_{\xi\xi^*} + |A|^2 \sin\alpha - \operatorname{Re}\left\{\tau^{-1}\tau_\xi \left(\frac{A^*}{A}\right) \sin\alpha\right\}_\xi = 0. \end{gathered}$$

Это и есть уравнения, которые следует решать. Их можно рассматривать как обобщение (евклидова) уравнения sin-Гордон, к которому они сводятся, если $\tau = A = 1$.

Затем Мейзон сформулировал задачу рассеяния и показал, что условие ее разрешимости совпадает с (4.4.35). Это является центральным моментом при решении уравнений методом обратной задачи. Более того, если $\tau = A = 1$, задача рассеяния сводится к евклидовой версии (1.2.7) — обычного уравнения sin-Гордон.

Данная задача рассеяния относится к задачам эллиптического типа, а не гиперболического, что препятствует применению к уравнениям (4.4.35) стандартного формализма МОЗР. Несмотря на это, как обсуждалось в разд. 3.1, ее можно рассматривать с точки зрения преобразований Бэклунда. Действительно, такой подход для уравнений Эрнста, которые по существу эквивалентны (4.4.32), привел Харрисона [199] к преобразованиям Бэклунда.

Далее сравним эти результаты с результатами Белинского и Захарова [51]. Они тоже сформулировали задачу рассеяния, условия разрешимости которой соответствуют (4.4.35). Однако их задача рассеяния по виду значительно отличается от поставленной Мейзоном. В действительности она, по-видимому, представляет собой новый тип задач рассеяния хотя бы потому, что содержит дифференцирование по спектральному параметру. Она была использована для построения точных одно- и двухсолитонных решений приведением к задаче Римана — Гильберта. Захаровым и Белинским было отмечено, что стационарное решение Керра путем комплексной замены переменных может быть получено из солитонных решений.

4.5. Квантовая теория поля. Забужский и Краскал (1965) [523] первыми употребили слово «солитон» для описания нелинейных волн, взаимодействующих как частицы. В настоящее время солитоны являются строго определенным математическим объектом, поэтому можно провести обратное сравнение. Здесь мы рассмотрим некоторые из работ, чтобы выяснить, в какой мере физические частицы могут быть описаны при помощи солитонов. Эта проблема была в центре внимания многих недавних исследований в квантовой теории поля. Краткое описание, приведенное ниже, главным образом дает возможность ориентироваться в литературе.

Квантовая теория поля по ряду аспектов отличается от других обсуждавшихся приложений. Одно из отличий состоит в том, что во многих случаях уравнения, допускающие солитонные решения (sin-Гордон, нелинейное уравнение Шрёдингера и т. д.), не являются аппроксимацией более обширного набора основных уравнений. Скорее сами солитонные уравнения выбраны как модели основных уравнений. Более того, во многих аспектах квантовой теории поля не существует «основных уравнений», а су-

ществуют лишь принципы симметрии (такие, как галилеева или лоренцева инвариантность), и любые динамические модели, удовлетворяющие этим принципам, считаются приемлемыми. Поэтому к вопросу квантования нелинейных моделей Шрёдингера

(4.5.1a) $$i\varphi_t = -\varphi_{xx} - \alpha|\varphi|^2\varphi$$

и sin-Гордон

(4.5.1b) $$u_{xx} - u_{tt} = m^2 \sin u$$

был проявлен большой интерес.

Модель (4.5.1a) представляет собой простейшую (нетривиальную) бесконечномерную гамильтонову систему, которая является вполне интегрируемой, в то время как (4.5.1b) — простейшая вполне интегрируемая, нелинейная и релятивистски-инвариантная гамильтонова система.

Как обычно, решенные уравнения являются $(1+1)$-мерными. Квантовые результаты для размерности $1+1$ имеют физический смысл в некоторых разделах физики твердого тела, но не в физике высоких энергий. Модели элементарных частиц, имеющие физический смысл, являются $(3+1)$-мерными. Таким образом, большинство результатов, полученных квантованием уравнений, подобных (4.5.1), следует рассматривать как подсказку того, что́ может быть в случае большей размерности.

Как обсуждалось в разд. 1.6, большинство уравнений, решаемых при помощи МОЗР, могут быть рассмотрены как бесконечномерные вполне интегрируемые гамильтоновы системы. Этот подход к классическим (т. е. не квантовым) уравнениям совершенно естественно использовать в целях квантования. Гамильтонианы уравнений (4.5.1a, b) имеют вид (NLS — нелинейное уравнение Шрёдингера, SG — sin-Гордон)

(4.5.2a) $$H_{\mathrm{NLS}} = -i\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\varphi_x^*\varphi_x - \frac{\alpha}{2}\varphi^*\varphi^*\varphi\varphi\right\}dx,$$

(4.5.2b) $$H_{\mathrm{SG}} = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}(u_x^2+p^2) + m^2(1-\cos u)\right\}dx$$

соответственно. Сопряженными переменными в этих двух случаях являются (φ, φ^*) и (u, p). Уравнения Гамильтона и скобки Пуассона были определены формулами (1.6.22) и (1.6.29) соответственно. Следует заметить, что уравнения Гамильтона можно записать при помощи скобок Пуассона в следующем виде:

(4.5.3) $$q = -\langle H, q\rangle, \qquad p_t = -\langle H, p\rangle.$$

Что означает проквантовать эти уравнения? Во-первых, что существует гильбертово пространство $\mathscr{H}$, а сопряженные переменные классической теории теперь интерпретируются как операторы, действующие в $\mathscr{H}$. Во-вторых, скобки Пуассона заменяются на «коммутационные соотношения»

(4.5.4a) $$[\varphi(x, t), \varphi^*(y, t)] = \delta(x - y),$$

(4.5.4b) $$[p(x, t), u(y, t)] = \delta(x - y)$$

соответственно, где $\hbar = 1$ и

$$[a, b] \equiv ab - ba.$$

Более точно, (4.5.4) означает, что для любых двух элементов из $\mathscr{H}$, обозначенных α, β,

$$(\alpha, [p, q]\beta) = (\alpha, \delta(x - y)\beta),$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $\mathscr{H}$. Таким образом можно интерпретировать все операторные уравнения. В-третьих, динамические уравнения, которые теперь определяют эволюцию операторов, имеют вид

(4.5.5) $$p_t = -[H, p], \quad q_t = -[H, q],$$

а не (4.5.3).

В данной процедуре есть некоторые тонкие моменты. Один из них заключается в явном определении $\mathscr{H}$, таком, чтобы все величины в теории имели бы смысл. Эту проблему иногда считают надуманной, однако результаты Оксфорда [415] о том, что в квантовой версии присутствует лишь малая часть из бесконечного ряда интегралов движения уравнения (4.5.1a), наводит на мысль, что к ней следует отнестись со всей серьезностью.

Другой тонкий вопрос относится к упорядочиванию операторов в квантовой задаче. Тэкер и Уилкинсон [481] использовали (4.5.2a) в качестве квантового гамильтониана, соответствующего (4.5.1a), в то время как Кауп [257] использовал

(4.5.6) $$H = -i\int\left\{\left(\varphi_x^*\varphi_x - \frac{\alpha}{2}\varphi^*\varphi\varphi^*\varphi\right\}dx.$$

Они эквивалентны в классической, но не в квантовой задаче, потому что φ и φ^* теперь уже не коммутируют. Действительно, окончательные результаты отличаются; по-видимому, это вызвано различиями в упорядочивании операторов.

Такие расхождения свидетельствуют о том, что полное решение квантовой задачи не является очевидным, даже когда классическая задача хорошо понята. Исторически квантование вполне интегрируемых систем осуществлялось поэтапно, с простейших моделей ко все более сложным. Первым шагом (т. е. низшим уровнем аппроксимации) является квазиклассическое

приближение. Для нелинейного уравнения Шрёдингера это сводится к преобразованию классической задачи к переменным действие — угол (см. разд. 1.6) и квантованию этих переменных [257], [304]. Как отмечалось во второй из этих работ, не существует гарантии, что преобразование с последующим квантованием даст тот же результат, что и квантование с последующим преобразованием. Однако результаты, полученные посредством квазиклассического квантования, эквивалентны (с точностью до упорядочивания) результатам, полученным с использованием анзатца Бете [63] для решения полностью квантованной задачи, как это сделано Либом и Ленингером (1963) [327], Березиным, Похилем, Финкельбергом (1964) [61] и Мак-Тиром (1964) [366]. Другими словами, в этом случае квазиклассическая аппроксимация дала результаты, которые оказались точными. В этой связи интересны также результаты Тэкера [480] и Оксфорда [415].

Для уравнения sin-Гордон квазиклассическое (или полуклассическое) квантование несколько сложнее. Дашен, Хасслахер и Невё [128], а также Корепин и Фаддеев [290] развили остроумные методы, в основу которых положено вычисление квантовых поправок к точному решению классической задачи. Следует подчеркнуть, что эти результаты не основываются на обычной теории возмущений, которая примерно соответствует (в классической задаче) разложению по малой амплитуде. Дашен с соавторами применили свои методы также для исследования других моделей, включая модель Гросса — Невё.

Следующим уровнем уточнения должно быть развитие полностью квантовой версии МОЗР, вполне аналогичной рассмотренной в гл. 1, но такой, в которой все функции (потенциалы, собственные функции, данные рассеяния) заменяются операторами. После того как будет реализована данная программа, классическая задача будет использоваться только как вспомогательное средство. Все переменные будут квантовомеханическими. Последние результаты по некоторым квантовым моделям в этой области опубликовали Склянин и Фаддеев (1978) [464], Склянин (1979) [463], Тэкер и Уилкинсон (1979) [481], Бергкноф и Тэкер (1979) [62], Хонеркамп, Вебер и Вейслер (1981) [233] и Тахтаджян (1981) [472]. Некоторые из этих работ существенно опираются на важные результаты Бакстера (1972) [49]. Сейчас стало ясно, что полностью квантовая версия прямой задачи рассеяния имеет место для некоторых квантовых моделей, включая (4.5.2). Обратная задача рассеяния до сих пор не проквантована.

Как проквантовать солитоны? Это вопрос, ответ на который ищется в настоящее время, и всесторонний обзор этой проблемы будет, вероятно, дан в ближайшие несколько лет. Нашей целью являлось просто указать некоторые важные работы в дан-

ной области. В дополнение к только что упомянутым работам следует также отметить:

(i) вводные статьи Флашки, Мак-Лафлина, Хасслахера и Невё, Кэмпбелла, Нелла и Сюзерленда в материалах конференции под редакцией Флашки и Мак-Лафлина [161];

(ii) статью Ребби (1979) [427] в журнале «Scientific American» о том, что автор в этой статье называет солитоном (а мы называем уединенной волной);

(iii) обзор интегрируемых квантовых систем, сделанный Руйзенарсом [435], который содержит обширную библиографию;

(iv) применение обычной теории возмущений к квантовым солитонам, например Каллан и Гросс [85];

(v) работу Корепина, Кулиша и Соколова в сборнике под редакцией Захарова и Манакова [538].

Упражнения

Раздел 4.1

Физическим приложениям вполне интегрируемых длинноволновых моделей поистине нет конца, и каждый конкретный случай требует нового описания физической задачи, терминологии, исследуемых величин и т. д. Все приводимые здесь упражнения относятся к одному приложению, выбранному из-за того, что с

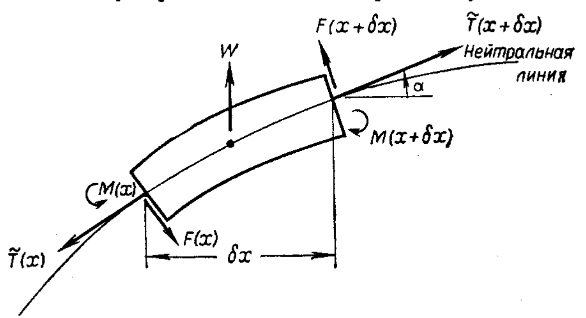


Рис. 4.20.

ним знакомы почти все. Таким примером служат поперечные колебания натянутой струны типа гитарной струны или телефонного шнура. Общие сведения об этой задаче можно найти в [336], [170] или [389].

1. Рассмотрим бесконечно малый элемент натянутой струны, поперечное сечение которой при отсутствии деформаций всюду одинаково, как показано на рис. 4.20.

(а) Покажите, что

$$\rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{T} \sin \alpha + F \cos \alpha),$$

где ρ — постоянная линейная плотность материала, и

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha.$$

(b) Покажите, что если можно пренебречь моментом инерции элемента, то

$$0 = -\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{F}{\cos \alpha}.$$

(c) Согласно гипотезе Эйлера — Лагранжа,

$$M = \frac{EI}{R} = -EI \frac{\partial}{\partial x}(\sin \alpha),$$

где E — модуль Юнга, I — момент инерции поперечного сечения относительно оси, совпадающей с нейтральной линией, R — радиус кривизны нейтральной линии. Используя это, получите уравнение

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \widetilde{T} \sin \alpha - EI \cos^2 \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sin \alpha \right\}.$$

Каков физический смысл каждого слагаемого этого уравнения?

(d). Пусть T обозначает натяжение неотклоненной струны. Покажите, что

$$\widetilde{T} = \widetilde{T} \left(1 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right) + O\left(\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4\right),$$

где μ — неотрицательная эмпирическая константа. При каких условиях можно пренебречь изменениями T? (В этом случае удобно рассмотреть как продольные, так и поперечные моды.)

2. Движение струны определяется уравнением п. (c) упр. 1 совместно с уравнениями пп. (a) и (b). На основе этих уравнений объясните смысл понятия «длинная волна». Что такое волна малой амплитуды? Выведите безразмерное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \hat{t}^2} = \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \left\{ u(1 - 2\varepsilon^2 u^2) - \delta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \hat{x}^2} \right\} + O(\varepsilon^4, \delta^4, \delta^2, \varepsilon^2),$$

где ε — мера малости амплитуды, δ — параметр, показывающий, в какой степени волны можно считать длинными. Покажите, что предположение $\delta = O(\varepsilon)$ приводит к минимальным упрощениям уравнений. В линейном пределе ($\varepsilon \to 0$) совсем другим способом это уравнение вывел Мотт [389]. Мы рассмотрим три возможных типа граничных условий.

A. Струна гитары защемлена в двух точках, расстояние между которыми L. Длина волны возмущения λ обычно имеет порядок $O(L)$.

B. Струна защемлена в двух точках, но $L \gg \lambda$.

С. Струна с натяжением сматывается с одной катушки на другую. Расстояние между катушками равно L, скорость струны V.

3. Пусть $\delta = \varepsilon$ в уравнении упр. 2. Разложим u в ряд по степеням ε^2:

$$u = u_0 + \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon^4 u_2 + \ldots.$$

(a) Покажите, что в главном порядке общее решение имеет вид

$$u_0(\hat{x}, \hat{t}) = f(\hat{x} - \hat{t}) + g(\hat{x} + \hat{t}).$$

(b) Покажите, что в случае граничных условий А и В в упр. 2 f и g являются периодическими функциями с периодом $2L\delta(T/EI)^{1/2}$ и что

$$\oint f\, d\hat{x} = 0 = \oint g\, d\hat{x}.$$

(c) Покажите, что в случае граничных условий С период f и g равен $2\Lambda/|1 \pm v|$, где

$$\Lambda = L\delta\left(\frac{T}{EI}\right)^{1/2}, \quad v = V\left(\frac{\rho}{T}\right)^{1/2}.$$

Покажите, что если $V^2 > T/\rho$, то один из этих периодов меньше чем Λ, и произвольное начальное условие нельзя наложить на всей длине струны Каков физический смысл этого ограничения? Какие предположения не могут быть выполнены в случае $V^2 > T/\rho$?

4. Покажите, что если $V^2 < T/\rho$, то условия отсутствия секулярных членов при $O(\varepsilon^2)$ в уравнении упр. 2 имеют вид

$$f_\tau - 6(C_g) f_r - 6f^2 f_r - f_{rrr} = 0,$$
$$g_\tau + 6(C_f) g_l + 6g^2 g_l + g_{lll} = 0,$$

где

$$C_f = \frac{1+v}{2\Lambda}\oint f^2(\xi, \tau)\, d\xi, \qquad C_g = \frac{1-v}{2\Lambda}\oint g^2(l, \tau)\, dl.$$

Покажите, что C_f и C_g являются интегралами движения для этих уравнений; следовательно, эволюционные уравнения для волн, бегущих влево и вправо, фактически расщепляются. Каковы физические предпосылки того, что поперечные колебания струны моделируются уравнениями мКдФ, в то время как продольные колебания моделируются уравнением КдФ? Если струна имеет круглое сечение, можно ли ожидать, что крутильные колебания будут моделироваться уравнениями КдФ или мКдФ?

5. (a) Показать, что каждое из уравнений упр. 4 имеет периодическое решение вида $f = bk\,\mathrm{cn}\,\{b(r + U\tau); k\}$, где b — про-

извольная постоянная и $\mathrm{cn}(\theta;\ k)$ — эллиптическая функция Якоби (см. [83]). Запишите это решение в размерных переменных для w_x.

(b) Если струна имеет начальное отклонение с суммарным импульсом, равным нулю, то $f=g$ при $t=0$, и соответствующее решение будет представлять нелинейное движение струны. Пусть w_0 обозначает частоту колебаний струны в линейном приближении. Покажите, что нелинейная частота определяется формулой

$$\omega=\omega_0\left\{1-(b\delta)^2\left[3\left(\frac{F}{k}-1+k^2\right)+\left(k^2-\frac{1}{2}\right)\right]\right\},$$

где $K(k)$, $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Следовательно, частотный сдвиг обусловлен двумя эффектами. Первый соответствует изменению скорости волны, бегущей вправо, в результате взаимодействия с волной, бегущей влево. Он всегда приводит к уменьшению частоты. Второе слагаемое является результатом самовзаимодействия волны, бегущей вправо, и понижает частоту, только если $k^2 > 1/2$.

(c) Это решение также можно интерпретировать в терминах граничных условий С упр. 2. Если $V^2 < T/\rho$, то все длинные волны с бесконечно малой амплитудой движутся быстрее, чем струна. Какой должна быть амплитуда волны в п. (a), чтобы ее скорость соответствовала скорости струны? Каков физический смысл такой возможности? Применимо ли асимптотическое разложение для волн такой амплитуды?

6. При условии В упр. 2 мы можем решить уравнение мКдФ на оси $(-\infty,\ \infty)$. Покажите, что в этом случае решение при соответствующих граничных условиях принимает вид упорядоченной по амплитуде совокупности из N солитонов (самый большой *сзади*), которой предшествует цуг дисперсных волн.

7. Ниже приведены оценки масштабов, при которых возможно экспериментальное наблюдение солитонов ($g=0$ в упр. 4).

(a) Для того чтобы получить по крайней мере один солитон, мы должны существенно нарушить неравенство (1.7.1). В размерных величинах этому соответствует

$$\left[(1-\mu)\left(\frac{T}{EI}\right)\right]^{1/2}\int\left|\frac{\partial W}{\partial x}\right|dx>2.$$

(b) Самый большой солитон удаляется от бесконечно малых волн со скоростью, которая не должна превосходить $(2|f|_{\max})^2$. Если $\hat{\lambda}$ — начальная безразмерная длина волны, то время, необходимое для появления солитона, имеет порядок величины

$$\tau=\frac{\hat{\lambda}}{(2|f|_{\max})^2}.$$

Если волны остаются в экспериментальном устройстве в течение этого времени, то отношение длины устройства к длине начальной волны должно удовлетворять неравенству

$$\frac{L}{\lambda} > \frac{2}{1-\mu}\left(\left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{\max}\right)^{-2}.$$

Отметим, что в это неравенство не входит линеаризованная скорость волн $\sqrt{T/\rho}$.

(c) Рассмотрим нейлоновую Е-струну от гитары (Е-струна — самая толстая струна гитары, настроенная на ноту «ми»). Предположим, $T \sim 0{,}1YA$, где Y — предел текучести. Для нейлона $E/Y \sim 50$. Для Е-струны $I/A \sim (0{,}018\text{ см})^2$. Следовательно, длинные волны удовлетворяют неравенству

$$\lambda^2 \gg 10\,\frac{E}{Y}\,\frac{I}{A} \sim (0{,}4\text{ см})^2,$$

поэтому следует использовать волны длиннее чем 2 см. Если приравнять две величины

$$\frac{EI}{T\lambda} = \delta^2 \sim \left(\frac{1-\mu}{2}\right)\left(\left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{\max}\right)^2,$$

так что максимальный наклон примерно равен 1/5, то солитоны должны возникать на удалении около 1 м. Скорость волны примерно равна 2 м/с, поэтому полный эксперимент занимает только долю секунды.

(d) Возможна более доступная демонстрация, если нейлоновую струну заменить длинным телефонным шнуром. В этом случае перемещения будут больше, а скорости — меньше.

Раздел 4.2

1. (a) В экспериментальной ситуации (4.2.1a) следует заменить на

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = \boldsymbol{\varkappa},$$

где $\delta = |\varkappa|/|\mathbf{k}_3|$ является малой величиной. Как модифицируется (4.2.16), если $\delta = O(\varepsilon)$, $\delta \gg \varepsilon$, $\delta \ll \varepsilon$?

(b) Как изменятся результаты в одномерном случае?

2. Добавьте к $\mathbf{E}_1$ в формуле (4.2.15) еще две волны с частотами (ω_4, ω_5), такими, что в дополнение к (4.2.1) справедливы соотношения

$$\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 + \mathbf{k}_5 = 0, \quad \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 = 0.$$

(a) Если среди этих волн нет других резонансов, взаимодействие осуществляется в двух триадах, каждая из которых содержит ω_3. Как следует модифицировать (4.2.16)? Если $\mathbf{A}_l$ не зависят от $\mathbf{y}$, взаимодействие описывается пятью комплексными обыкновенными дифференциальными уравнениями. Имеют ли

они свойство Пенлеве? (Предупреждение: вычисления утомительны.)

(b) Определите шестую волну в виде

$$\mathbf{k}_6 = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_5.$$

Покажите, что если волны резонансно связаны, т. е. если $\omega_6 = \omega_1 - \omega_5$, то каждая из 6 волн взаимодействует в двух триадах. Как в этом случае выглядят основные уравнения? Абловиц и Хаберман [8] показали, что в $(1+1)$-мерном случае к соответствующим уравнениям применим МОЗР. Однако формализм МОЗР для возникающей спектральной задачи (4×4) ими не развивался.

3. (a) В неидеальной диэлектрической среде приложенное электрическое поле в дополнение к поляризации вызывает слабый ток. Покажите, что (4.2.5) принимает вид

$$c^{-2}\partial_t^2\mathbf{E} + \partial_t^2\mathbf{P} + \frac{\sigma}{c^2}\,\partial_t\mathbf{E} + \nabla \times \nabla \times \nabla\mathbf{E} = 0,$$

где σ — малая проводимость среды. Предположим, что других потерь в среде нет и что $\sigma = O(\varepsilon)$. Как изменяется (4.2.16)?

(b) Рассмотрим в такой среде однородный цуг волн вместе с двумя (или более) слабыми паразитными волнами, могущими, как в упр. 2, образовать резонансную триаду. Как отразится наличие тока на неустойчивости?

4. Выразите (4.2.20) через $(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$, т. е. поток плотности электромагнитной энергии.

5. Каков период волн в (4.2.18)? Оцените оптимальный размер кристалла, при котором как можно больше энергии входящей волны преобразуется во вторую гармонику. Этот размер фактически является ограничением сверху, потому что другие малые эффекты также приводят к ограничению размеров кристалла. Некоторые из этих вопросов обсуждались в [515].

6. (a) Точно решите (4.1.25) для ω^2 в пределе $h_2 \to \infty$. Покажите, что бóльшая пара корней для поверхностных волн в этом пределе не зависит от плотности.

(b) Обозначим три волновых числа (2.2.24) $k_1 = \delta k$, $k_2 = (1-\delta)k$, $k_3 = k$. Покажите, что для $h_2 = \infty$ триада в (4.2.24) возникает, когда $4\Delta k h_1 = 1$.

(c) Пусть также $h_1 \to \infty$. Найдите точные значения волновых чисел и частот для триады, содержащей две поверхностные и одну внутреннюю волны, и для триады, содержащей одну поверхностную и две внутренние волны.

Раздел 4.3

1. Можно рассмотреть другой вариант, не основанный на гипотезе (4.3.2), а учитывающий нелинейную поправку к (4.2.8)

для изотропной среды

$$\partial_t^2 \mathbf{P} + \omega_0^2 \mathbf{P} + d\,|\,\mathbf{P}\,|^2\,\mathbf{P} \sim \frac{\Omega^2}{c^2}\,\mathbf{E},$$

и объединить это выражение с (4.2.5).

(a) Покажите, что если амплитуда волны не зависит от времени, то результатом вычислений будет (4.3.2). Найдите явное выражение n_2 через d, Ω^2, $(\omega^2 - \omega_0^2)$, c^2 и n_0.

(b) Получите (4.3.8) из (4.2.5) и уравнение для **P**, рассмотренное выше.

2. Обоснуйте утверждения, следующие за (4.3.13).

(a) Найдите $(3+1)$-мерное обобщение (4.3.9), приводящее (4.3.13) к обыкновенному дифференциальному уравнению. Покажите, что оно не относится к Р-типу.

(b) Основываясь на (4.2.12), выясните, для каких ω справедливо неравенство $\alpha = -k(\partial^2 k/\partial\omega^2) > 0$.

(c) Покажите, что (4.3.13) допускает автомодельные сингулярные решения, если $\alpha > 0$ и $n_2 > 0$. Что можно сказать о решениях в случае $\alpha < 0$?

3. Приближение глубокой воды для волн на воде равносильно предположению $kh \to \infty$.

(a) Покажите, что если $kh \gg 1$, то ошибка, вносимая в линейное приближение (т. е. в (4.3.19)) таким предположением, имеет экспоненциальный по kh порядок. Эта причина лежит в основе утверждения, что эффектами конечной глубины можно пренебречь, как только глубина жидкости превысит длину волны, так как колебательные волны при этом не «чувствуют» дна.

(b) Покажите, что при $h \to \infty$ $\nabla\Phi = O(h^{-1})$. Следовательно, в этом пределе (нелинейно) возбуждаемый средний поток убывает степенным, а не экспоненциальным образом.

(c) Выбрав $\tilde{T} = 0$ в (4.3.26), рассмотрим одномерные волны на воде с периодом 1 с и максимальным наклоном свободной поверхности, равным 0.1. Чему равна длина волны, если она движется в океане, глубина которого равна 3 км? Оцените средний поток, возбуждаемый этой волной у дна. Арми [43] в качестве характерного значения тока у дна использовал величину 4 см/с. Является ли индуцированный средний поток существенным в глубоком океане? Что будет, если та же самая волна движется над континентальным шельфом, где глубина примерно равна 200 м?

4. Стокс (1847) [467] отметил, что осцилляторные волны на воде возбуждают во втором порядке (по ε) «дрейфовую скорость». Следовательно, частицы жидкости испытывают медленное среднее движение в направлении групповой скорости волн. (Более подробно см. [422].)

(a) Покажите, что среднее движение, соответствующее Ф в (4.3.25), происходит в противоположном направлении и должно отделяться от дрейфовой скорости Стокса.

(b) Любая стационарная теория волн на воде конечной глубины без учета вязкости является недостаточной для описания вызываемого ими полного переноса жидкости. Это обусловлено тем, что уравнения инвариантны относительно добавления произвольного однородного горизонтального потока. Одним из путей устранения этой неоднозначности является учет малой вязкости. Обзор работ в этой области сделан в работе [330]. Другая возможность состоит в исследовании решений уравнения (4.3.23), описывающих локализованные волновые пакеты, амплитуда которых стремится к нулю при $(x_1^2+y_1^2)\to\infty$ и дополнительном условии, что на бесконечности движения нет. Покажите, что этот метод позволяет устранить неоднозначность в описании движения невязкой жидкости. Найдите величину полного переноса жидкости.

5. В случае локальных волн уравнение (4.3.21) было преобразовано в (4.3.23). Если амплитуда A периодична по (x_1, y_1), покажите, что такое преобразование можно сохранить, предположив, что Ф удовлетворяет также и (4.3.20). Если такое предположение не сделано, то чему соответствуют уравнения (4.3.25)?

6. Эксперимент, изображенный на рис. 4.17, демонстрирует взаимодействие солитонов только в том случае, когда частоты двух несущих волн настолько близки, что взаимодействие двух волновых пакетов осуществляется достаточно долго: $\varepsilon^2 t\sim 1$. Основываясь на этих измерениях, определите соответствующую величину ε и оцените время взаимодействия. В какой степени этот эксперимент подтверждает теорию?

7. (a) Для размерности $(1+1)$ мы можем определить массу локализованной волны

$$M=\rho\int_{-\infty}^{\infty}\zeta\,dx,$$

где ρ — плотность жидкости. Таким же образом определите горизонтальный импульс и полную (потенциальную + кинетическую) энергию волны. Эти три величины для (4.1.5—7) сохраняются точно.

(b) Используя разложение, необходимое для вывода уравнений (4.3.25), разложите массу, горизонтальную проекцию импульса и энергию до порядка $O(\varepsilon^2)$. Покажите, что

$$M=\varepsilon I_1+\varepsilon^2 I_2+\varepsilon^3 I_3+O(\varepsilon^4),$$

где I_1, I_2, I_3 пропорциональны первым трем законам сохранения уравнения (4.3.29). Каково соответствующее разложение для го-

ризонтального импульса и энергии? Это дает некоторое понимание того, почему (4.3.29) имеет бесконечно много интегралов движения: они являются коэффициентами асимптотического разложения точно сохраняющейся величины, такой, как M. Остается открытым вопрос, почему другие аппроксимирующие уравнения имеют лишь конечное число таких интегралов.

Раздел 4.4

1. Псевдосферические поверхности.

(a) Каждое решение уравнения sin-Гордон определяет семейство псевдосферических поверхностей. Здесь φ обозначает угол между асимптотическими линиями, которые совпадают, если $\varphi = \pi n$. Но они должны отличаться, если полная кривизна отрицательна; таким образом, линии, вдоль которых $\varphi = \pi n$, являются сингулярными линиями поверхности. Согласно теореме Гильберта, каждая псевдосферическая поверхность содержит по крайней мере одну сингулярную линию: это есть следствие теоремы Гаусса — Бонне.

(b) В нашем распоряжении имеется огромное множество решений уравнения sin-Гордон, включая точные солитонные решения (или «кинки» (4.4.1)). Каждое такое решение определяет псевдосферические поверхности, которые соединяются вдоль своих сингулярных линий. Интересно построить геометрические объекты, соответствующие одному кинку, двум кинкам, паре кинк — антикинк, бризеру и т. д.

2. Мак-Кол и Хан предложили простую механическую аналогию СИП. Рассмотрим ряд идеальных одинаковых маятников, отделенных друг от друга и подвешенных в линию над горизонтальной поверхностью.

(a) Если шар, масса которого превосходит массу маятника $m_ш > m_м$, катится по плоскости, то он отдает часть своего импульса каждому маятнику, с которым сталкивается, до тех пор, пока не отдаст весь свой импульс среде (маятникам). Покажите, что скорость шара после n-го соударения равна $V_n = V_0 \exp(-\alpha n)$, где $\alpha = \ln((m_ш + m_м)/(m_ш - m_м))$. Это аналог закона Бэра.

(b) Если масса шара равна массе маятника и если его начальная скорость достаточна для полного оборота маятника, покажите, что шар отдаст весь свой импульс маятнику, подождет, пока маятник совершит полный оборот, получит обратно весь свой импульс и покатится с первоначальной скоростью к следующему маятнику. Это является аналогом СИП. Какой начальный импульс необходим для СИП? Какова средняя скорость шара, если превышена минимальная скорость? Что если начальная скорость равна ей точно? Что произойдет, если начальная скорость слишком мала?

(c) Что произойдет, если масса маятника больше, чем масса шара?

(d) Эти результаты мы получили, предполагая, что шар и маятники являются точечными. Что произойдет, если они оба имеют конечные диаметры?

3. Покажите из (4.4.8), что для любого электрического поля

$$\partial_t \left\{ |\partial_t \mathbf{p}|^2 + \omega^2 |\mathbf{p}|^2 + \frac{\omega^2 \wp^2}{3} \hat{\eta}^2 \right\} = 0.$$

Каков физический смысл этого тождества? Покажите, что отсюда следует $|\mathbf{p}| = O(\wp)$.

4. Покажите, что любые другие слагаемые, добавленные к имеющимся в (4.4.13), не являются секулярными и не изменяют (4.4.14, 15, 16).

5. (a) Покажите, что увеличение амплитуды 2π-импульса в СИП увеличивает скорость его распространения.

(b) Конкретный вид (4.4.10) можно найти, полагая

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma^2}.$$

Для этого случая точно вычислите скорость 2π-импульса.

Приложение. Линейные задачи

П.1. Преобразование Фурье. Цель данного раздела — описать особенности применения методов преобразования Фурье для решения некоторых линейных уравнений и продемонстрировать метод на нескольких примерах. Более точно, описываемый метод представляет собой разделение переменных, конечным результатом которого является представление решения через его фурье-образ. Метод также можно интерпретировать как отыскание «нормальных мод», или отыскание решений в виде $e^{ikx-i\omega t}$. Данный метод не всегда эквивалентен преобразованию Фурье — Лапласа, мы обсудим отличие между этими двумя подходами в следующем разделе.

Простейшие типы эволюционных уравнений, для которых эффективен метод преобразования Фурье, могут быть выражены в виде

$$u_t = F(u. u_x, u_{xx}, \ldots), \tag{П.1.1}$$

где F линейна по своим аргументам, однородна и имеет постоянные коэффициенты. (П.1.1) рассматривается в области $-\infty < x < \infty$, $t > 0$ и предполагается, что u стремится к нулю при $|x| \to \infty$ и $u(x, t) \to u(x)$ при $t \to 0$, где $u(x)$ — заданная функция (начальное значение).

Даже для линейных эволюционных уравнений методы преобразований Фурье применимы к более широкому классу задач, чем (П.1.1). Можно исследовать уравнения, включающие производные по времени более высокого порядка, или заменить скаляр u в (П.1.1) вектором $(u_1, u_2, \ldots, u_N)$, производя соответствующие изменения в F. Интерес могут также представлять уравнения, рассматриваемые на конечном интервале $a < x < b$, возможно, с периодическими граничными условиями. Некоторые из перечисленных обобщений исследованы в примерах и упражнениях в конце раздела.

Рассмотрим основные шаги, осуществляемые при реализации метода.

1. Имеет ли задача единственное решение?

Полезная информация часто может быть получена путем отыскания нескольких «законов сохранения», т. е. связей

вида

$$\frac{\partial}{\partial t}T+\frac{\partial}{\partial x}F=0, \qquad (\text{П.1.2})$$

где T и F могут зависеть от x, t и производных от u. Во многих случаях уравнение само по себе имеет вид (П.1.2). Иногда посредством умножения этого уравнения на некоторую функцию (в том числе u, u_x и т. д.) и последующего интегрирования по частям удается получить другие законы сохранения. В любом случае, если граничные условия требуют, чтобы F стремилась к нулю при $|x|\to\infty$ и если $\int_{-\infty}^{\infty}T\,dx$ определен при $t=0$, то этот интеграл не зависит от времени. Особое значение имеют те законы сохранения, из которых следует положительная определенность T, т. е.

$$T\geqslant 0 \quad \text{и} \quad T=0\Rightarrow u=0. \qquad (\text{П.1.3})$$

Тогда $\int T\,dx$ может определять норму для некоторого пространства функций, и единственность решения (в этом пространстве) следует непосредственно из закона сохранения. В этих случаях $\int T\,dx$ будет интерпретироваться как «интеграл энергии» системы независимо от того, соответствует ли он физической энергии. Более того, этот интеграл энергии не обязательно должен быть связанным с гамильтонианом системы, если таковой существует. Фридрихс [169] широко использовал «энергетический метод» для исследования единственности решений симметричных, положительно определенных систем дифференциальных уравнений. Как обсуждали Рихтмайер и Мортон [431], похожие методы могут быть использованы для проверки устойчивости конечно-разностных схем. Этот подход особенно полезен для уравнений, к которым применим МОЗР, так как зачастую одна из сохраняющихся величин допускает энергетическую интерпретацию.

Не во всех задачах возникают интегралы энергии, а в некоторых случаях функциональные пространства недостаточно богаты для того, чтобы применить рассмотренный подход. В этих случаях на вопрос о единственности нужно отвечать другими способами.

2. Существует ли дисперсионное соотношение?

Подставим пробное решение в форме

$$u(x,\ t)\sim A\exp(ikx-i\omega t) \qquad (\text{П.1.4})$$

в дифференциальное уравнение. Здесь k вещественное, а ω — некоторое комплексное число. Для того чтобы метод работал,

дифференциальное уравнение должно быть сведено к

(П.1.5) $$D(\omega, k) A \exp(ikx - i\omega t) = 0$$

(для всех (x, t)). Экспонента (или даже ее вещественная или мнимая части) не может обращаться в нуль при всех (x, t), а $A = 0$ представляет собой тривиальное решение. Таким образом, (П.1.4) является нетривиальным решением дифференциального уравнения в частных производных только в том случае, когда ω и k связаны дисперсионным соотношением

(П.1.6) $$D(\omega, k) = 0.$$

Этот шаг можно реализовать несколькими способами.

(i) Если задача определена на отрезке $a < x < b$, а не на $-\infty < x < \infty$, то k обычно сводится к счетному множеству вещественных величин.

(ii) Для системы уравнений n-го порядка заменим (П.1.4) на

(П.1.7) $$\mathbf{v}(x, t) \sim \mathbf{A} \exp(ikx - i\omega t).$$

Тогда (П.1.5) принимает вид

$$\underline{\underline{M}} \mathbf{A} \exp(ikx - i\omega t) = 0,$$

где $\underline{\underline{M}}$ — матрица $n \times n$. Дисперсионное соотношение определится выражением

(П.1.8) $$\det(\underline{\underline{M}}) = 0.$$

(iii) Для дифференциально-разностных уравнений (дискретных в пространстве и непрерывных во времени) заменим (П.1.4) на

(П.1.9) $$u_n(t) \sim A z^n \exp(-i\omega t),$$

где z — комплексное число на единичной окружности, а n — целое. (Аналогия с (П.1.4) станет более очевидна, если положить $z = \exp(i\theta)$, где θ — вещественное число.) Тогда дисперсионное соотношение принимает вид

(П.1.10) $$D(\omega, z) = 0.$$

(iv) Для конечно-разностной схемы (дискретной по пространственной и временной переменным) заменим (П.1.4) на

(П.1.11) $$u_n^m \sim A \Omega^m z^n,$$

где z лежит на единичной окружности, Ω — комплексное число, m, n — целые. Дисперсионное соотношение имеет вид

(П.1.12) $$D(\Omega, z) = 0,$$

Следуя работе фон Неймана [491], посвященной устойчивости разностных схем, величину Ω в численном анализе часто называют множителем перехода.

Вернемся к непрерывной задаче и к (П.1.6).

3. Полна ли система нормальных мод?
Решим (П.1.6) относительно $\omega(k)$. Для каждого k число решений должно быть равно порядку (производных по t) дифференциального уравнения.

При любом фиксированном t каждое $[k, \omega(k)]$ в (П.1.4) представляет одну «моду» в интеграле Фурье (или сумме), и суммирование по модам определяет (формальное) решение дифференциальных уравнений. Суммирование производится по всем вещественным k (для $-\infty < x < \infty$):

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \exp(ikx - i\omega t)\, dk, \tag{П.1.13}$$

если на k не наложены дополнительные ограничения. Метод применим, если в виде суммы может быть выражено произвольное начальное условие u, u_t и т. д. при $t = 0$. («Произвол» следует понимать в смысле некоторого функционального пространства, такого, как, например, L_2, т. е. в пространстве квадратично интегрируемых функций.)

Описанный выше метод не применим, если не существует дисперсионного соотношения (т. е. для фиксированного k ω не ограничено) или если система нормальных мод не полна и, следовательно, не может представить начальное условие. Несколько подобных примеров дается в следующем разделе.

В тех случаях, когда метод работает, возникает интегральное представление решения. В каком смысле это «решение» действительно решает задачу — вопрос довольно тонкий, и он будет обсуждаться в контексте конкретных примеров.

4. Каков характер решения?
Реальное преимущество преобразований Фурье проявляется именно на этом шаге. После того как установлено, что нами получено общее решение начальной задачи, большая часть необходимой информации может быть получена из анализа дисперсионного соотношения. Скорость роста любой конкретной моды определяется по $\mathrm{Im}(\omega)$.

(i) Если $\mathrm{Im}(\omega) > 0$ для некоторого действительного k (т. е. для одной из возможных мод системы), то данная мода экспоненциально растет во времени, и задача является неустойчивой. Наиболее неустойчива та мода, которая имеет максимальную мнимую часть $\mathrm{Im}(\omega)$, если таковая существует. В тех случаях, когда начальная амплитуда такой моды не была в точности рав-

на 0, то через достаточный промежуток времени она будет определять решение. Если же начальное условие было известно лишь внутри некоторого промежутка (который может зависеть, например, от метода измерения), то независимо от начальных условий следует ожидать, что решение будет определяться преобладающей модой.

(ii) Если $\operatorname{Im}(\omega) \to \infty$ в любом пределе (например, $k \to \infty$), то не существует ограничений на скорость роста, и задача является *некорректной* (в смысле Адамара). В этом случае любая неопределенность в начальных данных фактически разрушает все предположения относительно поведения решения при $t > 0$. Если модель физической задачи некорректна, то на ее основе невозможно адекватным образом сформулировать математическую задачу.

(iii) Если $\operatorname{Im}(\omega) < 0$ для всех вещественных k, то задача является *асимптотически устойчивой* (или *диссипативной*), потому что каждая мода экспоненциально затухает при $t > 0$. По истечении достаточно долгого времени доминирующей модой, за исключением очень специальных начальных условий, является та, которая максимизирует $\operatorname{Im}(\omega)$.

(iv) Если решение (П.1.1) может быть представлено в форме (П.1.13) с однозначно определенной $\omega(k)$, тогда ее интегралом энергии является $\int |u|^2 dx$. На основании равенства Парсеваля

$$\int |u|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int |A(k)|^2 \exp\{2 \operatorname{Im}(\omega(k))\, t\}\, dk.$$

Таким образом, в задаче существует не зависящий от времени интегралэнергии только в том случае, если $\operatorname{Im}(\omega) = 0$ для вещественных k, т. е. дисперсионное соотношение является вещественным. В этом случае характерной особенностью решения является распространение волн, а не экспоненциальное затухание или рост. Таким свойством после линеаризации обладает большинство задач, обсуждавшихся в этой книге.

(v) Аналогично можно установить, что разностная схема является неустойчивой, если $|\Omega| > 1$ для некоторого z, лежащего на единичной окружности, и устойчивой, если $|z| = 1 \Rightarrow |\Omega| \leqslant 1$. Вещественное дисперсионное соотношение соответствует $|z| = 1 \Rightarrow |\Omega| = 1$.

Эти определения согласуются с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [65]). Это легко установить, представляя решения (П.1.1) в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{u}(k, t)\, e^{ikx}\, dk;$$

тогда $\hat{u}(k, t)$ формально удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}\hat{u} = -i\omega(k)\hat{u},$$

устойчивость которого определяется через Im (ω).

5. Каково поведение решения в задачах с вещественными дисперсионными соотношениями при больших временах?

Для задачи на ограниченном одномерном интервале соответствующее решение имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp(ik_n x - i\omega_n t). \qquad \text{(П.1.14)}$$

Здесь $\{k_n\}$ зависит от длины интервала, $\omega_n = \omega(k_n)$ — от дисперсионного соотношения и $\{A_n\}$ — от начального условия. Здесь k_n и ω_n вещественны, и мы предполагаем, что ω_n однозначно определена. Тогда интеграл энергии определяется формулой

$$\int |u|^2 dx = \sum_n |A_n|^2, \qquad \text{(П.1.15)}$$

если эта сумма существует.

Интуитивно ясно, что если фиксированное количество энергии заключено в ограниченном интервале в модах, которые не могут перераспределять энергию между собой, то тогда не должно быть и никакого асимптотического ($t \to \infty$) состояния. Это утверждение действительно справедливо: вместо стремления к асимптотическому состоянию система почти возвращается к своему начальному состоянию через конечное время («возвращаемость Пуанкаре»).

Обоснованность этого утверждения может быть проверена путем аппроксимации решения (П.1.14) с любой желаемой точностью ограниченным набором мод:

$$u_N(x, t) = \sum_{-N}^{N} A_n \exp(i\theta_n), \quad \theta_n = k_n x - \omega_n t.$$

Легко показать (см., например, [44]), что эта частичная сумма соответствует решению системы Гамильтона с $(2N+1)$ степенями свободы. (Гамильтониан имеет вид $H = i\sum_{-N}^{N} |A_n|^2 \omega_n$, где $|A_n|^2$ — переменные действия, а $i\theta_n$ — угловые переменные.)

Далее по теореме Лиувилля о сохранении объема в фазовом пространстве устанавливаем, что не существует никакого асимптотического состояния, а по теореме возврата Пуанкаре видим, что почти каждое начальное состояние повторяется за конечное время. На неограниченном интервале обычное решение имеет

вид

$$u(x, t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(k)\exp(ikx-i\omega t)\,dk, \tag{П.1.16}$$

где функция $\omega(k)$ вещественна.

Приблизительная оценка таких интегралов — отдельная тема. Мы приводим здесь только основные идеи, более полное изложение читатель может найти в работах [116], [408] или [67]. В этих задачах также сохраняется энергия, но так как она может распределяться по бесконечному интервалу, то возможны асимптотические состояния. Для каждой моды точки постоянной фазы перемещаются с *фазовой скоростью*

$$c_p(k)=\omega/k. \tag{П.1.17}$$

Если каждая волна имеет одну и ту же фазовую скорость (т. е. $\omega=c_0k$), то решение в любой момент времени $t>0$ является просто начальной функцией со сдвигом аргумента на величину c_0t:

$$u(x, t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(k)\exp(ik(x-c_0t))\,dk=u(x-c_0t, 0). \tag{П.1.18}$$

Задача является дисперсионной, если

$$d^2\omega/dk^2\not\equiv 0. \tag{П.1.19}$$

Здесь различные волны имеют уже различные фазовые скорости, и поведение решения зависит от того, как волны интерферируют друг с другом. В этом случае важным является понятие групповой скорости

$$c_g(k)=d\omega/dk. \tag{П.1.20}$$

Значение этой скорости состоит в том, что по истечении достаточно большого времени каждое волновое число k преобладает в решении в области

$$x\sim c_g(k)t+o(t). \tag{П.1.21}$$

Точный вид решения в этой области может быть найден путем оценки (П.1.16) любым из двух родственных методов — методом стационарной фазы или методом наибыстрейшего спуска.

Некоторые уравнения в частных производных допускают автомодельные решения в форме

$$u(x, t)=t^{-p}f(x/t^q), \tag{П.1.22}$$

где p, q — постоянные, а f удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению. Другими словами, уравнение инва-

риантно относительно преобразования

$$T_b : t \to bt, \quad x \to b^q x, \quad u \to b^{-p} u,$$

где b — скаляр. Множество всех таких преобразований (T_b) образует группу (см., например, [194]). Эти решения часто лежат вне интересующего нас функционального пространства (например, они не обязательно должны быть квадратично интегрируемы по x). Тем не менее во многих задачах асимптотическое ($t \to \infty$) решение локально становится приблизительно автомодельным, но модулируется «медленно меняющейся» функцией, которая зависит от начального условия. Преимущества такого представления, когда оно возможно, следующие: (i) оно ясно указывает, какая часть решения обусловлена дифференциальным уравнением, а какая — начальными данными, (ii) оно может быть равномерно применимо для всех x (при $t \to \infty$), даже если представление, полученное методом стационарной фазы, этим свойством не обладает.

Этим завершается обсуждение метода. Далее мы покажем его применение на некоторых характерных примерах.

Пример 1: *Уравнение Шрёдингера*

$$(\text{П.1.23}) \qquad i\psi_t + \psi_{xx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$(\text{П.1.24}) \qquad \psi \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \infty,$$

$$(\text{П.1.25}) \qquad \psi(x, t = 0) = \psi(x) \quad \text{с} \quad \int |\psi|^2 dx = 1.$$

В квантовой механике $\psi(x, t)$ есть (комплексная) волновая функция свободной частицы, $|\psi|^2(x, t)$ — плотность вероятности нахождения частицы в точке x в момент времени t, а $\int |\psi|^2 dx = 1$ допускает эту же интерпретацию при $t = 0$.

Интересующий нас закон сохранения

$$(\text{П.1.26}) \qquad i(|\psi|^2)_t + (\psi^* \psi_x - \psi \psi_x^*)_x = 0$$

получен умножением (П.1.23) на ψ^* (величина, комплексно-сопряженная ψ) и вычитанием комплексно-сопряженного уравнения. Интегрирование (П.1.26) по x дает не зависящий от времени «интеграл энергии»

$$(\text{П.1.27}) \qquad \int |\psi|^2 dx = 1.$$

Этот интеграл определяет L_2 как естественное пространство данной задачи, что хорошо согласуется с вероятностной интерпретацией. Покажем далее, что задача не может иметь двух различных решений в L_2.

Предположим, что существует два таких решения в L_2. Тогда их разность $\Delta(x, t)$ лежит в L_2, удовлетворяет (П.1.23, 24) и равна нулю при $t = 0$. Следовательно,

$$\int |\Delta|^2 dx = 0 \qquad \text{(П.1.28)}$$

для любого момента времени, так что $\Delta(x, t)$ тождественно равна нулю.

Для того чтобы найти дисперсионное соотношение, положим

$$\psi \sim \psi_0 \exp(ikx - i\omega t) \qquad \text{(П.1.29)}$$

и получим

$$\omega(k) = k^2. \qquad \text{(П.1.30)}$$

Здесь ω вещественно для вещественных k, что мы предвидели из существования интеграла энергии.

Прежде чем приступить к построению решения, необходимо сделать следующее замечание. Если $\varphi(x)$ лежит в L_2, то ее фурье-преобразование определяется через

$$\hat{\varphi}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-ikx} dx. \qquad \text{(П.1.31)}$$

Тогда обратное фурье-преобразование есть

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(k) e^{ikx} dk. \qquad \text{(П.1.32)}$$

Мы используем эти обозначения на протяжении всей книги. Чтобы получить формальное решение, просуммируем (П.1.29) по всем модам:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\Psi}(k) e^{ikx - ik^2 t} dk, \qquad \text{(П.1.33)}$$

где $\hat{\Psi}(k)$ — фурье-преобразование начального условия.

В каком смысле этот интеграл решает задачу? Ясно, что он воспроизводит $\Psi(x)$ при $t = 0$ по условию. Если $\hat{\Psi}$ абсолютно интегрируема на $-\infty < x < \infty$ (т. е. является элементом L_1), то интеграл удовлетворяет (П.1.24) по теореме Римана — Лебега. (Эта известная теорема приведена в большинстве книг по анализу функций вещественной переменной, например [209].) Если $\hat{\Psi}$ сходится достаточно быстро при $|k| \to \infty$, чтобы выполнялось условие двукратной дифференцируемости под знаком интеграла, то интеграл также удовлетворяет (П.1.23) и является (поточечным) решением задачи.

Если $\psi(x)$ или ее производная разрывны, то дифференцировать под интегралом нельзя. Дифференцирование будет возможно, если $\hat{\Psi}(k)$ аналитически продолжаема в комплексную плоскость. В простейшем случае контур интегрирования по k может быть повернут относительно вещественной оси на угол $(-\delta)$, $0<\delta<\pi/2$, так, чтобы при этом не происходило пересечения сингулярности на ограниченной части плоскости, как показано на рис. П.1. Нам также нужно, чтобы $\hat{\Psi}(k)\to 0$ при $|k|\to\infty$ достаточно быстро в секторе, ометаемом при деформации контура. При этих условиях, согласно интегральной теореме Коши, интегрирование вдоль деформированного контура дает тот же результат, что и интеграл вдоль первоначального контура интегральной теоремы Гаусса. Но для преобразования

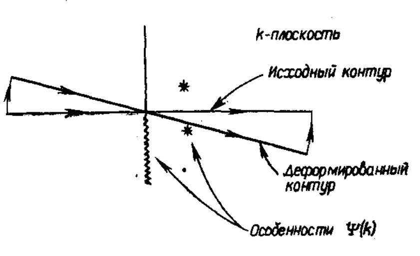


Рис. П.1. Контур интегрирования в (П.1.32).

(П.1.34)
$$k\to re^{i\delta},\quad \operatorname{Im}(r)=0,\quad 0<\delta\leqslant\frac{\pi}{2},$$
$$e^{-ik^2t}\to\exp\left(r^2t\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\delta\right)\right)\exp\left(-ir^2t\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\delta\right)\right)$$

и при $t>0$ интеграл сходится экспоненциально быстро, когда $|r|\to\infty$. Следовательно, даже если $\psi(x)$ разрывна, то решение (П.1.23), которое получается из него при $t>0$, не только непрерывно, но и бесконечно дифференцируемо! Это демонстрирует сглаживающее действие оператора Шрёдингера. Характерный пример рассматривается в упр. 1.

Если $\hat{\Psi}$ не допускает ни дифференцирования под интегралом, ни продолжения в комплексную плоскость, то становится необходимым рассмотрение «слабого решения» (см. [317] или [319]). Тем не менее обычно может быть применен либо один, либо другой из обсуждавшихся выше методов. Таким образом, мы показали, что задача имеет не более одного решения вида (П.1.33) в L_2.

Остается описать асимптотическое поведение решения при $t\to\infty$. Для того чтобы сделать это, заметим, что (П.1.33) имеет вид

(П.1.35a)
$$\int\hat{\Psi}(k)\,e^{i\varphi(k)t}\,dk,$$

где

(П.1.35b)
$$\varphi(k)=k\frac{x}{t}-\omega(k)=k\frac{x}{t}-k^2,$$

если зафиксирована величина (x/t) при $t \to \infty$. Интуитивная картина, на которой основан метод стационарной фазы Кельвина (см. [116]), состоит в следующем. Рассматриваемый интеграл является суперпозицией бесконечного числа волновых цугов, но для достаточно больших t фазы волновых цугов, представленных через k и $(k + \delta k)$, будут значительно различаться до тех пор, пока не обратится в нуль $\varphi'(k)$. Таким образом, при интегрировании следует ожидать взаимного уничтожения большинства интерферирующих волновых цугов, и поэтому основные вклады в интеграл должны внести малые окрестности точек, где $\varphi'(k)$ обращается в нуль (т. е. где фаза $\varphi(k)t$ стационарна). Согласно этому, естественно предположить, что отдельное волновое число k будет определять решение, где

(П.1.36) $$\varphi'(k) = \frac{x}{t} - 2k = \frac{x}{t} - c_g(k) = 0.$$

Это показывает важность понятия групповой скорости: при $t \to \infty$ каждое волновое число k определяет решение в области, приближенно задаваемой (П.1.36).

Таким образом, $(k - \delta k)$ преобладает вдоль одной прямой линии в пространстве (x, t), а $(k + \delta k)$ вдоль слегка отличной прямой линии. Следовательно, не зависящий от времени вклад в интеграл энергии от пакета волновых чисел

$$\frac{1}{2\pi} \int_{k-\delta k}^{k+\delta k} |\hat{\Psi}|^2 \, dk$$

распределен по области пространства, которая растет линейно во времени. Это предполагает, что $|\psi|^2$ будет уменьшаться как t^{-1} (сохраняя $\int |\psi|^2 dx$), так что

(П.1.37) $$|\psi| = O\left(t^{-1/2}\right) \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Для того чтобы эти эвристические рассуждения оказались справедливыми, необходимо, чтобы $\varphi''(k) \neq 0$. Если $\varphi''(k) = 0$, то траектории $(k \pm \delta k)$ разделяются более медленно, и скорость затухания соответственно медленнее, чем определяемая формулой (П.1.37).

Метод стационарной фазы дает явные формулы, описывающие характерное поведение ψ, однако самый легкий способ получения этих формул состоит в использовании метода наибыстрейшего спуска Дебая (см. [116]). Для определенного значения (x/t) он состоит из продолжения $\hat{\Psi}(k)$ в комплексную k-плоскость и деформации пути интегрирования по k так, чтобы

(i) он проходил через нуль $\varphi'(k)$;

(ii) вещественная часть $\varphi(k)$ оставалась постоянной вдоль пути;

(iii) мнимая часть $\varphi(k)$ была максимальна в нуле $\varphi'(k)$.

В некоторых случаях могут возникнуть некоторые затруднения, но для (П.1.35) единственный нуль $\varphi'(k)$ определяется формулой $k = (x/2t)$ и полностью деформированный путь задается формулой

$$k = \frac{x}{2t} + re^{-i\pi/4},$$

$-\infty < r < \infty$. При таком преобразовании переменных (П.1.33) принимает вид

(П.1.38)
$$\psi(x, t) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(it\left(\frac{x}{2t}\right)^2 - i\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\Psi}\left(\frac{x}{2t} + re^{-i\pi/4}\right)e^{-r^2t}\,dr,$$

где снова предполагается, что при повороте не пересекаются никакие сингулярности $\hat{\Psi}$ (см., однако, упр. 2). Если $\hat{\Psi}$ не имеет особенностей, то основной вклад в интеграл при $t \to \infty$ дает окрестность $r = 0$. Таким образом, мы разлагаем $\hat{\Psi}$ в ряд Тейлора вблизи $k = (x/2t)$ и оцениваем каждый из получающихся интегралов. В результате получим

(П.1.39)
$$\psi(x, t) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(it\left(\frac{x}{2t}\right)^2 - i\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\left[\Psi\left(\frac{x}{2t}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{\Psi}^{2n}(x/2t)}{(4it)^n n!}\right].$$

Как установлено выше, ясно прослеживается роль групповой скорости ($k = x/2t$), и амплитуда затухает как $t^{-1/2}$. Если $\hat{\Psi}$ ведет себя достаточно хорошо, то (П. 1.39) справедливо для всех (x/t) при $t \to \infty$.

Наконец, нам нужно установить связь (П.1.39) с «медленно меняющимися автомодельными решениями» уравнения (П.1.23). С этой целью будем искать частное решение I. 1.23) в форме

$$\psi(x, t) = t^{-p} f(\eta), \quad \eta = \frac{x}{t^q}$$

и найдем, что $q = \frac{1}{2}$ и $f(\eta;\ p)$ удовлетворяет уравнению

(П.1.40)
$$f'' - \frac{i}{2}\eta f' - ipf = 0.$$

С помощью преобразования $z = i\eta/4$ f можно отождествить с вырожденной гипергеометрической функцией. Однако для на-

ших целей достаточно увидеть, что одно из решений (П.1.40) при $p = 1/2$ имеет вид

$$f\left(\eta;\ \frac{1}{2}\right) = Ae^{i\eta^2/4} = e^{ix^2/(4t)}, \tag{П.1.41}$$

где A — постоянная. Таким образом, при $t \to \infty$ решение (П.1.23—25) стремится к решению, которое локально автомодельно, но модулировано медленно меняющейся функцией (т. е. A теперь должна рассматриваться как медленно меняющаяся функция), которая зависит от начальных условий:

$$\psi(x,\ t) \sim \left[t^{-1/2}e^{ix^2/(4t)}\right]\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-i\pi/4}\hat{\Psi}\left(\frac{x}{2t}\right)\right]. \tag{П.1.42}$$

Пример 2: Уравнение теплопроводности

$$T_t = \varkappa T_{xx},\quad -\infty < x < \infty,\quad \varkappa,\ t > 0,\quad T \to 0 \text{ при } |x| \to \infty,$$
$$T(x,\ t = 0) = T_0(x). \tag{П.1.43}$$

Если $T_0(x)$ — вещественная функция, то T можно интерпретировать (например) как температуру одноатомного неподвижного газа в длинной трубке. Боковая поверхность трубки должна быть теплоизолирована. Температура измерена относительно некоторой температуры $\bar{T} > 0$, так что $(T + \bar{T})$ является абсолютной температурой. Поток тепла определяется выражением $(-\varkappa T_x)$.

Уравнение всегда можно представить в виде закона сохранения

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_a^b T\,dx = \varkappa T_x\,\Big|_a^b, \tag{П.1.44}$$

который гласит, что любое изменение средней температуры элементарного интервала обусловлено разностью потоков тепла через его границы.

Температура газа является мерой кинетической энергии (хаотического движения) молекул, а (П.1.44) — это закон сохранения энергии для уравнения (П.1.43). Однако величина T не обязательно положительна, поэтому для изучения вопросов единственности формула (П.1.44) бесполезна.

Подходящий «интеграл энергии», который *не* имеет отношения к физической энергии, может быть получен умножением (П.1.43) на T и последующим интегрированием по частям:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_a^b T^2\,dx = \varkappa T_x T\,\Big|_a^b - \varkappa\int\limits_a^b (T_x)^2\,dx. \tag{П.1.45}$$

Это выражение не является законом сохранения (интеграл $\int T^2\,dx$ не сохраняется), однако его можно использовать для доказательства единственности. Если $T_0(x) \in L_2$, то интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} T^2\,dx$ существует в начальный момент времени и положительно определен. Из формулы (П.1.45) следует, что если первое слагаемое обращается в нуль на границе, то рассмотренный интеграл не возрастает со временем и, следовательно, решение остается в L_2 при $t > 0$. Как и в предыдущей задаче, единственность доказывается вычислением $\int \Delta^2\,dx$ для разности двух решений, имеющих одно и то же начальное условие, и применением формулы (П.1.45), из которой следует, что разность остается равной нулю при $t > 0$.

Дисперсионное соотношение для (П.1.43) имеет вид

(П.1.46) $$\omega = -i\varkappa k^2.$$

Отсюда следует, что $\operatorname{Im}(\omega) \leqslant 0$, т. е. задача является асимптотически устойчивой. Это утверждение остается в силе для случая, когда в (П.1.45) $-\infty < x < \infty$, и означает, что энергетический интеграл должен убывать во времени при любом положительном начальном значении. Действительно, $\operatorname{Im}(\omega) = 0$ только для $k = 0$; тот факт, что $\omega = 0$ при $k = 0$, означает независимость от времени величины

$$\hat{T}(k=0) = \int T\,dx.$$

Это утверждение является перефразировкой (П.1.44).

Решение уравнения (П.1.43) имеет вид

(П.1.47) $$T(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{T}_0(k)\, e^{-\varkappa k^2 t + ikx}\,dk,$$

где $\hat{T}_0(-k) = \hat{T}_0^*(k)$, так как $T_0(x)$ — вещественная функция. Проверка этого факта не представляет труда, в формуле (П.1.47) допустимо дифференцирование под знаком интеграла при $t > 0$ (любое число раз).

Для больших $t \to \infty$ основной вклад в интеграл (П.1.47) дает окрестность точки $k = 0$, в которой $\operatorname{Im}(\omega) = 0$. Если $\hat{T}_0(k)$ является аналитической функцией, то ее можно разложить в ряд Тейлора в окрестности $k = 0$ и по отдельности вычислить интегралы. Используя тождества

$$\hat{T}_0(0) = \int T_0(x)\,dx,$$

$$i\hat{T}_0'(0) = \int xT_0(x)\,dx \quad \text{и т. д.},$$

мы получим

$$T(x, t) = \frac{\int T_0(\xi)\,d\xi}{2(\pi\varkappa t)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\varkappa t}\right) + \tag{П.1.48}$$
$$+ \frac{\int \xi T_0(\xi)\,d\xi}{2\sqrt{\pi}\,(\varkappa t)} \frac{x}{2(2\varkappa t)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\varkappa t}\right) + \dots .$$

Вновь мы приходим к выводу, что при $t \to \infty$ решение стремится к автомодельному. В этом случае медленных модуляций нет, потому что весь вклад определяется окрестностью $\varkappa = 0$.

Пример 3: *Линеаризованное уравнение* Кортевега — де Фриза

$$u_t + u_{xxx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$
$$u \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty, \tag{П.1.49}$$
$$u(x, 0) = U(x).$$

Открытие МОЗР последовало после открытия Миурой (1968) (379) точного взаимного преобразования уравнения Кортевега— де Фриза (КдФ)

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

и модифицированного уравнения КдФ

$$v_t + v^2 v_x + v_{xxx} = 0.$$

В пределе малых амплитуд оба этих уравнения сводятся к (П.1.49). Другие приложения (П.1.49) обсуждаются в упражнениях.

Если функция $U(x)$ вещественна, то u остается вещественной для $t > 0$. Мы будем рассматривать только вещественные решения. Независящим от времени энергетическим интегралом в этой задаче является $\int u^2\,dx$. Таким образом, пространство L_2 подходит для наших исследований, и решения (П.1.49) единственны в L_2. Ввиду того что $\int u^2\,dx$ не зависит от времени, дисперсионное соотношение должно быть вещественно, что подтверждается подстановкой $\exp(ikx - i\omega t)$ в (П.1.49):

$$\omega = -k^3. \tag{П.1.50}$$

Формальное решение в виде преобразования Фурье имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{U}(k)\,e^{ikx+ik^3t}\,dk, \tag{П.1.51}$$

где $\hat{U}(-k) = \hat{U}^*(k)$, так как $U(x)$ вещественна. Из работы Коэна [112], который не делал никаких предположений относитель-

но поведения $U(k)$ где-либо, кроме как на вещественной оси k, следует, в каком смысле формула (П.1.51) является решением задачи (П.1.49).

При вычислении (П.1.51) при $t \to \infty$ мы ограничимся функциями $\hat{U}(k)$, которые могут быть продолжены с вещественной оси k. Кроме того, будем предполагать, что при деформациях k-контуры не пересекают сингулярностей функции $\hat{U}(k)$. Из-за этих ограничений вычисление асимптотики (П.1.51) тесно связано с вычислением функции Эйри

$$\text{(П.1.52)} \qquad \operatorname{Ai}(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(ik\eta + \frac{ik^3}{3}\right) dk,$$

что подробно обсуждается в работе [116]. Функция Эйри изображена на рис. П. 2.

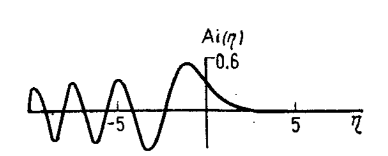


Рис. П.2. Функция Эйри $\operatorname{Ai}(\eta)$.

Рис. П.3. Кривая наискорейшего спуска для $x/t > 0$ в (П.1.51).

Точки стационарной фазы в интеграле (П.1.51) определяются из уравнения

$$\frac{x}{t} + 3k^2 = 0.$$

Результаты вычислений будут отличаться, если

$$\frac{x}{t} < 0, \qquad \frac{x}{t} > 0, \qquad |x| = o(t) \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Для $x/t < 0$ существуют стационарные точки $k = \pm |x/(3t)|^{1/2}$, как показано на рис. П.3. Кривая наискорейшего спуска должна пройти через обе эти точки.

В окрестности этих точек локальное уравнение контура имеет вид

$$\text{(П.1.53)} \qquad k = \pm \left| \frac{x}{3t} \right|^{1/2} + re^{\pm i\pi/4} + \ldots$$

Отсюда можно найти главный член в разложении U при больших t для (П.1.51). Если $t \to \infty$ и $x/t < 0$, асимптотика (П.1.51) имеет вид

$$\text{(П.1.54)} \quad u(x, t) \sim \frac{\rho(x/t)}{(\pi t)^{1/2} |3x/t|^{1/4}} \cos\left\{-2\left|\frac{x}{3t}\right|^{3/2} t + \frac{\pi}{4} + \varphi\left(\frac{x}{t}\right)\right\},$$

где

$$\rho\left(\frac{x}{t}\right)=\left|\hat{U}\left(\left|\frac{x}{3t}\right|^{1/2}\right)\right|,$$

$$\varphi\left(\frac{x}{t}\right)=\arg\left\{\hat{U}\left(\left|\frac{x}{3t}\right|^{1/2}\right)\right\}.$$

Заметим, что функция U в точке x при $x/t\to-\infty$ стремится к нулю быстрее, чем $(x/t)^{-1/4}$, поэтому $\hat{U}$ тоже стремится к нулю.

Для $x/t>0$ вещественных стационарных точек нет. Основной вклад при $t\to\infty$ определяется смещением контура вверх так, чтобы он пересекал стационарную точку, лежащую в верхней полуплоскости k,

$$k=i\left(\frac{x}{3t}\right)^{1/2}+l,$$

и разложением $\hat{U}$ в ее окрестности. Таким образом, при $t\to\infty$, $x/t>0$

(П.1.55) $$u(x,\ t)\sim\frac{1}{2(\pi t)^{1/2}(3x/t)^{1/4}}\hat{U}\left(i\left(\frac{x}{3t}\right)^{1/2}\right)\exp\left(-2\left(\frac{x}{3t}\right)^{3/2}t\right).$$

Обе формулы, (П.1.54) и (П.1.55), неприменимы, когда $x/t\to0$. Для того чтобы исследовать поведение решений в этой области, удобно сделать замену переменных в (П.1.51):

(П.1.56) $$s=k(3t)^{1/3},\qquad \eta=\frac{x}{(3t)^{1/3}}.$$

В новых переменных (П.1.51) принимает вид

(П.1.57) $$u(x,\ t)=\frac{1}{2\pi(3t)^{1/3}}\int\hat{U}\left(\frac{s}{(3t)^{1/3}}\right)\exp\left(is\eta+\frac{is^3}{3}\right)ds.$$

Разложение в ряд Тейлора функции $\hat{U}$ в окрестности $s=0$ позволяет выразить асимптотику для u при $t\to\infty$ через функцию Эйри и ее производную:

(П.1.58) $$u(x,\ t)\sim(3t)^{-1/3}\hat{U}(0)\operatorname{Ai}(\eta)-$$
$$-(3t)^{-2/3}i\hat{U}'(0)\operatorname{Ai}'(\eta)+O\left((3t)^{-1}\right).$$

Используя асимптотические свойства $\operatorname{Ai}(\eta)$, можно показать, что (П.1.58) гладко переходит в (П.1.55) при $\eta\to+\infty$ и в (П.1.54) при $\eta\to-\infty$.

Таким образом, решение (П.1.49) убывает как $t^{-1/2}$ при $x/t<0$, как $t^{-1/3}$ в окрестности $x/t=0$ и экспоненциально при $x/t>0$. Честер, Фридман и Урселл [108] показали, каким образом можно получить асимптотическое решение, равномерное

по (x/t). Они получили формулу

(П.1.59) $$u(x, t) \sim (3t)^{-1/3} \operatorname{Ai}(\eta)\left[\frac{\hat{U}(k)+\hat{U}(-k)}{2}\right]+ (3t)^{-2/3} \operatorname{Ai}'(\eta)\left[\hat{U}(k)-\frac{\hat{U}(-k)}{2ik}\right],$$

где

$$\eta=\frac{x}{(3t)^{1/3}}, \qquad k=\left(\frac{-x}{3t}\right)^{1/2},$$

которая заменяет (П.1.54, 55, 58). Важно, что в обоих случаях

$$u=(3t)^{-1/3} \operatorname{Ai}(\eta) \quad \text{и} \quad u=(3t)^{-2/3} \operatorname{Ai}'(\eta)$$

являются автомодельными решениями (П.1.49) и (П.1.59) имеет вид «квазиавтомодельного решения», в котором модуляция зависит от начальных условий $\hat{U}$.

Пример 4: Уравнение Клейна — Гордона

(П.1.60) $$u_{TT}-u_{XX}+u=0, \quad -\infty<X<\infty, \quad T>0,$$
$$u \to 0 \quad \text{при} \quad |X| \to \infty.$$

Кроме того, заданы две вещественные функции $u(X, T=0)$ и $u_T(X, T=0)$. Уравнение Клейна — Гордона возникает в различных разделах релятивистской квантовой механики (см., например, Морс и Фешбах [385]). Нас оно интересует главным образом потому, что является линеаризацией уравнения sin-Гордон, хотя исторически эти уравнения были получены в обратном порядке.

Рассматриваемая задача относится к гиперболическому типу, поэтому для ее исследования удобнее использовать метод характеристик. Определим характеристические координаты (через «лабораторные координаты») формулами

(П.1.61) $$x=\frac{T+X}{2}, \qquad t=\frac{X-T}{2}.$$

Уравнение (П.1.60) принимает вид

(П.1.62) $$u_{xt}=u, \qquad x-t>0.$$

Теория гиперболических уравнений слишком обширна, чтобы ее можно было развивать здесь, претендуя на строгость. Классический труд Куранта и Фридрихса [124] для наших целей является одним из лучших, которые мы могли бы рекомендовать читателю. Существуют два важных следствия гиперболичности (П.1.60).

(i) Любое возмущение распространяется вдоль выходящей из него характеристики. Из этого следует, что если начальные ус-

ловия (П.1.60) имеют компактный носитель, то (в лабораторных координатах) решение (П.1.60) будет иметь компактный носитель во все моменты времени. Далее мы ограничимся рассмотрением этого случая.

(ii) Разрывы u или ее производных распространяются вдоль характеристик. Преобразование (П.1.60) в (П.1.62) используется только тогда, когда определены вторые производные u.

Энергетический интеграл в этом случае имеет более сложный вид:

$$\text{(П.1.63)} \qquad \frac{\partial}{\partial T}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(u_T^2+u_X^2+u^2\right)dX-2u_Xu_T\Big|_{-\infty}^{\infty}=0.$$

Следовательно, для наших целей теперь недостаточно того, что $u \in L_2$, необходимо также чтобы u_T и u_X также были из L_2. Если начальные условия принадлежат такому несколько суженному пространству, то (П.1.63) гарантирует, что решение остается в нем при $T > 0$. Более того, в этом пространстве существует по крайней мере одно решение задачи. С другой стороны, (П.1.63) означает также, что если начальные условия не принадлежат данному пространству, то соответствующее решение также не будет ему принадлежать. (Заметим, что в этом отношении (П.1.60) отличается от уравнения теплопроводности.) Причина состоит в том, что если интеграл существует, то из (П.1.63) следует равенство нулю его производной по времени для любого T.

Дисперсионное соотношение получается подстановкой $u \sim \sim \exp(i\varkappa X - i\Omega T)$:

$$\text{(П.1.64)} \qquad \Omega = \varkappa^2 + 1.$$

В соответствии с (П.1.63) дисперсионное соотношение вещественно. Каждому вещественному $\varkappa$ соответствуют два корня (П.1.64). Это объясняется тем, что задача содержит вторую производную по времени. Таким образом, существуют три представляющие интерес скорости:

(i) разрывы u или ее производных распространяются вдоль характеристик со скоростью l («скорость света»);

(ii) фазовой скоростью для заданного $\varkappa$ является

$$\left|\frac{\Omega}{\varkappa}\right| = \left|\frac{\sqrt{\varkappa^2+1}}{\varkappa}\right| \geqslant 1;$$

(iii) групповой скоростью для заданного $\varkappa$ является

$$\left|\frac{d\Omega}{d\varkappa}\right| = \left|\frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2+1}}\right| \leqslant 1.$$

Решение задачи в виде интеграла Фурье имеет вид

(П.1.65)
$$u(X, T) = \frac{1}{2\pi}\int A(\varkappa)\, e^{i\varkappa X + i\sqrt{\varkappa^2+1}\,T}\, d\varkappa + \frac{1}{2\pi}\int B(\varkappa)\, e^{i\varkappa X - i\sqrt{\varkappa^2-1}\,T}\, d\varkappa.$$

Если u и u_T вещественны при $T = 0$, то для всех вещественных $\varkappa$ второй интеграл в (П.1.65) комплексно сопряжен к первому. Если начальные данные имеют конечный интеграл энергии, то

(П.1.66)
$$\frac{1}{2\pi}\int (1 + x^2)(|A|^2 + |B|^2)\, d\varkappa = \int \left(u^2 + u_X^2 + u_T^2\right) dx < \infty.$$

Со временем решение не становится более гладким, и классическое решение существует для всех $X (T > 0)$ только в том случае, если u_{XX} и u_{TX} определены всюду при $T = 0$; в противном случае решения являются «слабыми». В частности, u имеет непрерывные вторые производные, согласно лемме Римана — Лебега, если

(П.1.67)
$$\int (1 + \varkappa^2)(|A| + |B|)\, d\varkappa < \infty.$$

Для того чтобы определить поведение u при больших временах, мы должны найти точки стационарной фазы в (П.1.65). Для фиксированного отношения X/T в первом интеграле стационарность имеет место, когда

(П.1.68)
$$\frac{X}{T} = -\frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2 + 1}} \Rightarrow \varkappa = -\frac{X}{\sqrt{T^2 - X^2}}.$$

Используя формулу для стационарной фазы, при $T \to \infty$ для $|X/T| < 1$ получаем

(П.1,69)
$$u(X, T) \sim \frac{1}{2\pi}\frac{T}{(T^2 - X^2)^{3/4}}\, A\left(-\frac{X}{\sqrt{T^2 - X^2}}\right) \times \exp\left(i\sqrt{T^2 - X^2} + \frac{\pi i}{4}\right) + (^*).$$

Таким образом, асимптотическое решение внутри светового конуса представляет собой осцилляции, амплитуда которых убывает как $T^{-1/2}$. Вне светового конуса поле u тождественно равно нулю, если в начальный момент оно имело компактный носитель.

Поведение u вдоль светового конуса ($X/T = \pm 1$) представляет интерес, в частности, потому, что оно позволяет найти «начальные данные», если (П.1.62) рассматривается как задача о начальных условиях. Ее решение может быть получено из (П.1.69), если существует предел $A(\varkappa)$ при $\varkappa \to \pm\infty$; предполо-

жим, что это требование выполнено. Если A также удовлетворяет (П.1.66), то

$$\varkappa^{3/2} A(\varkappa) = o(1) \quad \text{при} \quad \varkappa \to \pm\infty.$$

Таким образом, из (П.1.68, 69) следует, что при $|X/T| \to 1$ и $T \gg 1$

$$|u| \sim |\varkappa^{3/2} A(\varkappa)| (2\pi)^{-1/2} \frac{T}{|X|^{3/2}} = o(1).$$

Следовательно, только из предположения, что начальные условия имеют конечный энергетический интеграл и существует предел $A(\varkappa)$, при $\varkappa \to \pm\infty$ вытекает убывание решения (П.1.60) вдоль любой характеристики при $T \to \infty$, даже если оно является только слабым решением. Решение является классическим, если также выполнено и (П.1.67), что обеспечивает более быстрое убывание.

Наконец, перепишем (П.1.65) в характеристических координатах. Это удобнее сделать, заменив переменные интегрирования. Пусть

$$\varkappa = \frac{1}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right);$$

для первого интеграла используем $\zeta > 0$, для второго $\zeta < 0$. Формула (П.1.65) принимает вид

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{A}(\zeta) \exp\left(i\zeta x - \frac{it}{\zeta}\right) d\zeta, \tag{П.1.70}$$

где

$$\mathscr{A}(\zeta) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+\zeta^{-2}) A\left(\frac{1}{2}(\zeta - \zeta^{-1})\right), & \zeta > 0, \\ \frac{1}{2}(1+\zeta^{-2}) B\left(\frac{1}{2}(\zeta - \zeta^{-1})\right), & \zeta < 0. \end{cases}$$

Ясно, что (П.1.70) имеет вид решений (П.1.62) в форме преобразования Фурье. Также ясно, что интеграл не имеет смысла при $t \neq 0$, если не выполнено условие

$$\mathscr{A}(0) = 0. \tag{П.1.71}$$

На первый взгляд это дополнительное ограничение на «начальные данные» (т. е. вдоль характеристики $t = 0$) может показаться неестественным. Однако если начальные данные удовлетворяют в лабораторных координатах условию (П.1.67), с тем чтобы всюду было определено преобразование по характеристическим координатам, то гарантировано выполнение (П.1.71). Аналогичное условие для уравнения sin-Гордон было получено Каупом и Ньюэллом [268]

Пример 5: *Дискретные задачи.* Полудискретным вариантом (П.1.23—25) служит

$$i\frac{d}{d\tau}\psi_n(\tau)=\psi_{n+1}(\tau)+\psi_{n-1}(\tau)-2\psi_n(\tau),$$

(П.1.72)
$$n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \tau>0,$$
$$\psi_n\to 0 \text{ при } |n|\to\infty,\ \tau>0,$$
$$\psi_n(\tau=0)=\Psi_n, \text{ причем } \sum_{n=-\infty}^{\infty}|\Psi_n|^2=1.$$

Здесь $\psi_n(\tau)$ является n-й функцией, зависящей от времени τ. В этих примерах индекс $(\cdot)_n$ обозначает дискретную координату, а не дифференцирование.

Конечно-разностная схема (Кранка — Никольсона) для (П.1.23—25) имеет вид

(П.1.73)
$$-i\frac{\psi_n^{m+1}-\psi_n^m}{\Delta t}=\frac{\psi_{n+1}^{m+1}+\psi_{n-1}^{m+1}-2\psi_n^{m+1}}{2h^2}+$$
$$+\frac{\psi_{n+1}^{m}+\psi_{n-1}^{m}-2\psi_n^{m}}{2h^2}.$$

Здесь $\psi_n^m\to 0$ при $|n|\to\infty$, $\psi_n^0=\Psi_n$; Ψ_n заданы, причем $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\Psi_n|^2=1$. Верхний индекс обозначает дискретное время, а не степень. Выражение (П.1.73) представляет собой подходящую схему для вычисления приближенного решения (П.1.23—25). Уравнения (П.1.72) мы можем рассматривать как промежуточные между (П.1.23) и (П.1.73).

Методы исследования моделей (П.1.72) и (П.1.73) во многом схожи и являются аналогом уже обсуждавшихся методов, основанных на преобразовании Фурье. Мы остановимся на изучении (7.1.72), оставив (П.1.73) в качестве упражнения. Для начала мы получим «энергетический интеграл» уравнений (П.1.72), умножая их на ψ_n^* и вычитая уравнение, комплексно сопряженное к полученному в результате такого умножения. Суммируя по всем n, получаем формулу

(П.1.74)
$$i\frac{d}{d\tau}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\psi_n(\tau)|^2=0,$$

которая является аналогом (П.1.27). В качестве соответствующего функционального пространства для рассматриваемой задачи выбирается l_2 — множество квадратично суммируемых последовательностей. Из формулы (П.1.74) следует единственность решения.

Дисперсионное соотношение определяется подстановкой (П.1.9) в (П.1.72) и имеет вид

(П.1.75) $$\omega = \frac{-(z-1)^2}{z}.$$

При $|z| = 1$ величина ω вещественна. Как и ранее, вещественное дисперсионное соотношение согласуется с существованием не зависящего от времени энергетического интеграла.

Следующим шагом является имитация преобразования Фурье. В простейшем случае можно предположить, что

(П.1.76) $$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |\psi_m| < \infty.$$

Поэтому функция

(П.1.77) $$\tilde{\psi}(z) = \sum_m \psi_m z^{-m},$$

определенная для комплексного z, лежащего на единичном круге, является аналогом фурье-образа. Обратное преобразование есть результат умножения (П.1.77) на z^{n-1} и последующего интегрирования по единичной окружности:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \tilde{\psi}(z) z^{n-1}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint \sum_m \psi_m z^{-m+n-1}\,dz.$$

Принимая во внимание (П.1.76) и то, что интегрирование непрерывной функции производится на ограниченном интервале, можно, применяя теорему Фубини, поменять местами порядок интегрирования и суммирования. Использованием интегральной теоремы Коши получим формулу, обратную к (П.1.77):

(П.1.78) $$\psi_n = \frac{1}{2\pi i}\oint \tilde{\psi}(z) z^{n-1}\,dz.$$

Теперь можно строить решение (П.1.72), используя «преобразование Фурье»:

(П.1.79a) $$\psi_n(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\oint \hat{\Psi}(z)\exp[i(z-1)^2 z^{-1}\tau]\, z^{n-1}\,dz,$$

где интегрирование производится вдоль единичной окружности и

(П.1.79b) $$\tilde{\Psi}(z) = \sum_m \Psi_m z^{-m}.$$

Другое представление можно получить подстановкой

$$z = e^{i\theta}, \quad \tilde{\Psi}(z) = \overline{\Psi}(\theta),$$

так что (П.1.79а) принимает вид

$$(\text{П.1.80}) \qquad \psi_n(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{\Psi}(\theta)\exp\{in\theta + 2i\tau(\cos\theta - 1)\}\,d\theta.$$

Строя решения уравнений (П.1.72), мы считали n дискретной переменной, принимающей только целые значения. Однако решения определены для любого вещественного n хотя, быть может, случай целых значений n более интересен. Это небольшое изменение точки зрения позволяет вычислить (П.1.80) при $\tau \to \infty$ обычными асимптотическими методами. Предположим, что отношение n/τ является произвольной фиксированной постоянной, а τ велико. Фаза подынтегральной функции (П.1.80) равна

$$\tau\varphi\left(\theta;\ \frac{n}{t}\right) = \left[\frac{n}{\tau}\theta + 2(\cos\theta - 1)\right]\tau,$$

и стационарные точки определяются из

$$(\text{П.1.81}) \qquad \frac{n}{\tau} = 2\sin\theta.$$

Формула (П.1.81) определяет *групповую скорость*, соответствующую дисперсионному соотношению (П.1.75). Важно заметить, что групповая скорость (П.1.72) ограничена. Это свидетельствует о качественном различии между (П.1.72) и (П.1.23). В задаче (П.1.23) групповая скорость определяется формулой (П.1.36) и сколько угодно большим волновым числам соответствуют сколько угодно большие скорости. Пространственная дискретизация в (П.1.72) приводит к ограничению максимального волнового числа, что в свою очередь ограничивает групповую скорость, как видно из формулы (П.1.81).

В стационарных точках вторая производная

$$\varphi''(\theta) = -2\cos\theta,$$

за исключением точек $\theta = \pi/2$ и $3\pi/2$, в которых $n/\tau = +2$ и -2 соответственно, не равна нулю. Третья производная $\varphi'''(\theta)$ в таких особых точках не равна нулю. Эта информация позволяет определить асимптотическое поведение решения при $\tau \to \infty$. Приведем сводку основных результатов.

(i) Если $|n| \ll 2\tau$, то решение осциллирует с амплитудой, убывающей как $\tau^{-1/2}$. Поведение решения (П.1.72) в этой области качественно совпадает с (П.1.23).

(ii) При $|n| \gg 2\tau$ интеграл не имеет стационарных точек, поэтому решение убывает быстрее, чем τ^{-1}. Если начальные условия имеют компактный носитель, то скорость убывания в этой области будет экспоненциальной. Как мы обсуждали, эта относительно спокойная область своим существованием обязана то-

му, что из решения (П.1.72) исключаются очень большие волновые числа (по x).

(iii) Вблизи $n = \pm 2\pi$ существует *волновой фронт*, не имеющий аналога в непрерывной задаче. Вблизи волнового фронта, который при $\tau \to \infty$ становится главной отличительной чертой решения, убывание происходит по закону $\tau^{-1/3}$.

В свете качественного характера различия между асимптотическими решениями (П.1.23) и (П.1.72) интересно было бы понять, в каком смысле они аппроксимируют друг друга. Начнем с рассмотрения (П.1.23) при $-\infty < x < \infty$. Равноудаленные точки на оси x представим в виде

$$x_n = nh,$$

где h — некоторая постоянная $h \ll 1$. Тогда

$$\left.\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right|_n = \frac{\psi_{n+1} + \psi_{n-1} - 2\psi_n}{h^2} + O(h^2), \tag{П.1.82}$$

и (П.1.23) принимает вид

$$-i\frac{d}{dt}\psi_n = \frac{\psi_{n+1} + \psi_{n-1} - 2\psi_n}{h^2} + O(h^2). \tag{П.1.83}$$

Это уравнение аппроксимируется уравнением (П.1.72) до тех пор, пока не станет заметным совокупный эффект от слагаемых, которыми мы пренебрегли для того, чтобы получить (П.1.83). Основываясь на (П.1.83), можно оценить время, за которое нарушается аппроксимация (П.1.23) моделью (П.1.72), формулой

$$t = O(h^{-2}).$$

Таким образом, (П.1.72) аппроксимирует (П.1.23) только в течение ограниченного времени. Поэтому разница в асимптотическом поведении при $(t \to \infty)$ не является столь неожиданной. Существует два предельных перехода, $t \to \infty$ и $h \to 0$, которые не коммутируют во всем пространстве n.

И все-таки стоит задать вопрос, в каких случаях в решении (П.1.72) появляется волновой фронт. Для того чтобы (П.1.83) привести в соответствие с (П.1.72), положим

$$\tau = t/h^2$$

и пренебрежем членами более высокого порядка. Волновой фронт возникает при

$$n = \pm 2\tau,$$

т. е. при

$$x_n/h = \pm 2t/h^2, \text{ или } x_n = \pm 2t/h.$$

Сравнивая полученный результат с (П.1.36), находим, что эта траектория соответствует волновому числу

(П.1.84) $$k = 1/h.$$

Существуют две возможности.

(i) Начальные данные для (П.1.23) не содержат никакой информации о таких больших волновых числах. В этом случае между решениями (П.1.23) и (П.1.72) нет существенных различий, потому что там, где амплитуда обращается в нуль, имеет место медленно затухающий волновой фронт.

(ii) Начальные условия для (П.1.23) содержат существенную информацию об этих (и последующих) волновых числах. В этом случае (П.1.82) является плохой аппроксимацией, отброшенные члены относительно быстро становятся важными, и асимптотическая формула становится справедливой после того, как (П.1.72) перестает аппроксимировать (П.1.23).

В этой задаче мы непосредственно столкнулись с аппроксимацией, которая имеет силу в течение ограниченного времени. Трудности такого сорта возникали также в гл. 4, где обсуждались физические приложения эволюционных уравнений.

На этом завершается описание «метода преобразования» Фурье применительно к линейным эволюционным уравнениям с постоянными коэффициентами. Преимущества метода заключаются в его простоте и в том, что качественное поведение решения на достаточно больших временах определяется непосредственно из дисперсионного соотношения. Недостаток состоит в том, что он не является в такой же степени общим, как некоторые другие методы, скажем преобразование Фурье — Лапласа. Однако в задачах, где этот метод не приводит к успеху, неудача возникает как следствие двух следующих причин (или их комбинации):

(i) дисперсионное соотношение отсутствует;

(ii) набор фурье-мод не является полным.

В следующем разделе мы рассмотрим некоторые задачи, в которых метод Фурье не применим. Смешение фаз, алгебраически растущие моды и затухание Ландау являются общими особенностями этих задач, а линейный предел задачи о самоиндуцированной прозрачности (СИП) — один из таких примеров. Однако, за исключением этой задачи, материал разд. П.2 не имеет прямого отношения к СИП или к задачам, решаемым таким образом.

П.2. Неадекватность метода преобразования Фурье. Рассмотрим некоторые задачи, в которых метод Фурье не приводит к успеху. Часто бросается в глаза, что при этом нет дисперсионного соотношения, и для каждого фиксированного ω допустим

непрерывный ряд значений k. В противоположность задачам, для которых дисперсионное соотношение существует, в этих задачах возможно экспоненциальное затухание решения (во времени), даже если ω вещественно для вещественного k. Примером такого затухания в физике плазмы является эффект «затухания Ландау».

Пример 1: *Модель одномерной кинетической теории*

$$\frac{d}{dt} f(t) = -\alpha \int_{-\infty}^{\infty} U(x)\, g(x, t)\, dx, \quad t > 0,$$

$$\text{(П.2.1)} \quad \frac{\partial g}{\partial t} + v \frac{\partial g}{\partial x} = U(x) f(t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$g(x, t) \to 0 \text{ при } x \to -\infty$$

$$U(x),\ f(0),\ g(x, 0) = G(x) \text{ заданы и вещественны,}$$

$$U(x),\ G(x) \in L_2.$$

Эта задача была предложена Раманатаном и Сандри (1969) [426] как простая модель для проверки обоснованности гипотез, на которых основана кинетическая теория газов. В этой ситуации f соответствует отклонению от равновесия одночастичной функции распределения, а g — отклонению от равновесия двухчастичной корреляционной функции, v и α — положительные постоянные, причем $\alpha \ll 1$. Интегральные модели записаны для случая взаимодействия двух тел; взаимодействием трех и более тел пренебрегается. Модель (П.2.1) будет детально проанализирована, потому что она служит прототипом множества линейных задач, которые не имеют дисперсионных соотношений.

Для (П.2.1) легко находится не зависящий от времени интеграл энергии

$$\text{(П.2.2)} \qquad \frac{d}{dt}\left[f^2 + \alpha \int_{-\infty}^{\infty} g^2\, dx\right] = -\alpha v g^2 \Big|_{x=-\infty}^{+\infty},$$

хотя для g задается только одно граничное условие (при $x \to -\infty$). Однако если $U(x)$ и $G(x)$ имеют компактный носитель, то можно показать, что в любой момент времени $g(x, t)$ имеет компактный носитель. Следовательно, правая часть (П.2.2) обращается в нуль.

Для завершения обсуждения мы предположим, что $U(x)$ и $G(x)$ достаточно быстро стремятся к 0, так что в любой момент времени правая часть (П.2.2) обращается в нуль. Следовательно, $g \in L_2$ в любой момент времени, и (П.2.1) имеет единственное решение.

Таким образом, (П.2.1) имеет интеграл энергии, не зависящий от времени, но это не исключает экспоненциального затуха-

ния f к нулю при $t \to \infty$, что обеспечивает соответствующий рост g.

Действительно, если $U(x)$ симметрична и $G(x)$ антисимметрична по x, то задача (П.2.1) строго обратима во времени, т. е. инвариантна относительно преобразования

$$t \to -t, \qquad x \to -x, \qquad g \to -g. \tag{П.2.3}$$

Даже при этом условии f может убывать при $t \to \infty$; обратимость во времени означает только то, что она также убывает при $t \to -\infty$. (Такое поведение коренным образом отличается от решений уравнения теплопроводности, которые также экспоненциально затухает, но необратимо во времени.) .

Покажем, что метод преобразования Фурье неприменим к (П.2.1), потому что задача не имеет дисперсионного соотношения. Применяя обычный анзатц, следует проявлять некоторую осторожность. Это обусловлено наличием в уравнении интегральных членов. Используя тот факт, что g и U принадлежат L_2, применим преобразование Фурье (по x) и получим

$$\frac{d}{dt} f(t) = -\frac{\alpha}{2\pi} \int U(-k)\, g(k, t)\, dk, \tag{П.2.4a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{g}(k, t) + ikv\hat{g}(k, t) = \hat{U}(k) f(t). \tag{П.2.4b}$$

Затем предположим, что для каждой моды

$$f \sim \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t}, \quad \hat{g}(k, t) \sim \tilde{g}(k, \omega) e^{-i\omega t}.$$

Более точно,

$$f(t) = \int \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad \hat{g}(k, t) = \int g(k, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \tag{П.2.5}$$

где $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ для того, чтобы интеграл был определен, следует понимать как обобщенные функции (см., например, [329]). Тогда (П.2.4) принимает вид

$$-i\omega\tilde{f}(\omega) = -\frac{\alpha}{2\pi} \int \hat{U}(-k)\, \tilde{g}(k, \omega)\, dk, \tag{П.2.6a}$$

$$(-i\omega + ikv)\, \tilde{g}(k, \omega) = \hat{U}(k) \tilde{f}(\omega). \tag{П.2.6b}$$

Если исключить $\tilde{f}$ из (П.2.6), умножить полученное уравнение на $\tilde{g}$, использовать вещественность $U(x)$ и проинтегрировать по всем вещественным k, то в результате получим формулу

$$\begin{aligned} -\omega^2 \int |\tilde{g}|^2 dk + \omega v \int k |\tilde{g}|^2 dk + \\ + \alpha \left| \int \hat{U}(-k)\, \tilde{g}(k, \omega)\, dk \right|^2 = 0. \end{aligned} \tag{П.2.7}$$

Это — квадратичное уравнение с вещественными коэффициентами относительно ω. Его дискриминант положителен, следовательно, (П.2.7) имеет два вещественных корня. Таким образом, если g вещественно, то ω должна быть вещественной, что согласуется с существованием интеграла энергии (П.2.2). Однако из (П.2.7) не следует ни существования дисперсионного соотношения, ни его отсутствия, потому что $\tilde{g}$ осталась неопределенной.

Решим (П.2.6b) относительно $\tilde{g}$. Общее решение (формальное) (см. [329]) имеет вид

$$\tilde{g}(k, \omega) = \frac{\hat{U}(k)\tilde{f}(\omega)}{i(kv-\omega)} + iC(\omega)\delta(kv-\omega). \tag{П.2.8}$$

В первом слагаемом мы берем только главную часть сингулярной функции, во втором слагаемом δ — это дельта-функция Дирака, $C(\omega)$ произвольна. Особыми случаями являются $C(\omega) = \pm\pi\hat{U}(\omega/v)\tilde{f}(\omega)$; они соответствуют контурам, обходящим сингулярность на комплексной плоскости ω сверху или снизу.

Подставляя (П.2.8) в (П.2.6a), получим

$$\left[\omega + \frac{\alpha}{2\pi}⨍\frac{|\hat{U}(k)|^2}{kv-\omega}dk\right]\tilde{f}(\omega) - \frac{\alpha}{2\pi v}\hat{U}\left(-\frac{\omega}{v}\right)C(\omega) = 0. \tag{П.2.9}$$

Но это выражение лишь устанавливает зависимость $C(\omega)$ от $\tilde{f}(\omega)$; оно не определяет $\omega(k)$. Это — важное различие между (П.2.1) и задачей, обсужденной в предыдущем разделе: для любого фиксированного k в (П.2.1) допустимы все вещественные ω и не существует дисперсионного соотношения. (Это отличие ясно сформулировал ван Кампен [489] для линеаризованного уравнения Власова.)

Читателю может показаться неожиданным появление обобщенных функций. В действительности они все время подразумевались, однако не было необходимости их рассматривать. Чтобы увидеть это, рассмотрим некоторую разновидность задачи (П.2.1), у которой есть дисперсионное соотношение:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}f(t) = -\alpha\int g(x, t)\,dx = -\alpha\hat{g}(0, t), \\ &\frac{\partial}{\partial t}g(x, t) + v\frac{\partial}{\partial x}g(x, t) = \hat{U}(x)f(t). \end{aligned} \tag{П.2.10}$$

Поступая как выше, из (П.2.10) получаем

$$-i\omega\tilde{f}(\omega) = -\alpha\hat{g}(0, \omega), \tag{П.2.11a}$$

$$i(kv-\omega)\hat{g}(k, \omega) = \hat{U}(k)\tilde{f}(\omega). \tag{П.2.11b}$$

Из уравнения (П.2.11b) следует (П.2.8) при $k = 0$,

$$\tilde{g}(0, \omega) = i\frac{\hat{U}(0)\tilde{f}(\omega)}{\omega} + iC(\omega)\delta(-\omega).$$

Однако, подставив это выражение в (П.2.11а) и умножив на ω, получим

$$(\text{П}.2.12) \qquad [\omega^2 - \alpha\hat{U}(0)]\tilde{f}(\omega) = 0.$$

Так как $\tilde{f}(\omega)$ произвольна, то (П.2.12) определяет ω^2. Таким образом, в этой задаче также появляются обобщенные функции, но у нее есть вполне определенное дисперсионное соотношение. На данном этапе мы показали неприменимость метода преобразований Фурье, если нет дисперсионного соотношения. Преобразования же Фурье — Лапласа представляют другой подход, который часто приводит к успеху в тех случаях, когда метод преобразования Фурье неприменим. Далее используем преобразования Фурье — Лапласа для того, чтобы решить (П.2.1).

Решим (П.2.4b) относительно $\hat{g}(k, t)$ в зависимости от $f(t)$, а затем проделаем обратное преобразование Фурье. Получим

$$(\text{П}.2.13) \qquad g(x, t) = \int_0^t U(x - v(t-\tau)) f(\tau)\, d\tau + G(x - vt).$$

Затем преобразуем (П.2.1) к единственному уравнению относительно

$$(\text{П}.2.14) \qquad \frac{df}{dt} = -\alpha \int_0^t f(\tau) K(v(t-\tau))\, d\tau - \alpha \int_{-\infty}^{\infty} U(x) G(x - vt)\, dx,$$

где

$$(\text{П}.2.15) \qquad K(y) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x-y) U(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{U}(k)|^2 e^{iky}\, dk.$$

(Так как $K(y)$ — четная функция, знак в последующем рассмотрении может быть произвольным. Конечный результат не будет зависеть от его выбора, поэтому, зафиксировав знак один раз, следует последовательно придерживаться этого выбора.)

Ограничим рассмотрение случаями, в которых $G(x) \equiv 0$ (при $t = 0$ нет парных корреляций частиц). Тогда (П.2.15) сводится к

$$(\text{П}.2.16) \qquad \frac{df}{dt} = -\alpha \int_0^t f(\tau) K(v(t-\tau))\, d\tau.$$

Для специального семейства потенциалов (П.2.16) можно решить в замкнутой форме (см. упр. 1). Нас интересуют общие свойства, которые не требуют специальных предположений относительно $U(x)$. Преобразование Лапласа (П.2.16) после замены порядка интегрирования дает формулу

$$\left\{p + \frac{\alpha}{2\pi} \int \frac{|\hat{U}(k)|^2}{p + ikv}\, dk\right\} \tilde{f}(p) = f(0), \qquad \operatorname{Re}(p) > 0.$$

Обратное преобразование приводит к формальному решению уравнения (П.2.16)

$$f(t)=\frac{f(0)}{2\pi i}\int\limits_C\left\{p+\frac{\alpha}{2\pi}\int\frac{|\hat{U}|^2}{p+ikv}dk\right\}^{-1}e^{pt}\,dp, \tag{П.2.17}$$

где контур Бромвича C параллелен мнимой оси и расположен справа от всех сингулярностей. Эти сингулярности являются решениями уравнения

$$p+\frac{\alpha}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|\hat{U}|^2}{p+ikv}\,dk=0. \tag{П.2.18}$$

Оценивая (П.2.17), видим, как появляется затухание Ландау. Нетрудно показать, что решения (П.2.18) являются чисто мнимыми. Если мы положим $p=i\omega$, то это эквивалентно тому, что

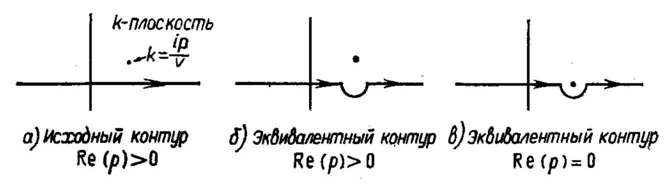


Рис. П.4. Контуры интегрирования в (П.2.18).

ω должна быть вещественна для вещественного k, как мы установили ранее в (П.2.7). Однако необходима некоторая осторожность при перемещении контура Бромвича через мнимую ось p-плоскости. (Эта дополнительная предосторожность и выявила различие между подходами Власова (1945) [490] и Ландау (1946) [315] к уравнению Власова для бесстолкновительной плазмы.) Если $\mathrm{Re}(p)>0$, то интеграл по k в (П.2.18) берется вдоль контура, который обходит сингулярность $k=ip/v$ снизу, как показано на рис. П.4*а*.

Согласно теореме Коши, интеграл по k не изменяется, если его контур деформируется, как показано на рис. П.4*б*.

Пусть в соответствии с рис. П.4*в* $\mathrm{Re}(p)\to 0$; в этом случае контур по-прежнему будет обходить сингулярность снизу. Но при этом R не обязательно должно быть вещественным числом, ω также может быть комплексной. Следовательно, (П.2.18) принимает вид (при $p=i\omega$)

$$i\omega+\frac{\alpha}{2\pi i}\fint\frac{|\hat{U}(k)|^2}{\omega+kv}dk+\frac{\alpha\,|\hat{U}(-\omega/v)|^2}{2v}=0, \tag{П.2.19}$$

где

$$\fint\frac{\varphi(x)}{x}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx+\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right] \tag{П.2.20}$$

есть интеграл в смысле главного значения. Решая (П.2.19) и сохраняя только члены порядка $O(\alpha)$, получаем приближенное решение:

$$\omega = \omega_r + i\omega_i,$$

$$\omega_i = \frac{\alpha}{2v} | \hat{U}(0) |^2 = \frac{\alpha}{2v} \left(\int U(x)\, dx \right)^2 \geqslant 0, \tag{П.2.21}$$

$$\omega_r = o(\alpha).$$

Наконец, мы, подставляя это обратно в (П.2.17), определяем характерное поведение f при $t \to \infty$:

$$f(t) \sim f(0) \exp\left\{ -\frac{\alpha}{2v} \left(\int U\, dx \right)^2 t \right\}. \tag{П.2.22a}$$

Эта формула также может быть записана в виде

$$f(t) \sim f(0) \exp\left\{ -\frac{\alpha}{v} \int_0^\infty K(y)\, dyt \right\}, \tag{П.2.22b}$$

что соответствует формуле Боголюбова [71], описывающей стремление к равновесию неравновесного распределения частиц.

Из (П.2.22) следует, что существуют две возможности. Если $\int U\, dx = 0$, то в низшем порядке по α нет ни убывания, ни роста $f(t)$. Для исследования асимптотического поведения решения (П.2.1) требуется более точное решение (П.2.19), чем то, которое дается формулами (П.2.21). В главном порядке по α f так же, как и $\int g^2\, dx$, при $t \to \infty$ является постоянной.

Если $\int U\, dx \neq 0$, то f экспоненциально стремится к нулю при $t \to \infty$ или ($t \to -\infty$). Можно задать вопрос, насколько правомерно называть этот эффект «затуханием», но дело в том, что нуль является единственной устойчивой точкой функции f.

Задавая $f(t)$ (приближенно) из (П.2.13), можно найти $g(x, t)$ (приближенно) при больших временах, если $\int U\, dx \neq 0$:

$$g(x, t) \sim f(0) \int_0^\infty U(x - vt + v\tau)\, e^{-\tau/t_0}\, d\tau = \tag{П.2.23}$$

$$= t_0 f(0) \sum_{n=0}^{\infty} U^{(n)}(x - vt)(vt_0)^n,$$

где

$$t_0^{-1} = \frac{\alpha}{2v} \left(\int U\, dx \right)^2.$$

Таким образом, $g(x, t)$ стремится принять вид уединенной волны, не меняющей свою форму, которая движется со скоростью v и для которой справедлива формула $\alpha\int g^2\,dx = f^2(0)$. Форма волны зависит от $U(x)$.

В заключение, если

$$\text{(П.2.24)}\qquad G(x) = 0, \qquad U(x) = U(-x), \qquad \int U\,dx \neq 0,$$

то (П.2.1) допускает обратимость по времени и обладáет не зависящим от времени интегралом энергии. Однако в данном случае дисперсионного соотношения не существует, и при $t \to \infty$ (или $t \to -\infty$) энергия с экспоненциальной скоростью перераспределяется от f^2 к $\int g^2\,dx$. Единственной устойчивой конфигурацией системы является $f = 0$, где g имеет вид уединенной волны неизменной формы.

Пример 2. Самоиндуцированная прозрачность (СИП) (*линейное приближение*).

Явление самоиндуцированной прозрачности подробно обсуждается в гл. 4. Уравнения имеют вид

$$\text{(П.2.25)}\qquad \left.\begin{aligned} &\lambda_\tau + 2i\alpha\lambda = \varepsilon N \\ &N_\tau = -\frac{1}{2}(\varepsilon^*\lambda + \varepsilon\lambda^*) \\ &\varepsilon_x = \langle\lambda\rangle \end{aligned}\right\} x > 0, \quad -\infty < \tau < \infty.$$

Здесь $\varepsilon(x, \tau)$ — (комплексная) огибающая электрического поля, $\lambda(x, \tau, \alpha)$ — комплексная индуцированная поляризация, $N(x, \tau, \alpha)$ — (вещественная) нормированная инверсная заселенность и

$$\text{(П.2.26a)}\qquad \langle\lambda\rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha)\,\lambda(x, \tau, \alpha)\,d\alpha,$$

где $g(\alpha)$ — неоднородное уширение спектральной линии. Предположим, что g — вещественная неотрицательная функция, нормированная следующим образом:

$$\text{(П.2.26b)}\qquad \int g\,d\alpha = 1.$$

Обычные лабораторные эксперименты проводятся так, как если бы решалась задача с начальными значениями для x; $x = 0$ есть та точка, где электромагнитная волна впервые входит в резонансную среду. Соответствующие начальные и граничные условия для (П.2.25) имеют вид

$$\text{(П.2.27)}\qquad \begin{aligned} &\lambda \to 0, \quad N \to -1 \text{ при } \tau \to -\infty \text{ для всех } x > 0, \\ &\varepsilon(x = 0, \tau) \text{ задана}, \quad \int |\varepsilon(0, \tau)|\,dt < \infty. \end{aligned}$$

В этой задаче важно помнить, что x и τ поменялись ролями: x — временна́я переменная, τ — пространственная.

Нелинейная задача (П.2.25) для каждого x имеет не зависящий от времени интеграл энергии

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(\lambda\lambda^* + N^2) = 0.$$

Из граничных условий ($\tau \to -\infty$) следует, что для всех (x, τ, α)

$$\lambda\lambda^* + N^2 = 1. \qquad (\text{П}.2.28)$$

Если электрическое поле в точке $x = 0$ слабо́, то приближенное решение может быть получено линеаризацией (П.2.25) около его невозмущенного состояния при $\tau = -\infty$.

Таким образом, для $\delta \ll 1$

$$\begin{aligned} &\varepsilon(x, t) \sim \delta E(x, \tau; \delta) + \dots, \\ &\lambda(x, t, \alpha) \sim \delta\Lambda(x, \tau, \alpha; \delta) + \dots, \\ &N(x, t, \alpha) \sim -1 + \delta N_{(1)}(x, \tau, \alpha; \delta) + \dots, \end{aligned} \qquad (\text{П}.2.29)$$

и линеаризованные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} &\Lambda_\tau + 2i\alpha\Lambda = -E, \quad -\infty < \tau < \infty, \quad x > 0, \\ &E_x = \langle\Lambda\rangle, \\ &N_{(1)} \equiv 0 \\ &\Lambda, E \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to -\infty, \end{aligned} \qquad (\text{П}.2.30)$$

$E(0, \tau)$ задана $E(0, \tau) \to 0$ при $\tau \to -\infty$.

Заметим, что линеаризованные уравнения содержат меньше неизвестных, чем исходная задача, и что после линеаризации не зависящего от времени интеграла движения больше не существует. Используя анзатц

$$(\Lambda, E) \sim (\tilde\Lambda, \tilde E)\, e^{ikx - i\omega t},$$

преобразуем (П. 2.30) к виду

$$\begin{aligned} &(-i\omega + 2i\alpha)\tilde\Lambda = -\tilde E, \\ &ik\tilde E = \langle\tilde\lambda\rangle. \end{aligned} \qquad (\text{П}.2.31)$$

Из этих уравнений следует, что

$$2k\langle\alpha|\tilde\lambda|^2\rangle + k\omega\langle|\tilde\lambda|\rangle = |\langle\tilde\lambda\rangle|^2. \qquad (\text{П}.2.32)$$

Для фиксированного вещественного ω (напомним, что x и τ поменялись ролями) (П.2.32) является линейным уравнением на k с вещественными коэффициентами. Таким образом, k должно

быть вещественным, если вещественна ω, но получить из (П.2.32) дисперсионного соотношения нельзя, так как λ пока неизвестно.

Как и прежде, можно решить (П.2.31) относительно $\tilde{\Lambda}$:

$$\tilde{\Lambda} = \frac{i\tilde{E}}{2\alpha - \omega} - iC(k, \omega)\,\delta(2\alpha - \omega), \tag{П.2.33}$$

где первое слагаемое справа понимается в смысле главного значения, $C(k, \omega)$ — произвольная величина. Поэтому

$$\langle\tilde{\Lambda}\rangle = i\tilde{E}\left\langle\frac{1}{2\alpha - \omega}\right\rangle + \frac{i}{2}C(k, \omega)\,g\left(\frac{\omega}{2}\right) = ik\tilde{E}. \tag{П.2.34}$$

Это уравнение определяет $C(k, \omega)$ через E; на (k, ω) никаких ограничений не налагается. Таким образом, (П.2.30) не имеет дисперсионного соотношения, и мы должны решать эти уравнения другими средствами.

Анализ линеаризованных уравнений несколько упрощается, если предположить, что

$$E(0, \tau) \equiv 0, \quad \tau < 0, \tag{П.2.35}$$

т. е. падающее электрическое поле «выключено» до момента $\tau = 0$. Непосредственно проверяется, что как Λ, так и E обращаются в нуль при всех $x > 0$, $\tau < 0$. Это позволяет наложить граничное условие при $\tau = -\infty$ взамен $\tau = 0$.

Удобно исключить Λ из (П.2.30):

$$\begin{gathered}\Lambda(x, \tau, \infty) = -\int_0^\tau E(x, \tau)\exp\{2i\alpha(T - \tau)\}\,dT,\\ \langle\Lambda\rangle = \int \Lambda g\,d\alpha = -\int_0^\tau E(x, T)\int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha)\exp\{2i\alpha(T-\tau)\}\,d\alpha\,dT.\end{gathered} \tag{П.2.36}$$

Изменение порядка интегрирования для конечного τ и ограниченного E объясняется тем, что $g \in L_1$. Определим

$$G(m) = \int g(\alpha)\,e^{-2i\alpha m}\,d\alpha. \tag{П.2.37}$$

что является преобразованием Фурье функции g. Следовательно, (П.2.30) сводится к

$$E_x(x, \tau) = -\int_0^\tau E(x, T)\,G(\tau - T)\,dT, \quad x > 0, \ \tau > 0, \tag{П.2.38}$$

Поучительно исследовать следующий тип неоднородного уширения:

$$g(\alpha) = \frac{a}{\pi}\,\frac{1}{a^2 + \alpha^2}, \quad a > 0. \tag{П.2.39}$$

В пределе $a \to 0$ g принимает вид дельта-функции, и можно говорить, что уширения нет. Для произвольного a (П.2.38) принимает вид

(П.2.40) $$E_{x\tau} = -E - 2aE_x, \qquad x > 0, \ \tau > 0.$$

Это уравнение имеет дисперсионное соотношение

$$\omega k = -1 - 2iak,$$

или

(П.2.41) $$k = \frac{-\omega}{\omega^2 + (2a)^2} + \frac{2ia}{\omega^2 + (2a)^2}.$$

Таким образом, (П.2.30) не имеет дисперсионного соотношения, но оно возникает, если мы исключим Λ и перейдем к уравнению (П.2.40)! Величина $\operatorname{Im}(k) > 0$ для любого $a > 0$; таким образом, (П.2.40) устойчиво; каждая фурье-мода убывает (по x) к нулю экспоненциально. В пределе $a \to 0$ (П.2.40) принимает вид уравнения Клейна — Гордона (П.1.26) без затухания. Даже для $a > 0$ (П.2.40) является по-прежнему гиперболическим, и разрывы будут распространяться вдоль характеристик. Затухание слишком мало для того, чтобы сгладить разрывы.

Точным решением (П.2.40) является

(П.2.42) $$E(x, \tau) = \begin{cases} e^{-2a\tau} J_0\left(2\sqrt{x\tau}\right) & \text{при} \quad \tau > 0, \quad x > 0, \\ 0 & \text{при} \quad \tau < 0, \quad x > 0, \end{cases}$$

где $J_0(r)$ — функция Бесселя нулевого порядка. Это решение скачком вырастает до $E(0, \tau)$ в момент времени $\tau = 0$ и затем медленно убывает по экспоненте. Разрыв в точке распространяется по всей оси $\tau = 0$. Во всех других направлениях решение убывает при $x \to \infty$ или при $\tau \to 0$. Индуцированная поляризация Λ ведет себя намного сложнее. Из (П.2.36) следует, что при любом фиксированном x, Λ возникает в результате совокупного воздействия E. Возникнув однажды, поляризация остается ненулевой при $\tau \to \infty$, даже если поле исчезло. Таким образом, при $\tau \to \infty$ E стремится к нулю, а Λ не имеет предельного значения. Совершенно различное поведение различных компонент решения является общей чертой задач, не имеющих дисперсионного соотношения.

Вернемся к общему случаю (П.2.38). Оказывается, что после исключения Λ из уравнений поляризации (П.2.38) имеет дисперсионное соотношение для любого уширения $g(\alpha)$. Чтобы увидеть это, воспользуемся преобразованием Лапласа по τ:

(П.2.43) $$\tilde{E}_x(x, p) = -\tilde{E}(x, p)\tilde{G}(p),$$

где $\tilde{G}(p)$ — аналитическая функция для $\mathrm{Re}(p) > 0$, имеющая точное представление в виде

$$G(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\alpha)}{2i\alpha + p}\, d\alpha.$$

Заметим, что для $\mathrm{Re}(p) > 0$ контур интегрирования проходит *ниже* точки сингулярности $\alpha = ip/2$. Решая (П.2.43) и совершая обратное преобразование, получаем

(П.2.44а) $$E(x, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \tilde{E}(0, p) \exp\{p\tau - \tilde{G}(p)x\}\, dp,$$

где C обозначает контур Бромвича. Функция $\tilde{E}(O, p)$ не может иметь сингулярностей для $\mathrm{Re}(p) > 0$, потому что $E(0, \tau)$ стремится к нулю при $\tau \to \infty$. Таким образом, контур в (П.2.44а) можно сдвинуть к мнимой оси и положить $p = i\omega$, если мы одновременно деформируем контур интегрирования по α так, чтобы он оставался под сингулярностью. В результате получаем

(П.2.44b) $$E(x, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(0, -i\omega) \exp\{-i\omega\tau - \tilde{G}(-i\omega)x\}\, d\omega.$$

Соответствующее дисперсионное соотношение имеет вид

(П.2.45) $$k(\omega) = i\tilde{G}(-i\omega) = \int_U \frac{g(\alpha)}{2\alpha - \omega}\, d\alpha,$$

где контур U обходит сингулярность снизу. В частности,

(П.2.46) $$\mathrm{Im}(k) = \frac{\pi}{2} g\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

(i) Ввиду того что $g(\alpha)$ неотрицательна, не существует неустойчивых мод.

(ii) Если $g(\alpha) > 0$, как в случае (П.2.39), то все моды затухают. При этом $\int |E|^2 d\tau \to 0$, когда $x \to \infty$; $E(x, \tau)$ также может затухать поточечно, при $x \to \infty$, однако, как это было в (П.2.42), такое затухание имеет место не всегда.

(iii) Если $g(\alpha) \geqslant 0$, некоторые моды затухают, остальные являются нейтральными. Асимптотическое поведение E $(x \to \infty)$ определяется незатухающими диспергирующими модами.

Это завершает обсуждение линеаризованных уравнений самоиндуцированной прозрачности. В гл. 4 мы видели, что в нелинейной задаче часть решения, соответствующая непрерывному спектру, ведет себя качественно как линеаризованное решение. Поведение солитона, конечно, от него отличается.

В физике существует ряд других линейных задач, не имеющих дисперсионного соотношения. Две из них обсуждаются в упр. 2 и 5. Как упоминалось ранее, даже если в линейной задаче есть дисперсионное соотношение, но набор мод не является полным, то метод Фурье обречен на неудачу. Здесь этот вопрос обсуждаться не будет. Однако такой пример приводится в упр. 6 и 7.

Упражнения

Раздел П.1

1. (a) Методом преобразования Фурье найти решение уравнения Шрёдингера (П.1.23—25) (пример 1) с начальным условием

$$\Psi(x) = \begin{cases} a, & |x| < \dfrac{1}{a^2}, \\ 0, & |x| > \dfrac{1}{a^2}, \end{cases}$$

т. е. известно, что в начальный момент частица находится внутри интервала шириной $2/a^2$.

(b) Покажите, что после разворота контура можно дифференцировать под знаком интеграла.

(c) Указать область, в которой частица находится с подавляющей вероятностью при $t \to \infty$.

2. Решите это же уравнение с начальным условием

$$\Psi(x) = ae^{-a^2|x|}.$$

При $t \to \infty$ вычислите интеграл Фурье методом перевала. Покажите, что в дополнение к (П.1.39) может возникнуть вклад, связанный с одним из полюсов функции $\hat{\Psi}(k)$ и зависящий от x/t. Как этот дополнительный вклад отражается на асимптотическом поведении функции ψ? Какова вероятностная интерпретация этого вклада?

3. Решите уравнение теплопроводности:

$$\begin{aligned} &T_t = \varkappa T_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad \varkappa > 0, \\ &T = 0 \qquad\qquad\qquad \text{при } x = 0, \\ &T \to 0 \qquad\qquad\quad\;\, \text{при } x \to \infty, \end{aligned}$$

$$T(x, t=0) = \begin{cases} 1, & x < L, \\ 0, & x > L. \end{cases}$$

При $t > 0$ в точке максимума (по x) температуры имеем $T_x = 0$. Найдите приближенную формулу, описывающую расположение этого максимума $\bar{x}(t)$ при $t \to \infty$. С какого момента эта формула применима? Остается ли $\bar{x}(t)$ внутри интервала $[0, L]$?

Почему нет? Как зависит от времени величина максимума температуры (при $t \to \infty$)? Сравните полученные результаты с решением аналогичной задачи на бесконечном интервале. Является ли движение $\bar{x}(t)$ волной?

4. Покажите, что решение уравнения

$$u_t + cu_x + \alpha u_{xxx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

связано с решением уравнения (П.1.49) преобразованием Галилея.

5. Дифференциальное уравнение первого порядка

$$u_t + cu_x = 0$$

можно приблизить конечно-разностным уравнением

$$\frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\Delta t} + \frac{c}{4h}\left[u_{n+1}^{m+1} - u_{n+1}^{m+1}\right] + \frac{c}{4h}\left[u_{n+1}^m - u_{n-1}^m\right] = 0.$$

(a) Умножив конечно-разностное уравнение на $(u_n^{m+1} + u_n^m)$, просуммируйте по n. Покажите, что

$$\sum_n (u_n^{m+1})^2 = \sum_n (u_n^m)^2.$$

Это «интеграл энергии» конечно-разностного уравнения. Какой интеграл энергии имеет дифференциальное уравнение?

(b) Какое дисперсионное соотношение имеют дифференциальное уравнение и конечно-разностная схема?

(c) Эта аппроксимация не дает численной диффузии (т. е. $|\Omega| = 1$), но приводит к фазовым ошибкам. Разложив каждый член разностного уравнения в ряд Тейлора (т. е. $u_{n+1}^m = u_n^m + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_n^m h + \ldots$) вблизи $u_n^{m+1/2}$, покажите, что решение этого конечно-разностного уравнения гораздо *лучше* аппроксимирует решение уравнения из упр. 4, чем исходного дифференциального уравнения первого порядка (упр. 5). Выразите α из упр. 4 через $(h, \Delta t, c)$. При заданных начальных данных определите время, по истечении которого решения этих двух уравнений становятся существенно различными (при этом вам потребуется определить, что такое «существенное различие»). Дальнейшее обсуждение фазовых ошибок и библиографию по этому вопросу можно найти в работе [412].

6. (a) Найдите интеграл энергии уравнения

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - \varepsilon^2 u_{xxxx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0.$$

(b) Покажите, что решение этого уравнения методом Фурье при подходящих начальных данных расщепляется на две волны: волну, бегущую влево, и волну, бегущую вправо.

(c) Покажите, что при малых ε каждую из них можно описать уравнением из упр. 4, т. е. формулой типа (П.1.49). Что

нужно потребовать, чтобы ε было мало? (Отметим, что на последний вопрос можно ответить многими способами, но всегда приходится учитывать начальные условия.) Найдите области применимости (по x, t) этого приближенного решения. Восстановите решения задачи из п. (а) по этим двум приближенным решениям. Дайте качественное обсуждение того, как изменится решение, если начальные условия содержат достаточно коротковолновые колебания.

7. (а). Линеаризованное уравнение Буссинеска имеет вид

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + \varepsilon^2 u_{xxxx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0.$$

Покажите, что эта задача некорректна. Как это проявляется при попытке найти интеграл энергии? Дисперсионное соотношение линеаризованного уравнения, описывающего волны на поверхности воды, имеет вид

$$\omega^2 = gk \operatorname{th} kh.$$

Покажите, что это дисперсионное соотношение отвечает корректно поставленной задаче, а некорректность указанной выше задачи появляется вследствие ограничения первыми двумя членами разложения функции $\operatorname{th} kh$ при малых k. Покажите, что приближение

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + \left(\frac{h^2}{3}\right) u_{ttxx}$$

является столь же точным при малых k, но корректным. Имеет ли оно интеграл энергии?

(b) Уравнение

$$u_{yy} = c^2 u_{xx} + \varepsilon^2 u_{xxxx}$$

является линеаризацией стационарного уравнения Кадомцева — Петвиашвили (см. разд. 2.1). Предположим, что функция $u(x, y)$ периодична по x с периодом $L < 2\pi\varepsilon/c$. Покажите, что при фиксированных граничных условиях $u(x, 0)$ и $u(x, Y)$, $Y \neq 0$, эта задача поставлена корректно.

8. (а) Покажите, что при изменении знака в уравнении (П.1.60)

$$u_{TT} - u_{XX} = u$$

интеграл энергии по-прежнему сохраняется, но перестает быть положительно определенным. Покажите, что задача с начальными условиями для этого уравнения неустойчива. Каков максимум инкремента неустойчивости?

(b) Покажите, что

$$u(X, T) = \begin{cases} \dfrac{T}{\sqrt{T^2 - X^2}} J_1\left(\sqrt{T^2 - X^2}\right), & T^2 \geqslant X^2, \\ 0, & T^2 < X^2 \end{cases}$$

является точным автомодельным решением уравнения (П.1.60). Какому начальному условию отвечает это решение? Конечен ли для него интеграл энергии?

9. Решите уравнение (П.1.72) с начальными условиями из упр. 1. Вычислите основной вклад в асимптотическое решение. Где находится волновой фронт? Как отличаются два решения за фронтом волны?

10. (a) Покажите, что интеграл энергии для уравнения (П.1.73) имеет вид

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\psi_n^{m+1}|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\psi_n^m|^2.$$

(b) Найдите дисперсионное соотношение уравнения (П.1.73). Покажите, что

$$|z| = 1 \Rightarrow |\Omega| = 1.$$

(c) Постройте решение при помощи преобразования Фурье (аналогичное (П.1.80)). В каком смысле оно удовлетворяет уравнению?

(d) Покажите, что в этой задаче групповая скорость ограничена, а фазовая нет. Найдите максимум групповой скорости.

(e) Найдите асимптотическое поведение решения при $m \to \infty$. Сравните его с асимптотиками решений уравнений (П.1.23), (П.1.72).

(f) Покажите, что если заменить (П.1.73) на явную схему

$$-i\,\frac{\psi_n^{m+1} - \psi_n^m}{\Delta t} = \frac{\psi_{n+1}^m + \psi_{n-1}^m - 2\psi_n^m}{h^2},$$

то и фазовая и групповая скорости будут неограниченными.

11. Линеаризованная цепочка Тоды имеет вид

$$\frac{d^2}{dt^2}\varphi_n(t) = \varphi_{n+1} + \varphi_{n-1} - 2\varphi_n.$$

(a) Имеет ли эта система интеграл энергии?

(b) Найдите дисперсионное соотношение. Является ли частота ω вещественной функцией при $|z| = 1$?

(c) Методом преобразования Фурье постройте решение этой системы.

(d) Как ведет себя это решение при больших временах? Сравните его с решением волнового уравнения $u_{tt} - u_{xx} = 0$.

Раздел П.2

1. (а) Пусть $U(x)$ в (П.2.1) является вещественной. Покажите, что:

$$\text{(i) } U(x) \geqslant 0 \Rightarrow K(y) \geqslant 0;$$
$$\text{(ii) } K(-y) = K(y);$$
$$\text{(iii) } |K(y)| \leqslant K(0).$$

(*Указание*: воспользуйтесь преобразованием Фурье функции $K(y)$.)

(b) Вычислите $K(y)$, если

$$U(x) = Ae^{-a|x|}, \quad a > 0.$$

Покажите, что если $G(x) = 0$, то уравнение (П.2.16) эквивалентно линейному обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка, причем все три корня характеристического уравнения вещественны и отрицательны, если параметр α достаточно мал.

Найдите приближенное решение для f и покажите, что асимптотическая скорость убывания при $t \to \infty$ может быть получена из формулы (П.2.22).

(c) Каков асимптотический вид функции $g(x, t)$? Локализованность функции $g(x, t)$ означает, что частицы, находящиеся на расстоянии, превышающем характерный размер функции g, являются некоррелированными. Даже в случае пренебрежения трехчастичным взаимодействием это свойство модели весьма важно для статистической механики [294].

(d) К каким следствиям приведет неравенство $G(x) \not\equiv 0$ в задаче (П.2.1)?

2. Модель радиоактивного распада нестабильных частиц Вайскопфа — Вигнера [502], ограниченная на случай одной пространственной переменной, имеет вид

$$i\frac{\partial \chi}{\partial t} = \int U(x)\psi(x, t)\,dx, \quad t > 0,$$
$$i\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = U(x)\chi(t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$
$$\psi \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty,$$

$$U(x) \text{ — заданная вещественная функция, } U(x) \in L_2 \cap L_1,$$
$$\chi(0), \quad \psi(x, 0) \text{ заданы, } \psi(x, 0) \in L_2.$$

С различных точек зрения она была проанализирована в работах [503], [74]. Ее можно проанализировать точно так же, как модель (П.2.1).

(a) Покажите, что интеграл энергии для этой задачи имеет вид

$$|\chi(t)|^2+\int|\psi(x, t)|^2\,dx.$$

(b) Вычислив преобразование Фурье и исключив $\tilde{\chi}(\omega)$, покажите, что ω подчиняется квадратному уравнению, коэффициенты которого вещественны при вещественных k, и при этом его корни также вещественны (т. е. вещественные $k \Rightarrow$ вещественные ω).

(c) Покажите, что у этой задачи нет дисперсионного соотношения.

(d) Выразите $\psi(x, t)$ через $\chi(t)$. Покажите, что в случае $\psi(x, 0)\equiv 0$ функция $\chi(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}=-\int_0^t K(t-\tau)\,\chi(\tau)\,d\tau,$$

где

$$K(y)=\frac{1}{2\pi}\int\hat{U}(k)\hat{U}(-k)\,e^{-ik^2y}\,dk.$$

(e) Решите это интегро-дифференциальное уравнение методом преобразования Лапласа. Покажите, что единственная особенность в обратном преобразовании возникает на мнимой оси.

(f) Вычислите асимптотическую скорость убывания функции $\chi(t)$ при $t\to\infty$. Существует ли потенциал $U(x)$, для которого нет распада? Какое асимптотическое поведение имеет функция $\psi(x, t)$?

(g) Что происходит при $t\to-\infty$?

3. Линеаризованное уравнение Бенджамина — Оно имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y-x}\,u(y, t)\,dy=0.$$

(a) Найдите интеграл энергии.

(b) Покажите, что это интегро-дифференциальное уравнение имеет следующее дисперсионное соотношение:

$$\omega+k\,|k|=0.$$

(c) Покажите, что более общее интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\int_{-\infty}^{\infty}K(x-y)\,\frac{\partial u}{\partial y}\,dy=0$$

имеет дисперсионное соотношение [505, гл. 11].

(d) Покажите, что интегральный член в (П.2.10) имеет вид свертки.

4. Опишите поведение поля E в (П.2.42) при $a > 0$; при $a = 0$. Что вы можете сказать о поведении Λ?

5. Линеаризованное уравнение Власова для бесстолкновительной плазмы в одномерном случае имеет вид

$$f_t + vf_x + \left(\frac{e}{m}\frac{dF}{dv}\right)E = 0,$$

$$E_x = -(4\pi e)\int f\,dv, \quad -\infty < x,\ v < \infty, \quad t > 0,$$

$$f \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty.$$

(Все интегралы берутся от $-\infty$ до $+\infty$.) Здесь $\{F(v) + f(x, v, t)\}$ — функция распределения электронов по скоростям, причем $|f| \ll F$. Функция F является неотрицательной, а f может иметь оба знака. Число электронов в равновесии $n = \int F dv$. Функция $E(x, t)$ обозначает среднее (возмущение) напряженности электромагнитного поля, а e и m обозначают заряд и массу электрона.

(a) Линеаризованное уравнение имеет бесконечно много законов сохранения. Покажите, что

$$\left(\int f\,dv\right)_t + \left(\int vf\,dv\right)_x = 0 \quad \text{(сохранение возмущенного заряда)},$$

$$\left(\int v^2 f\,dv\right)_t + \left(\int v^3 f\,dv\right)_x = 0 \quad \text{(сохранение возмущенной кинетической энергии)},$$

$$\varepsilon_{tt} + \omega_p^2 \varepsilon_{xx} = 0,$$

где $\varepsilon = \int E\,dx$, $\omega_p^2 = 4\pi n e^2/m$. (Бесконечный набор законов сохранения описан в работах Краскала и Обермана [299] и Кэйса [92].)

Отметим, что ни один из этих законов сохранения не является положительно определенным. Последнее уравнение означает, что ε осциллирует с плазменной частотой ω_p, т. е. ε можно считать аналогом $\int T dx$ в уравнении теплопроводности.

(b) Найдите решения вида

$$\begin{pmatrix} f \\ E \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \left(\frac{dE}{dv}\right)^{1/2} \hat{g} \\ E \end{pmatrix} e^{ikx - i\omega t}.$$

Покажите, что

$$k\omega \int |\hat{g}|^2 dv - k^2 \int v |\hat{g}|^2 dv + \omega_p^2 \left| \int \left(\frac{dF}{dv}\right)^{1/2} \hat{g}\,dv \right|^2 = 0;$$

таким образом, ω вещественна при вещественных k.

(c) Покажите, что это уравнение не имеет дисперсионного соотношения [489].

(d) Найдите преобразование Фурье — Лапласа для этой задачи. Покажите, что самая правая сингулярность на комплексной плоскости p определяется решением уравнения

$$k^2 - \frac{4\pi e^2}{m} \int_U \frac{(dF/dv)(v)}{v + \omega/k}\, dv = 0$$

при $k > 0$ и $\omega = ip$. Приближенное решение Ландау [315] этого уравнения имеет вид $\omega = \omega_r + i\omega_i$, где

$$k^2 - \frac{4\pi e^2}{m} ⨍ \frac{dF}{dv}(v)\left\{v + \frac{\omega_r}{k}\right\}^{-1} dv = 0,$$

$$\frac{\omega_i}{k} ⨍ \frac{d^2F}{dv^2}(v)\left\{v + \frac{\omega_r}{k}\right\}^{-1} dv = \pi \frac{dE}{dv}\left(-\frac{\omega_r}{k}\right).$$

6. (a) Используя ряды Фурье, найдите решения следующей задачи:

$$\varphi_t + c\varphi_x = \mu\varphi_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$
$$\varphi(0, t) = 1, \qquad c < 0, \quad \mu > 0,$$
$$\varphi(L, t) = 0,$$

$\varphi(x, 0)$ задано и вещественно, причем $\int_0^L \varphi^2\, dx < \infty$.

(b) В пределе $L \to \infty$ перейдите к интегралу Фурье. Постройте пример, показывающий, что при $t = 0$ это «решение» не может представить произвольную функцию из $\varepsilon L_2(0, \infty)$. Покажите, что интеграл Фурье представляет истинное решение, если начальные данные удовлетворяют одновременно двум неравенствам

$$\int_0^\infty |\varphi| e^{|c|x/(2\mu)}\, dx < \infty, \qquad \int_0^\infty |\varphi|^2 e^{|c|x/\mu}\, dx < \infty.$$

(c) Это пример, в котором набор мод, возникших при разделении переменных, не является полным. Используя преобразование Лапласа, найдите общее решение этой задачи для начальных данных, удовлетворяющих неравенствам

$$\int_0^\infty |\varphi|\, dx < \infty \quad \text{и} \quad \int_0^\infty |\varphi|^2\, dx < \infty.$$

7. Задача об устойчивости двумерного невязкого плоского течения Куэтта (впервые правильно рассмотренная Кэйсом [91])

является замечательным примером неполноты собственных мод, полученных при разделении переменных. В этой задаче невозмущенное поле скорости имеет вид

$$u_0(x, y, t) = y, \qquad 0 < y < 1,$$
$$v_0 = 0.$$

Вот уравнения, описывающие малые отклонения от этого состояния:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + y\frac{\partial u}{\partial x} + v = -\frac{\partial p}{\partial x},$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + y\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

с граничными условиями

$$v(y = 0) = v(y = 1) = 0.$$

Найдите решение этой задачи в виде

$$\varphi(x, y, t) \sim \varphi(y)\, e^{ikx - i\omega t},$$

где (k, ω) — постоянные. Приведите дифференциальное уравнение к виду

$$(-\omega + ky)\left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - k^2 v\right] = 0.$$

Покажите, что это уравнение не имеет нетривиальных решений, удовлетворяющих граничным условиям при $y = 0$ и $y = 1$. Таким образом, этот набор нормальных мод является пустым и, разумеется, неполным. Кэйс назвал этот подход «беззаботным». Он решил линеаризованную задачу, сделав преобразование Фурье по x и преобразование Лапласа по t. Подробности заинтересованный читатель может найти в оригинальной работе [91].

Литература

1. M. J. Ablowitz (1971), Applications of slowly varying nonlinear dispersive wave theories, Stud. Appl. Math., 50, pp. 329—344.

2. — (1972), Approximate methods for obtaining multi-phase modes in nonlinear dispersive wave problems, Stud. Appl. Math., 51, pp. 51—56.

3. — (1978), Lectures on the inverse scattering transform, Stud. Appl. Math., 58, pp. 17—94.

4. M. J. Ablowitz and D. J. Benney (1970), The evolution of multiphase modes for nonlinear dispersive waves, Stud. Appl. Math., 49, pp. 225—238.

5. M. J. Ablowitz and H. Airault (1981), Perturbations finies et forme particulière de certaines solutions de l'équation de Korteweg-de Vries, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 292 (1981), pp. 279—281.

6. M. J. Ablowitz and H. Cornille (1979), On solutions of the Korteweg-de Vries equation, Phys. Lett., 72A, pp. 277—280.

7. M. J. Ablowitz and R. Haberman (1975a), Nonlinear evolution equations — two and three dimensions, Phys. Rev. Lett., 35, pp. 1185—1188.

8. — (1975b), Resonantly coupled nonlinear evolution equations, J. Math. Phys., 16, pp. 2301—2305.

9. M. J. Ablowitz, D. J. Kaup and A. C. Newell (1974), Coherent pulse propagation, a dispersive, irreversible phenomenon, J. Math. Phys., 15, pp. 1852—1858.

10. M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur (1973a), Method for solving the sine-Gordon equation, Phys. Rev. Lett., 30, pp. 1262—1264.

11. — (1973b), Nonlinear evolution equations of physical significance, Phys. Rev. Lett., 31, pp. 125—127.

12. — (1974), The inverse scattering transform — Fourier analysis for nonlinear problems, Stud. Appl. Math., 53, pp. 249—315.

13. M. J. Ablowitz and Y. Kodama (1979), Transverse instability of one-dimensional transparent optical pulses in resonant media, Phys. Lett. 70A, pp. 83—86.

14. — (1980), A note on the asymptotics of the Korteweg-de Vries equation with solitons, Stud. Appl. Math.

15. M. J. Ablowitz, M. D Kruskal and J. F. Ladik (1979), Solitary wave collisions, SIAM, J. Appl. Math., 36, pp. 428—437.

16. M. J. Ablowitz, M. D. Kruskal and H. Segur (1979), A note on Miura's transformation, J. Math. Phys., 20, pp. 999—1003.

17. M. J. Ablowitz and J. Ladik (1975), Nonlinear differential-difference equations, J. Math. Phys., 16, pp. 598—603.

18. — (1976a), Nonlinear differential-difference equations and Fourier analysis, J. Math. Phys., 17, pp. 1011—1018.

19. — (1976b), (1977), on the solution of a class of nonlinear partial difference equations, Stud. Appl. Math., 55, pp. 213ff., 57, pp. 1—12.

20. M. J. Ablowitz, and Y. C. Ma (1981), The periodic cubic Schrödinger equation, Stud. Appl. Math.

21. M. J. Ablowitz and Y. C. Newell (1973), The decay of the continuous spectrum for solutions of the Korteweg-de Vries equation, J. Math. Phys., pp. 1277—1284.

22. M. J. Ablowitz, A. Ramani and H. Segur (1978), Nonlinear evolution equations of Painleve type, Lett. Nuovo Cim., 23, pp. 333—338.

23. — (1980a, b), A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of p-type, I, II, J. Math. Phys., 21, pp. 715—721, pp. 1006—1015.

24. M. J. Ablowitz and J. Satsuma (1978), Solitons and rational solutions of nonlinear evolution equations, J. Math. Phys., 19, pp. 2180—1286.

25. M. J. Ablowitz and H Segur (1975), The inverse scattering trar semi-infinite interval, J. Math. Phys., 16, pp. 1054—1056.

26. — (1977a), Asymptotic solutions of the Korteweg-de Vries equatio Appl. Math., 57, pp. 13—44.

27. — (1977b), Exact linearization of a Painlevé transcendent, Phys. Lett., 38, pp. 1103—1106.

28. — (1979), On the evolution of packets of water waves, J. Fluid Mech., 92, pp. 691—715.

29. — (1980), Long interval waves in fluids of great depth, Stud. Appl. Math., 62, pp. 249—262

30. M. J. Ablowitz and A. Zeppetella (1979), Explicit solutions of Fischer's equation for a special wave speed, Bull. Math. Biol., 41, pp. 835—840.

31. M. Adler (1979), On a trace functional for formal pseudo-differential operators and the symplectic structure of the Korteweg-de Vries equation, Inv. Math., 50, pp. 219—248.

32. M. Adler and J. Moser (1978), On a class of polynomials connected with the Korteweg-de Vries equation, Comm. Math. Phys., 61, pp. 1—30.

33. З. С. Агранович, В. А. Марченко (1960). Обратная задача теории рассеяния. — Изд. Харьковского университета, Харьков.

34. M. Aikawa and M. Toda (1979), private communication.

35. H. Airault (1979), Rational solutions of Painlevé equations, Stud. Appl. Math., 61, pp. 33—54.

36. H. Airault, H. P. McKean and J. Moser (1977), Rational and elliptic solutions of the KdV equation and related many-body problems, Comm. Pure Appl. Math., 30, pp. 95—198.

37. G. B. Airy (1845), Tides and waves, Encyclopedia Metropolitana, vol. 5, London, pp. 241—396.

38. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов (1964). Проблемы нелинейной оптики, ВНИИТИ.

39. S. A. Akhmanov, R. V. Khokhlov and A. P. Sukhorukov (1972), Self-focusing, self-defocusing and self-modulation of laser beams, in Laser Hand-

book, F. T. Arecchi and E. O. Schulz-Dubois, eds., North-Holland, Amsterdam.

40. C. J. Amick, J. F. Toland (1979), Finite amplitude solitary water waves, MRC Rep. 2012, Mathematics Research Center, Univ. of Wisconsin, Madison.

41. R. L. Anderson and N. J. Ibragimov (1979), Lie-Bäcklund Transformations in Applications, SIAM Studies 1, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.

42. D. Anker and N. C. Freeman (1978), On the soliton solutions of the Davey-Stewartson equation for long waves, Proc. Roy. Soc. London A, 360, pp. 529—540.

43. L. Armi (1977), The dynamics of the bottom boundary layer of the deep ocean, in Bottom Turbulence, J. C. J. Nihoul, ed., Elsevier, Amsterdam.

44. В. И. Арнольд (1974). Математические методы классической механики.— М.: Наука.

45. V. I. Arnold and A. A. Avez (1968), Ergodic Problems in Classical Mechanics, W. A. Benjamin, New York.

46. A. V. Bäcklund (1880), Zur Theorie der partiellen Differential gleichungen erster Ordnung, Math. Ann., 17, pp. 285—328.

47. F. K. Ball (1964), Energy transfer between external and internal gravity waves, J. Fluid Mech., 19, pp. 465—478.

48. E. Barouch, B. M. McCoy and T. T. Wu (1973), Zero-field susceptibility of the two-dimensional Ising Model Near T_c, Phys. Rev. Lett., 31, pp. 1409—1411.

49. R. J. Baxter (1972), Partition function of the eight vertex lattice model, Ann. Phys., 70, pp. 193—229.

50. A. Beer (1852), Bestimmung der Absorption des rothen Lichts in farbiger Flussigkeigen, Ann. Physic. Chem., 26 ser. 3, pp. 78—88.

51. В. А. Белинский, В. Е. Захаров (1978). Интегрирование уравнений Эйнштейна методом обратной задачи и вычисление точных солитонных решений. — ЖЭТФ, 75, № 6, с. 1953—1971.

52. T. B. Benjamin (1966), Internal waves of finite amplitude and permanent form, J. Fluid Mech., 25, pp. 241—270.

53. — (1967), Internal waves of permanent form in fluids of great depth, J. Fluid Mech., 29, pp. 559—592.

54. T. B. Benjamin and J. F. Feir (1967), The disintegration of wave trains on deep water, J. Fluid Mech., 27, pp. 471—430.

55. D. J. Benney (1966), Long nonlinear waves in fluid flows, J. Math. Phys., (Stud. on Appl. Math.), 45, pp. 52—63.

56. — (1973), Some properties of long waves, Stud. Appl. Math., 52, pp. 45—69.

57. — (1977), A general theory for interactions between short and long waves, Stud. Appl. Math., 56, pp. 81—94.

58. D. J. Benney and A. C. Newell (1967), The propagation of nonlinear wave envelopes, J. Math. Phys., (Stud. Appl. Math.), 46, pp. 133—139.

59. D. J. Benney and G. J. Roskes (1969), Wave instabilities, Stud. Appl. Math., 48, pp. 377—385.

60. F. A. Berezin and A. M. Perelomov (1980), Group theoretic interpretation of the Korteweg-de Vries type equations, Comm. Math. Phys., 74, pp. 129—140.

61. Ф. А. Березин, Г. П. Похил, Ф. М. Финкельберг (1964). Уравнение Шрёдингера для одномерных систем частиц с точечным взаимодействием. — Вестник МГУ, сер. 1, с. 21—28.

62. H.. Bergknoff and H. B. Thacker (1979), Structure and solution of the massive Thirring model, Phys. Rev. D., 19, pp. 3666—3681.

63. H. A. Bethe (1931), Zur Theorie der Metalle. I, Z. Physik., 71, pp. 205—226.

64. L. Bianchi (1902), Lezioni de Geometria Differenziale, vol. II, Pisa.

65. G. Birkhoff and G. C. Rota (1969), Ordinary Differential Equations, Blaisdell-Ginn, Waltham, MA.

66. M. Blazek (1966), On a method for solving the inverse problem in potential scattering, Comm. Math. Phys., 3, pp. 282—291.

67. N. A. Bleistein and R. A. Handlesman (1975), Asymptotic Expansions of Integrals, Hols, Rinehart, Winston, New York.

68. T. L. Bock and M. K. Kruskal (1979), A two-parameter Miura transformation of the Benjamin-Ono equation, Phys. Lett., 74A, pp. 173—176.

69. И. Л. Боголюбский, В. Г. Маханьков (1976). О времени жизни пульсирующих солитонов в некоторых классических моделях. — Письма в ЖЭТФ, 24, вып. 1, с. 15—19.

70. I. L. Bogolubsky, V. G. Makhankov and A. V. Shvachka (1977), Dynamics of the collisions of two space-dimensional pulsons in field theory, Phys. Lett., A63, pp. 225—227.

71. N. N. Bogolyubov (1962) Studies in Statistical Mechanics. North Holland, Amsterdam.

72. M. Boiti and F. Pempinelli (1979), Similarity solutions of the Korteweg-de Vries equatoin, Il Nuovo Cimento, 51B, pp. 70—78

73. — (1980), Similarity solutions and Bäcklund transformations of the Boussinesq equation, Il Nuovo Cimento, 56B, ser. 11, pp. 148—156.

74. E. Boldt and G. Sandri (1964), Theory of unstable particles, Phys. Rev. B., 135, pp. $B1086$—$B1088$.

75. J. Boussinesq (1871), Theorie de l'intumescence liquid appelée onde solitaire ou de translation, se propagente dans un canal rectangulaire, Compte Rendus Acad. Sci. Paris, 72, pp. 755—759.

76. — (1872), Theorie des ondes et de remous qui se propagent..., J. Math. Pures Appl., Ser. 2, 17, pp. 55—108.

77. F. P. Bretherton (1964), Resonant interactions between waves: the case of discrete oscillations, J. Fluid Mech., 20, pp. 457—479.

78. R. K. Bullough and P. J. Caudrey (1978), The double-sine-Gordon equation: wobbling solitons? Rocky Mountain J. Math., 8, pp. 53—70.

79. — eds. (1980), Solitons, Springer-Verlag, New York. [Имеется перевод: Солитоны. Под ред С. П. Новикова. — М.: Мир, 1983.]

80. F. J. Bureau (1972), Integration of some nonlinear systems of ordinary differential equations, Ann. Matematica N 94, pp. 344—359.

81. J. M. Burgers (1948), A mathematical model illustrating the theory of turbulence, Adv. Appl. Mech., 1, pp. 171—199.

82. P. B. Burt (1978), Exact, multiple soliton solutions of the double sine-Gordon equation, Proc. Roy. Soc. London A, 359, 479—495.

83. P. F. Byrd and M. D. Friedman (1971), Handbook of Elliptic Integrals for Scientists and Engineers, Springer-Verlag, New York.

84. R. A. Cairns (1979), The role of negative energy waves in some instabilities of parallel flows, J. Fluid Mech., 92, pp. 1—14.

85. C. G. Callan and D. J. Cross (1975), Quantum perturbation theory of solitons, Nucl. Phys. B., 93, pp. 29—55.

86. F. Calogero (1971), Solution of the one-dimensional N-body problems with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials, J. Math. Phys., 12, pp. 419—436.

87. — (1976), Exactly solvable two-dimensional many-body problem, Lett., Il Nuovo Cimento, 16, pp. 35—38.

88. — ed. (1978a), Nonlinear Evolution Equations Solvable by the Spectral Transform, Pitman, London.

89. — (1978b), Nonlinear evolution equations solvable by the inverse spectral transform, in Mathematcal Problems in Theoretical physics, F. Calogero, ed., Springer-Verlag, New York.

90. F. Calogero and A. Degasperis (1976), (1977), Nonlinear Evolution equations solvable by the inverse spectral transform, I, II, Il Nuovo Cimento, 32B, pp. 201—242; 39B, pp. 1—54.

91. K. M. Case (1960), Stability of inviscid plane Couette flow, Phys. Fluids, 3, pp. 143—148.

92. — (1965), Constants of the linearized motion of Vlasov plasmas. Phys. Fluids, 8, pp. 96—101.

93. — (1973), On discrete inverse scattering problems II, J. Math. Phys., 14, pp. 916—920.

94. — (1978a), Some properties of internal waves, Phys. Fluids, 21, pp. 18—29.

95. — (1978b), The N-soliton of the Benjamin-Ono equation, Proc. Nat'l Acad. Sci., 75, pp. 3562—3563.

96. — (1979), Benjamin-Ono-related equations and their solutions, Proc. Nat'l. Acad. Sci., 76, pp. 1—3.

97. K. Case and M. Kac (1973), A discrete version of the inverse scattering problem, J. Math. Phys., 14, pp. 594—603.

98. P. J. Caudrey, R. K. Dodd and J. D. Gibbon (1976), A new hierarchy of Korteweg-de Vries equations, Proc. Roy. Soc., London A, 351, pp. 407—422.

99. P. J. Caudrey, J. D. Gibbon, J. C. Eilbock and R. K. Bullough (1973a), Exact multisoliton solutions of the self-induced transparency and sine-Gordon equations, Phys. Rev. Lett., 30, pp. 237—238.

100. — (1973b), Multiple soliton and bisoliton bound state solutions of the sine-Gordon equation and related equations in non-linear optics, J. Phys. A, 6, pp. $L112$—$L115$.

101. H. H. Chen (1974), General derivatien of Bäcklund transformations from inverse scattering problems, Phys. Rev. Lett., 33, pp. 925—928.

102. — (1976), Relation between Backlund transformations and inverse scattering problems, in Bäcklund Transformations, R. M. Miura ed., Lecture notes in Mathematics 515, Springer-Verlag, New York.

103. H. H. Chen and Y. C. Lee (1979), Internal-wave solitons of fluids with finite depth., Phys. Rev. Lett., 43, pp. 264—266.

104. H. H. Chen, Y. C. Lee and C. S. Liu (1979), Integrability of nonlinear Hamiltonian systems by inverse scattering method, Physica Scripta, 20, pp. 490—492.

105. H. H. Chen, Y. C. Lee, and N. R. Pereira (1979), Algebraic internal wave solitons and the integrable Calogero-Moser-Surtherland N-body problem, Phys. Fluids, 22, pp. 187—188.

106. И. В. Чередник (1978). Дифференциальные уравнения для функций Бейкера — Ахиезера алгебраических кривых. Функц. анализ и его прилож., 12, № 3, 45—54.

107. S. S. Chern and C-L. Terng (1980), Analogue of Bäcklund's theorem in affine geometry, Rocky Mountain J. Math. 10, pp. 105—124.

108. C. Chester, B. Friedman and F. Ursell (1957), An extension of the method of steepest descents, Proc. Camb Phil. Soc., 53, pp. 599—611.

109. S. C. Chiu and J. F. Ladik (1977), Generating exactly soluble nonlinear discrete evolution equations by a generalized Wronskian technique, J. Math. Phys., 18, pp. 690—700.

110. D. V. Chudnovsky and G. V. Chudnovsky (1977), Pole expansions of nonlinear partial differential equations, Il Nuovo Cimento, 40B, pp. 339—353.

111. J. Clairin (1903), Sur quelques équations aux dérivées partielles du second ordre, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, 2e Ser., 5, pp. 437—458.

112. A. Cohen (1979), Existence and regularity of solutions of the Korteweg-de Vries equation, Arch Rat. Mech. Anal., 71, pp 143—175.

113. E. D. Cokelet (1977), Steep gravity waves on water of arbitrary uniform depth, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A, 286, pp. 183—230.

114. J. D. Cole (1951), On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics, Quart App. Math., 9, pp. 225—236.

115. — (1968), Perturbation Methods in Applied Mathematics, Ginn-Blaisdell, Waltham, MA.

116. E. T. Copson (1965), Asymptotic Expansions, Cambridge University Press, London.

117. H. Cornille (1967), Connection between the Marchenko formalism and N/D equations: regular interactions, I., J. Math. Phys., 8, pp. 2268—2280.

118. — (1976a), Differential equations satisfied by Fredholm determinants and application to the inversion formalism for parameter-dependent potentials, J. Math. Phys., 17, pp. 2143—2158.

119. — (1976b), Generalization of the inversion equations and application to nonlinear partial differential equations. I., J. Math. Phys., 18, pp 1855—1869.

120. — (1979), Solutions of the nonlinear 3-wave equations in three spatial dimensions, J. Math. Phys. 20, pp. 1653—1666.

121. J. P. Corones (1976), Solitons and simple pseudopotentials, J. Math. Phys., 17, pp. 756—759.

122. J. P. Corones and F. J. Testa (1976), Pseudopotentials and their applications, in Bäcklund Transformations, R. M. Miura, ed., Lecture Notes in Mathematics 515, Springer-Verlag, New York.

123. J. P. Corones, B. L. Markovski and V. A. Rizov (1977), A Lie group framework for soliton equations, J. Math. Phys., 18, pp. 2207—2213.

124. R. Courant and K. O Friedrichs (1948), Supersonic Flow and Shock Waves, Interscience, New York.

125. E. Courtens (1972), Nonlinear coherent resonant phenomena, in Laser Handbook, F. T. Arecchi and E. O. Schultz-DuBois, eds., North-Holland, Amsterdam.

126. A. D. Craik and J. A. Adam (1979), «Explosive» instability in a three-layer fluid flow, J. Fluid Mech., 92, pp. 15—33.

127. M. M. Crum (1955), Associated Sturm-Liouville systems, Quart. J. Math., 6, pp. 121—127.

128. R. F. Dashen, B. Hasslacher and A. Neveu (1974), (1975), Nonperturbative methods and extended-hadron models in field theory, Phys. Rev. D., 10, pp. 4114—4138; 11, pp. 3424—3450; 12, pp. 2443—2458.

129. E. Date and S. Tanaka (1976a), Analogue of inverse scattering theory for the discrete Hill's equation and exact solutions for the periodic Toda lattice, Prog. Theoret. Phys., 55, pp. 457—465.

130. — (1976b), Periodic multi-soliton solutions of Korteweg-de Vries equation and Toda lattice, Prog. Theoret. Phys. Suppl., 59, pp. 107—126.

131. A. Davey and K. Stewartson (1974), On three-dimensional packets of surface waves, Proc. Roy. Soc. London A, 338, pp. 101—110.

132. R. C. Davidson (1972), Methods in Nonlinear Plasma Theory, Academic Press, New York.

133. R. E. Davis and A. Acrivos (1967), Solitary internal waves, J. Fluid. Mech., 29, pp. 593—608.

134. P. Debye (1916), Vorträge öber die Kinetische Theorie der Materie und der Electrizität, Leipzig, Germany.

135. P. Deift, F. Lund and E. Trubowitz (1980), Nonlinear wave equations and constrained harmonic motion, Comm. Math. Phys., 74, pp. 141—188.

136. P. Deift and E. Trubowitz (1979), Inverse scattering on the line, Comm. Appl. Math., 32, pp. 121—251.

137. — (1980), Some remarks on the Korteweg-de Vries and Hill's equations, in Nonlinear Dynamics, R. G. Helleman, ed., Ann. New York Academy of Science, vol. 357, pp. 55—64.

138. V. D. Djordjevic and L. G. Redekopp (1977), On two-dimensional packets of capillary gravity waves, J. Fluid Mech., 79, pp. 703—714.

139. R. K. Dodd, R. K. Bullough and S. Duckworth (1975), Multisoliton solutions of nonlinear dispersive wave equations not solvable by the inverse method, J. Phys. A, 8, pp. 164—168.

140. Л. А. Дикий, И. Я. Дорфман, И. М. Гельфанд (1979). Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры. Функц. анализ и его прилож. 13, с. 13—30.

141. В. С. Дрюма (1974). Об аналитическом решении двумерного уравнения Кортевега — де Вриза (КдВ), Письма в ЖЭТФ. т. 19, с. 753—757.

142. Б. А. Дубровин (1975). Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза в классе конечнозонных потенциалов. — Функц. анализ и его прилож., 9, вып. 3, с. 41—51.

143. Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков (1976). Нелинейные уравнения типа Кортевега — де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия. — УМН, 31, № 1, с. 55—136.

144. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков (1974). Периодический и условнопериодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега-де Фриза, ЖЭТФ,т. 67, вып. 6, с. 2131—2144.

145. J. C. Eilbeck (1972), Reflection of short pulses in linear optics, J. Phys. A., 5, pp. 1355—1363.

146. — (1978), Numerical stuides of solitons, Proc. Symposium on Nonlinear Structure and Dynamics in Condensed Matter, Bishop and Schneider, eds., Springer-Verlag, New York.

147. J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, P. J. Caudrey and R. K Bullough (1973), Solitons in nonlinear optics I. A more accurate description of the 2π-pulse in self-induced transparency, J. Phys. A., 6, pp. 1337—1347.

148. L. P. Eisenhart (1909), A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces, Ginn and Co.; reprinted by Dover, New York, 1960.

149. Н. П. Еругин (1976), Теория подвижных особых точек уравнений второго порядка. I. — Дифф. ур., т. **12**, вып. **3**, с. 387—416; II, т. 12, вып. 4, с. 579—598.

150. F. B. Estarbrook (1981), Prolongation structures of nonlinear evolution equations, preprint,

151. F. Estabrook and H. Wahlquist (1978), Prolongation structures, connection theory and Bäcklund transformation, in Nonlinear Evolutions Equations Solvable by the Spectral Transform, F. Calogero, ed., Pitman, London.

152. Л. Д. Фаддеев (1959). Обратная задача в квантовой теории рассеяния.— УМН, 14, с. 57.

153. E. Fermi, J. Pasta and S. Ulam (1974), Studies of nonlinear problems, I. Los Alamos Rep. LA1940, 1955; reprod. in Nonlinear Wave Motion, A. C. Newell, ed., American Mathematical Society, Providence, RI.

154. R. A. Fischer (1937), The wave of advance of an advantageous gene, Ann. Eugen., 7, pp. 355—369.

155. H. Flaschka (1974a), The Toda Lattice, I. Existence of integrals, Phys. Rev., B, 9, pp. 1924—1925.

156. — (1974b), On the Toda lattice II. Inverse scattering solution, Prog. Theoret. Phys. 51, pp. 703—706.

157. — (1980), A commutator representation of Painlevé equations, J. Math. Phys., 21, pp. 1016—1018.

158. H. Flaschka, G. Forest and D. W. McLaughlin (1979), Multiphase averaging and the inverse spectral solution of KdV, Comm. Pure Appl. Math., 33, pp. 739—784.

159. H. Flaschka and D. W. McLaughlin (1976a), Canonically conjugate variables for KdV and Toda lattice under periodic boundary conditions, Prog. Theoret. Phys. 55, pp. 438—456.

160. — (1976b), Some comments on Bäcklund transformations, canonical transformations and the inverse scattering method, in Backlund Transformations, R. M. Miura, ed., Lecture Notes in Mathematics, 515, Springer-Verlag, New York.

161. — eds., (1978), Proceedings of Conference on Theory and Appl. of Solitons, (Tucson, 1976) Rocky Mountain J. Math., 8, 1, 2,

162. H. Flaschka and A. C. Newell (1975), Integrable systems of nonlinear evoluton equations, in Dynamical Systems, Theory and Applications, J. Moser, ed., Lecture Notes in Physics, 38, Springer-Verlag, New York.

163. — (1980), Monodromy and spectrum preserving deformations, I, Comm. Math. Phys., 76, pp. 65—116.

164. A. S. Fokas (1980), A symmetry approach to exactly solvable evolution equations, J. Math. Phys., 21, pp. 1318—1326.

165. A. S. Fokas and Y. C. Yortsos (1980), The transformation properties of the sixth Painlevé equation and one-parameter families of solutions, Lett. Nuovo Cimento, 30, pp. 539—540.

166. A. R. Forsyth (1906), Theory of Differential Equations, reprinted by Dover New York.

167. P. A. Franken, A. E. Hill, C. W. Peters and G. Weinreich (1961), Generation of optical harmonics, Phys. Rev. Lett.. 7, pp. 118—119.

168. N. C. Freeman and A Davey (1975), On the evolution of packets of long surface waves, Proc. Roy. Soc. London A, 344, pp. 427—433.

169. K. O. Friedrichs (1958), Symmetric positive linear differential equations, Comm. Pure App. Math., 11, pp. 333—418.

170. Y. C. Fung (1965), Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

171. C. S. Gardner (1971), The Korteweg-de Vries equation and generalizations. IV. The Korteweg-de Vries equation as a Hamiltonian system, J. Math. Phys., 12, pp. 1548—1551.

172. C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura (1967), Method for solving the Korteweg-de Vries equation, Phys. Rev. Lett., 19, pp. 1095—1097.

173. — (1974), The Korteweg-de Vries equation and generalizations. VI. Methods for exact solution, Comm. Pure Appl. Math., 27, pp. 97—133.

174. C. S. Gardner and G. K. Morikawa (1960), Similarity in the asymptotic behaviour of collision free hydromagnetic waves and water waves, Courant Inst. Math. Sci. Res. Rep., NYO-9082, New York.

175. C. S. Gardner and C. S. Su (1969), The Korteweg-de Vries equation and generalizations. III, J. Math. Phys., 10, pp. 536—539.

176. A. G. Gargett and B. A. Hughes (1972), On the interaction of surface and internal waves, J. Fluid Mech., 52, pp. 179—191.

177. C. Garrett and W. Munk (1972), Space-time scales of internal waves, Geophys. Fluid Dyn., 2, pp. 225—264.

178. — (1975), Space-time scales of internal waves: a progress report, J. Geophys. Res., 80, pp. 291—297.

179. М. Г. Гасымов, Б. М. Левитан (1966). Определение системы Дирака по фазе рассеяния. ДАН, 167, № 6, с. 1219—1222.

180. I. M. Gel'fand (1979), comment made at Joint US-USSR Symposium on Soliton Theory, Kiev, USSR, Sept. 1979.

181. И. М. Гельфанд, Л. А. Дикий (1977). Резольвенты и гамильтоновы системы. — Функц. анализ и его прилож. 11, № 2, с. 11—27.

182. И. М. Гельфанд, В. М. Левитан (1951). Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции. — Изв. АН СССР, сер. матем., 15, 309—360.

183. J. D. Gibbon, P. J. Caudrey, R. K. Bullough and J. C. Eilbeck (1973), An N-soliton solution of a nonlinear optics equation derived by a general inverse method, Lett. Nuovo Cimento, 8, pp. 775—779.

184. J. D. Gibbon, N. C. Freeman and A. Davey (1978), Three-dimensional multiple soliton-like solutions of nonlinear Klein-Gordon equations, J. Phys. A: Math., 11, pp. $L93$—$L96$.

185. J. D. Gibbon, I. N. James and I. M. Moroz (1979), An example of soliton behaviour in a rotating baroclinic fluid, Proc. Roy. Soc. London A, 367, pp. 219—237.

186. H. M. Gibbs and R. E. Slusher (1970), Peak amplification and breakup of a coherent optical pulse in a simple atomic absorber, Phys. Rev. Lett., 24, pp. 638—641.

187. R. T. Glassey (1977), On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations, J. Math. Phys., pp. 1794—1797.

188. H. Goldstein (1950), Classical Mechanics, Addison-Wesley, Reading, MA. [Имеется перевод: Г. Голдстейн (1975). Классическая механика. — М.: Наука, 1975.]

189. В. В. Голубев (1953). Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. — Гостехиздат, Москва.

190. K. A. Gorshkov and L. A. Ostrovsky (1981), Interactions of solitons in nonintegrable systems; direct perturbation method and applications, Proc. Joint US-USSR Symposium on Soliton Theory, V. E. Zakharov and S. V. Manakov, eds., North-Holland, Amsterdam, pp. 428 ff.

191. К. А. Горшков, Л. А. Островский, В. В. Папко (1976). Взаимодействия и связанные состояния солитонов как классических частиц. — ЖЭТФ, т. 71, вып. 2 с. 585—593.

192. R. H. J. Grimshaw (1975), The modulation and stability of an internal gravity wave, Res. Rep't. School of Math. Sci., Univ. Melbourne.

193. R. Haberman (1977), Nonlinear transition layers -the 2nd Painlevé transcendent, Stud. Appl. Math., 57, pp. 247—270.

194. M. Hall, Jr. (1959), The theory of Groups, Macmillan, New York.

195. J. L. Hammack (1979), private communication.

196. J. L. Hammack and H. Segur (1974), The Korteweg-de Vries equation and water waves part 2. Comparison with experiments, J. Fluid Mech., 65, pp. 289—314.

197. — (1978), The Korteweg-de Vries equation and water waves part 3. Oscillatory waves, J. Fluid Mech., 84, pp. 337—358.

198. R. H. Hardin and F. D. Tappert (1973), Applications of the split-step Fourier method to the numerical solution of nonlinear and variable coefficient wave equations, SIAM-SIGNUM Fall Meeting, Austin, Texas, Oct. 1972; SIAM Rev. (Chronicle) 15, p. 423.

199. B. Harrison (1978), Backlund transformation for the Ernst equation of general relativity, Phys. Rev. Lett., 41, pp. 1197—1200.

200. A. Hasegawa and F. Tappert (1973), Transmission of stationary optical pulses in dispersive dielectric fibers, II. Normal dispersion, Appl. Phys. Lett., 23, pp. 171.

201. H. Hasimoto and H. Ono (1972), Nonlinear modulation of gravity waves, J. Phys. Soc. Japan, 33, pp. 805—811.

202. K. Hasselmann (1962), On the nonlinear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part I, general theory, J. Fluid Mech., 12, pp. 481—500.

203. — (1963a, b), On the nonlinear energy transfer in a gravity-wave spectrum. part II, Conservation theorem; wave-particle analogy; irreversibility, J. Fluid Mech., 15, pp. 273—281; Part III, 15, pp. 385—398.

204. — (1967), A criterion for nonlinear wave stability, J. Fluid Mech., 30, pp. 737—739.

205. K. Hasselmann et al. (1973), Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP), Deut. Hydrogr. Z., Suppl. A, 8.

206. S. P. Hastings and J. B. McLeod (1980), A boundary value problem associated with the second Painlevé transcendent and the Korteweg-de Vries equation, Arch. Rat. Mech. Anal., 73, pp. 31—51.

207. M. Henon (1974), Integrals of the Toda lattice, Phys. Rev. B9, pp. 1921—1923.

208. R. Hermann (1978), Prolongatios, Bäcklund transformations, and Lie theory as algorithms for solving and understanding nonlinear differential equations, in Solitons in Action, K. Lonngren and A. C. Scott, eds., Academic Press, New York.

209. E. Hewitt and K. Stromberg (1969), Real and Abstract Analysis, Springer-Verlag, Berlin.

210. E. Hille (1976), Ordinary Differential Equations in the Complex Domain, John Wiley, New York.

211. R. Hirota (1971), Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons, Phys. Rev. Lett., 27, pp. 1192—1194.

212. — (1972), Exact solution of the sine-Gordon equation for multiple collisions of solitons, J. Phys. Soc. Japan, 33, pp. 1459—1463.

213. — (1973a), Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equation, J. Math. Phys., 14, pp. 805—809.

214. — (1973b), Exact N-soliton solution of a nonlinear lumped network equation, J. Phys. Soc., Japan, 35, pp. 289—294.

215. — (1973c), Exact N-soliton solution of the wave equation of long waves in shallow water and in nonlinear lattices, J. Math. Phys., 14, pp. 810—814.

216. — (1973d), Exact three-soliton solution of the two-dimensional sine-Gordon equation, J. Phys. Soc. Japan, 35, p. 1566.

217. — (1974), A new form of Bäcklung transformation and its relation to the inverse scattering problem, Prog. Theoret. Phys., 52, pp. 1498—1512.

218. — (1976), Direct methods of finding exact solutions of nonlinear evolution equations, in Bäcklund transformations, R. M. Miura, ed., Lecture Notes in Mathematics 515, Springer-Verlag, New York.

219. — (1977a), Nonlinear partial difference equations. I. A difference analogue of the Korteweg-de Vries equation, J. Phys. Soc. Japan, 43, pp. 1429—1433.

220. — (1977b), Nonlinear partial difference equations II. Discrete time Toda equation, J. Phys. Soc. Japan, 43, pp. 2074—2078.

221. — (1977c), Nonlinear partial difference equations III. Discrete sine-Gordon equations, J. Phys. Soc. Japan, 43, pp. 2079—2089,

222. — (1978), Nonlinear partial difference equations IV. Backlund transformation for the discrete Toda equation, J. Phys. Soc. Japan, 45, pp. 321—332.

223. — (1979a), Lecture delivered ot Soliton Workshop/Jadwisin, Warsaw, Poland, Aug. 1979.

224. — (1979b), Nonlinear partial difference equations V. Nonlinear equations reducible to linear equations, J. Phys. Soc. Japan, 46, pp. 312—319.

225. — (1980), Direct methods in soliton theory, in Solitons, R. K. Bullough and P. J. Caudrey, eds., Topics of Modern Physics, Springer-Verlag, New York.

226. R. Hirota and J. Satsuma (1976a), A variety of nonlinear network equations generated from the Bäcklund transformation for the Toda lattice, Prog. Theoret. Phys. Suppl., 59, pp. 64—100.

227. — (1976b), N-soliton of nonlinear network equations describing a Volterra system, J. Phys. Soc. Japan, 40, pp. 891—900.

228. — (1978), A simple structure of superposition formula of the Backlund transformation, J. Phys. Soc. Japan, 45, pp. 1741—1750.

229. R. Hirota and K. Suzuki (1970), Studies on lattice solitons by using electrical networks, J. Phys. Soc. Japan, 28, pp. 1366—1369.

230. — (1973), Theoretical and experimental studies of lattice solitons in nonlinear lumped networks, Proc. IEEE, 61, pp. 1483—1491.

231. R. Hirota and M. Wadati (1979), A functional integral representation of the soliton solutions, J. Phys. Soc. Japan, 47, pp. 1385—1386.

232. L. V. Hmurcik and D. J. Kaup (1979), Solitons, created by chirped initial profiles in coherent pulse propagation, J. Opt. Sci. Amer., 69, pp. 597—604.

233. J. Honerkamp, P. Weber and A. Wiesler (1979), On the connection between the inverse transform method and the exact quantum states, Nucl. Phys. B, 152, pp. 266—272.

234. E. Hopf (1950), The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$, Comm. Pure Appl. Math., pp. 201—230.

235. F. Hoppenstaedt (1975), Mathematical Theories of Populations: Demographics, Genetics and Epidemics, CBMS Regional Conference Series in Applied Mathematics 20, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.

236. W. H. Hui and J. Hamilton (1979), Exact solutions of a three-dimensional Schrödinger applied to gravity waves, J. Fluid Mech., 93, pp. 117—133.

237. Н. Х. Ибрагимов, А. Б. Шабат (1979). Уравнение Кортевега-де Фриза с групповой точки зрения. — ДАН СССР, 244, № 1, 56—61.

238. Э. Л. Айнс (1939). Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Харьков, ДНТВУ.

239. M. Ito (1980), An extension of nonlinear evolution equations of the KdV (mKdV) type to higher orders, preprint.

240. А. Р. Итс, В. Б. Матвеев (1975). Об операторах Хилла с конечным числом лакун. Функ. анализ и его прилож., 9, вып. 1, с. 69—71.

241. N. Jacobson (1962), Lie Algebras, Wiley-Interscience, New York.
[Имеется перевод: Н. Джекобсон. Алгебры Ли. — М.: Мир, 1964.]

242. M. Jaulent (1976), Inverse scattering problems in absorbing media, J. Math. Ppys. 17, pp. 1351—1360.

243. M. Jimbo, T. Mori and M. Sato (1979), Density matrix of impenetrable bose gas and the fifth Painlevé transecendent, Pub. RIMS, 303, Kyoto Univ., Japan.

244. M. Jimbo, T. Miwa, Y. Mori and M. Sato (1979), Density matrix of impenetrable bose gas and the fifth Painleve transcendent, Pub. RIMS, 303, Kyoto Univ., Japan.

245. R. S. Johnson (1973), On an asymptotic solution of the Korteweg-de Vries equation with slowly varying coefficient, J. Fluid Mech., 60, pp. 813—824.

246. R. I. Joseph (1977), Solitary waves in a finite depth fluid, J. Phys. A. 10, pp. *L*225—*L*227.

247. R. I. Joseph and R. Egri (1978), Multi-soliton solutions in a finite depth fluid, J. Phys. A. Math., 11, pp. L97—L102.

248. T. M. Joyce (1974), Nonlinear interactions among standing surface and internal gravity waves, J. Fluid Mech., 63, pp. 801—825.

249. M. Kac and P. van Moerbeke (1975a), On an explicitly soluble system of nonlinear differential equations related to certain Toda lattices, Advances in Math., 16, pp. 160—169.

250. — (1975b), On periodic Toda lattices, Proc. Nat'l Acad. Sci., 72, pp. 1627—1629.

251. — (1975c), A complete solution of the periodic Toda problem, Proc. Nat'l Acad. Sci., 72, pp. 2879—2880.

252. Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили (1970). Об устойчивости уединенных волн в среде со слабой дисперсией. — ДАН СССР, 192, с. 753—756.

253. C. F. F. Karney, A. Sen and F. Y. F. Chu (1979), Nonlinear evolution of lower hybrid waves, Phys. Fluids, 22, pp. 940—952.

254. В. И. Карпман. Нелинейные волны в диспергирующих средах. — М.: Наука, 1973.

255. В. И. Карпман, Е. М. Маслов (1978) Структура хвостов, образующихся при воздействии возмущений на солитоны. — ЖЭТФ, 75, вып. 2, с. 504—517.

256. M. Kashiwara and T. Kawai (1978), Monodromy structure of solutions of holonomic systems linear differential equations... Pub. RIMS, Kyoto Univ., Japan.

257. D. J. Kaup (1975), Exact quantization of the nonlinear Schrodinger equation, J. Math. Phys., 16, pp. 2036—2041.

258. — (1976a), Closure of the squared Zakharov-Shabat eigenstates, J. Math. Anal. Appl., 54, pp. 849—864.

259. — (1976b), The three-wave interaction -a nondispersive phenomenon, Stud. Appl. Math., 55, pp. 9—44.

260. — (1976c), A perturbation theory for inverse scattering transforms, SIAM J. Appl. Math., 31, pp. 121—123.

261. — (1977a), Coherent pulse propagation: a comparison of the complete solution with the McCall-Hahn theory and others, Phys. Rev. A., 16, pp. 704—719.

262. — (1977b), Soliton particles, and the effects of perturbations in Significance of Nonlinearity in the Natural Sciences, B. Kursunoghu, A. Perlmutter, and L. F. Scott, eds., Plenum, New York,

263. — (1978), Simple harmonic generation: an exact method of solution, Stud. Appl. Math., 59, pp. 25—35.

264. — (1980), The Wahlquist-Estabrook method with examples of applications, Physica D, 1, pp. 391—411.

265. — (1981), The solution of the general initial value problem for the full three dimensional three-wave resonant interaction, Proc. Joint US-USSR Symposium on Soliton Theory, Kiev, 1979, V. E. Zakharov and S. V. Manakov, eds., North-Holland, Amsterdam, pp. 374—395.

266. D. J. Kaup and A. C. Newell (1978a), an exact solution for a derivative nonlinear Schrödinger equation, J. Math. Phys. 19, pp. 798—801.

267. — (1978b), Solitons as particles, oscillators and in slowly changing media: a singular perturbation theory, Proc. Roy. Soc. London A, 361, pp. 413—446.

268. — (1978s), The Goursat and Cauchy problems for the sine-Gordon equation, SIAM J. Appl. Math., 34, pp. 37—54.

269. D. J. Kaup and L. R. Scacca (1980), Generation of 0π pulses from a zero-area in coherent pulse propagation, J. Opt. Sci. Amer., pp. 224—230.

270. I. Kay and H. E. Moses (1956), Reflectionless transmission through dielectrics and scattering potentials, J. Appl. Phys., 27, pp. 1503—1508.

271. D. Kazhdan, B. Kostant and S. Sternberg (1978), Hamiltonian group actions and dynamical systems of Calogero type, Comm. Pure Appl. Math., 31, pp. 481—507.

272. J. P. Keener and D. W. McLaughlin (1977), Solitons under perturbations, Phys. Rev., 16A, pp. 777—790.

273. P. L. Kelley (1965), Self-focusing of optical beams, Phys. Rev. Lett., 15, pp. 1005—1008.

274. Lord (W. Thompson) Kelvin (1887), On the waves produced by a single impulse in water, in his Math. Phys. Papers, vol. 4, pp. 303—306.

275. G. H. Keulegan (1948), Gradual damping of solitary waves, J. Res., N. B. S., 40, pp. 487—498.

276. — (1953), Characteristics of internal solitary waves, J. Res., N. B. S., 51, pp. 133—140.

277. D. A. Kleinman (1972), Optical harmonic generation in nonlinear media, in Laser Handbook, F. T. Arecchi and E. D. Schultz-Dubois, eds., North-Holland, Amsterdam.

278. C. J. Knickerbocker and A. C. Newell (1980), Shelves and the Korteweg-de Vries equation, J. Fluid Mech., 98, pp. 803—818.

279. K. Ko and H. H. Kuehl (1978), Korteweg-de Vries soliton in a slowly varying medium, Phys. Rev. Lett. 40, pp. 233—236.

280. K. K. Kobayashi and M. Izutsu (1976), Exact solution of the N-dimensional sine-Gordon equation, J. Phys. Soc. Japan, 41, pp. 1091—1092.

281. Y. Kodama (1975), Complete integrability of nonlinear evolution equations, Prog. Theoret. Phys., 54, pp. 669—686.

282. Y. Kodama and M. J. Ablowitz (1980), Transverse instability of breathers in resonant media, J. Math. Phys., 21, pp. 928—931.

283. — (1981), Perturbations of solitons and solitary waves, Stud. Appl. Math., to appear.

284. Y. Kodama, J. Satsuma and M. J. Ablowitz (1981), Nonlinear intermediate long wave equation: analysis and method of solution, Phys. Rev. Lett., 46, pp. 687—690.

285. Y. Kodama and T. Taniuti (1978), Higher order approximation in the reductive perturbation method. I. The weakly dispersive system, J. Phys. Soc. Japan, 45, pp. 298—310.

286. — (1979), Higher order corrections to the soliton velocity and the linear dispersion relation, Physica Scripta, 20, pp. 486—489.

287. K. Konno, H. Sanuki and Y. H. Ichikawa (1974), Conservation laws of nonlinear evolution equations, Prog. Theoret. Phys., 52, pp. 886—889.

288. K. Konno and M. Wadati (1975), Simple derivation of Bäcklund transformation from the Ricatti form of the inverse method, Prog. Theoret. Phys., 53, pp. 1652—1656.

289. C. G. Koop and G. Butler (1981), An investigation of internal solitons in a two-fluid system, J. Fluid Mech.

290. В. Е. Корепин, Л. Д. Фаддеев (1975). Квантование солитонов. — ТМФ, 25, вып. 2, с. 147—163.

291. D. J. Korteweg and G. de Vries (1895), On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, Philos. Mag. Ser. 5, 39, pp. 422—443.

292. И. М. Кричевер (1976). Алгебраические кривые и коммутирующие матричные дифференциальные операторы. — Функц. анализ и его прилож., 10, вып. 2, с. 75—77.

293. I. M. Krichever and S. P. Novikov, Holomorphic bundles and nonlinear equations, Proc. Joint US-USSR Symposium on Soliton Theory, Kiev, 1979, V. E. Zakharov and S. V. Manakov, eds., North-Holland, Amsterdam, pp. 267—293.

294. A. H. Kritz, G. V. Ramanathan and G. Sandri (1970), The two-particle correlation function in nonequilibrium statistical mechanics in Kinetic Equations, R. Liboff and N. Rostekev, eds., Gordon and Breach, New York.

295. M. D. Kruskal (1963), in Asymptology in Mathematical Models in Physical Sciences, S. Probot, ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

296. — (1965), in Proc. IBM Scientific Computing Symposium on Large-Scale Problems in Physics, IBM Data Processing Division, White Plains, NY; Thomas J. Wabson Research Center, Yorktown Heights, New York.

297. — (1974), The Korteweg-de Vries equation and related evolution equations in Nonlinear Wave Motion, A. C. Newell, ed., AMS Lectures in Applied Mathematics, 15, American Mathematical Society, Providence, RI.

298. — (1975), Nonlinear wave equations, in Dynamical Systems, Theory and Applications, J. Moser, ed., Lecture Notes in Physics, 38, Springer-Verlag, New York.

299. M. Kruskal and C. Oberman (1965), Some constants of the linearized motion of Vlasov plasmas, J. Math. Phys., 6, pp. 327—335.

300. M. D. Kruskal and N. J. Zabusky (1963), Princeton Plasma Physics Laboratory annual report MATT-Q-21, pp. 301ff., unpublished.

301. T. Kubota, D. R. S. Ko and L. Dobbs (1978a), Propagation of weakly nonlinear internal waves in a stratified fluid of finite depth, Report of AIAA 16th Aerospace Sciences Meeting, Huntsville, Al.

302. — (1978b), Weakly nonlinear long interval gravity waves in stratified fluids of finite depth, AIAA J. Hydronautics, 12, pp. 157—165.

303. A. E. Kudryavasev (1975), Soliton-like collisions for a Higgs scalar field, Sov. Phys. JETP Lett., 22, pp. 82—83.

304. П. П. Кулиш, С. В. Манаков, Л. Д. Фаддеев (1976). Сравнение квантовых и квазиклассических ответов для нелинейного уравнения Шрёдингера. ТМФ, 28, вып. 1, с. 38—45.

305. Б. Б. Купершмидт, Ю. И. Манин (1977), (1978). Уравнения длинных волн на свободной поверхности I, II. Функц. анализ и его прилож., 11, вып. 3, с. 31—42; 12, вып. 1, с. 25—37.

306. Е. А. Кузнецов, А. В. Михайлов (1947). Устойчивость стационарных волн в нелинейных средах со слабой дисперсией. ЖЭТФ, 67, 6, 1717—1727.

307. J. F. Ladik and S. C. Chiu (1977), Solutions of nonlinear network equations by the inverse scattering method, J. Math. Phys. 18, pp. 701—704.

308. B. M. Lake, H. C. Yuen, H. Rungaldier and W. E. Ferguson (1977), Nonlinear deep water waves: theory and experiment, Part 2, J. Fluid Mech., 83, pp. 49—74.

309. G. L. Lamb (1971), Analytical descriptions of ultrashort optical pulse propagation in a resonant medium, Rev. Mod. Phys., 43, pp. 99—124.

310. -- (1973), Phase variation in coherent-opticalpulse propagation, Phys. Rev. Lett., 31, pp. 196—199.

311. — (1974), Bäcklund transformations for certain nonlinear evolution equations, J. Math. Phys., 15, pp. 2157—2165.

312. — (1976), Bäcklund transformations at the turn of the century, in Bäcklund Transformations, R.M. Miura, ed., Lecture Notes in Mathematics, 515, Springer-Verlag, New York.

313. — (1980), Elements of Soliton Theory, John Wiley, New York.

314. H. Lamb (1932), Hydrodynamics, Dover, New York.
[Имеется перевод: Г. Ламб. Гидродинамика. — М.: Гостехиздат, 1947.]

315. Л. Д. Ландау (1946). О колебаниях электронной плазмы. — ЖЭТФ, 16, с. 574—583.

316. R. Landauer (1967), Sign of slow nonlinearities in nonabsorbing optical media, Phys. Lett., 25A, pp. 416—417.

317. P. D. Lax (1954), Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation, Comm. Pure Appl. Math., 7, pp. 159—193.

318. — (1968), Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, Comm. Pure Appl. Math., 21, pp. 467—490.
[Имеется перевод: П. Д. Лакс (1969). Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединенные волны. — Математика, 13 : 5, с. 128—150, М.: Мир.

319. — (1973), Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves, CBMS Regional Conference Series in Applied Mathematics 11, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1973.

320. — (1975), Periodic solutions of the KdV equation, Comm. Pure Appl. Math., 28, pp. 141—188.

321. P. D. Lax and D. Levermore (1979), The zero dispersion limit for the Korteweg-de Vries equation, Proc. Nat'l. Acad. Sci., 76, pp. 3602—3606.

322. Lebedev and Yu. I. Manin (1978), Hidden symmetries, ITEP, preprint.

323. S. Leibovich and G. D. Randall (1973), Amplification and decay of long nonlinear waves, J. Fluid Mech., 58, pp. 481—493.

324. C. Leone (1974), Gradual damping of internal solitary waves, M. S. Thesis, Clarkson College, New York.

325. C. Leone and H. Segur (1981), Long internal waves of moderate amplitude II. Viscous decay, preprint.

326. J. E. Lewis, B. M. Lake and D. R. S. Ko (1974), On the interaction of internal waves and surface gravity waves, J. Fluid Mech., 63, pp. 773—800.

327. E. H. Lieb and W. Leninger (1963), Exact analysis of an interacting Bose gas I., Phys. Rev., 130, pp. 1605—1616; (E. N. Lieb), II, 130, pp. 1616—1624.

328. G. Liebbrandt (1978), New exact solutions of the classical sine-Gordon equation in $2+1$ and $3+1$ dimensions, Phys. Rev. Lett., 41, pp. 435—438.

329. M. J. Lighthill (1958), Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions, University Press, Cambridge.

330. A. Liu and S. H. Davis (1977), Viscous attenuation of mean drift in water waves, J. Fluid. Mech., 81, pp. 63—84.

331. R. R. Long (1964), Solitary waves in the westerlies, J. Atmos. Sci., 21, pp. 156—179.

332. K. Lonngren and A. C. Scott, eds. (1978), Solitons in Action, Academic Press, New York.

333. M. S. Longuet-Higgins (1975), Integral properties of periodic gravity waves of finite amplitude, Proc. Roy. Soc. London A, 392, pp. 157—174.

334. M. S. Longuet-Higgins and M. J. H. Fox (1977), Theory of the almost-highest wave I. The inner solution, J. Fluid Mech., 80, pp. 721—742.

335. — (1978), Theory of the almost-highest wave II. Matching and analytic extension, J. Fluid Mech., 85, p. 769—786.

336. A. E. H. Love (1944), A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Dover, New York.

337. Н. А. Лукашевич (1971). К теории второго уравнения Пенлеве. Дифф. ур., т. VII, вып. 6, с. 1124—1125.

338. F. Lund (1977), Example of a relativistic, completely integrable, Hamiltonian system, Phys. Rev. Lett., 38, pp. 1175—1178.

339. Y. C. Ma (1978), On the long-wave/short-wave resonant interaction, Stud. Appl. Math., 59, pp. 201—221.

340. Y. C. Ma and L. G. Redekopp (1979), Some solutions pertaining to the resonant interactions of long and short waves, Phys. Fluids, 22, pp. 1872—1876.

341. W.Magnus and W. Winkler (1966), Hill's Equation, Wiley-Interscience, New York.

342. D. Maison (1978), Are the stationary, axially symmetric Einstein equations completely integrable?, Phys. Rev. Lett., 41, pp. 521—522.

343. — (1979), On the complete integrability of the stationary, axially symmetric Einstein equations, J. Math. Phys., 20, pp. 871—877.

344. V. G. Makhankov (1978), Dynamics of classical solutions in non-integrable systems, Phys. Rep., 35, pp. 1—128.

345. С. А. Манаков (1973). Нелинейная дифракция Фраунгофера. ЖЭТФ, **65**, вып. 10, с. 1392—1398.

346. — (1973). К теории двумерной стационарной самофокусировки электромагнитных волн. — ЖЭТФ, **65**, вып. 8, с. 506.

347. — (1974). О полной интегрируемости и стахостизации в дискретных динамических системах. — ЖЭТФ, 67, вып. 2, с. 543—555.

348. — (1981), The inverse scattering transform for the time-dependent Schrodinger equation and Kadomtsev-Petviashvili equation, Proc. Joint US-USSR Symposium on Soliton Theory, Kiev, 1979, V. E. Zakharov and S. V. Manakov, eds., North-Holland, Amsterdam, pp. 420—427.

349. S. V. Manakov, P. M. Santini and L. A. Takhtadzhyan (1980), Asymptotic behavior of the solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation, Phys. Lett., 75A, pp. 451—454.

350. S. V. Manakov, V. E. Zakharov, L. A. Bordag, A. B. Matveev (1977), Two-dimensional solitons of the Kadomtsev-Petviashvili equation and their interaction, Phys. Lett., 63A, pp. 205—206.

351. Yu. I. Manin, Hidden symmetries of long waves, Proc. Joint US-USSR Symposium on Soliton Theory, Kiev, 1979, V. E. Zakharov and S. V. Manakov, eds., North-Holland, Amsterdam, pp. 400—409.

352. В. А. Марченко (1974). Периодическая задача Кортевега-де Фриза. — Мат. сб., т. 95, № 3, с. 351—356.

353. D. V. Martin and H. C. Yuen (1980), Quasi-recurring energy leakage in the two-space-dimensional nonlinear Schrödinger equation, Phys. Fluids, 23, pp. 881—883.

354. F. P. Mattar and M. C. Newstein (1977), Transverse effects associated with the propagation of coherent optical pulses in a resonant media, IEEE J. Quantum Electronics, QE-13, pp. 507—520.

355. V. B. Matveev (1976), Abelian functions and solitons, Inst. Theor. Phys., Univ. Wroclaw, preprint 373.

356. T. Maxworthy and L. G. Redekopp (1976), Theory of the Great Red Spot and other observed features of the Jovian atmosphere, Icarus, 29, pp. 261—271.

357. T. Maxworthy, L. G. Redekopp and P. D. Wiedman (1978), On the production and interaction of planetary waves..., Icarus, 33, pp. 388—409.

358. S. L. McCall and E. L. Hahn (1965), cited in Bull. Am. Phys. Soc., 10, p. 1189.

359. — (1967), Self-induced transparency by pulsed coherent light, Phys. Rev. Lett., 18, pp. 908—911.

360. — (1969), Self-induced transparency Phys. Rev., 183, pp. 457—485.

361. — (1970), Pulse area-pulse energy description of a traveling wave laser amplifier, Phys. Rev. A, 2, pp. 861—870.

362. C. H. McComas and F. P. Bretherton (1977), Resonant interaction of oceanic internal waves, J. Geophys. Res., 82, pp. 1397—1412.

363. B. M. McCoy, C. A. Tracy and T. T. Wu (1977), Painleve functions of the third kind, J. Math. Phys., 18, pp. 1058—1092.

364. A. D. McEwan (1971), Degeneration of resonantly-excited standing internal gravity waves, J. Fluid Mech.,50, pp. 431—448.

365. A. D. McEwan, D. W. Mander and R. K. Smith (1972), Forced resonant second-order interaction between damped internal waves, J. FluidMech., 55, pp. 589—608.

366. J. B. McGuire (1964), Study of exactly soluble one-dimensional N-body problems, J. Math. Phys., 5, pp. 622—636.

367. H. P. McKean (1981), The sine-Gordon and sinh -Gordon equations on the circle, Comm. Pure Appl. Math., 34, pp. 197—257.

368. H. P. McKean and E. Trubowitz (1976), Hill's operator and hyperelliptic function theory in the presence of infinitely many branch points, Comm. Pure Appl. Math., 29, pp. 143—226.

369. H. P. McKean and P. van Moerbeke (1975), The spectrum of Hill's equation, Invent. Math., 30, pp. 217ff.

370. D. W. McLaughlin (1975), Four examples of the inverse method as a canonical transformation, J. Math. Phys., 14, pp. 1817—1828.

371. D. W. McLeod (1975), Four examples of the inverse method as a canonical transformation, J. Math. Phys., 14, pp. 1817—1828.

372. J. B. McLeod and P. J. Olver (1981), The connection between completely integrable partial differential equations and ordinary differential equations of Painlevé type, Rep. 2135, Mathematics Research Center, University of Wisconsin, Madison.

373. N. N. Meiman (1977), The theory of one-dimensional Schrodinger operators with a periodic potential, J. Math. Phys., 18, pp. 834—848.

374. A. V. Mikhailov (1981), The reduction problem and the inverse scattering method, Proc. Joint. US-USSR Symposium on Soliton Theory, Kiev, 1979, V. E. Zakharov and S. V. Manakov, eds., North-Holland, Amsterdam, pp. 73—117.

375. J. W. Miles (1977a), Obliquely interacting solitary waves, J. Fluid Mech., 79, pp. 157—169.

376. — (1977b), Resonantly interacting solitary waves, J. Fluid Mech., 79, pp. 171—179.

377. — (1979), The asymptotic solution of the Korteweg-de Vries equation in the absense of solitons, Stud. Appl. Math. 60, pp. 59—72.

378. — (1980), Solitary waves, Ann. Rev. Fluid Mech., 12, pp. 11—43.

379. R. M. Miura (1968), Korteweg-de Vries equation and generalizations I. A remarkable explicit nonlinear transformation, J. Math. Phys., 9, pp. 1202—1204.

380. — (1974), Conservation laws for the fully nonlinear long-wave equations, Stud. Appl. Math., 53, pp. 45—56.

381. — (1976a), The Korteweg-de Vries quation: a survey of results, SIAM Rev. 18, pp. 412—459.

382. — ed. (1976b), Bäcklund Transformations, Lecture Notes in Mathematics 515, Springer-Verlag, New York.

383. R. M. Miura, C. S Gardner and M. D. Kruskal (1968), Korteweg-de Vries equation and generalizations II. Existence of conservation laws and constants of motion, J. Math. Phys., 9, pp. 1204—1209.

384. H. C. Morris (1979), Prolongation structures and nonlinear evolution equations in two spatial dimensions, J. Phys., A, 12, pp. 261—267.

385. P. M. Morse and H. Feshbach (1953), Methods of theoretical physics, McGraw-Hill, New York.
[Имеется перевод: Ф. М. Морс, Г. Фешбах. Методы теоретической физики, т. 1, 2, ИЛ, 1958—1959.]

386. J. Moser (1975a), Dynamical systems, finitely many mass points on the line under the influence of an exponential potential — an integrable system, in Dynamical Systems, Theory and Applications, J. Moser, ed., Lecture Notes in Physics, 38, Springer-Verlag, New York.

387. — (1975b), Integrable systems of nonlinear evolution equations, in Dynamical Systems, Theory and Applications, J. Moser, ed., Lecture Notes in Physics, 38, Springer-Verlag, New York.

388. H. E. Moses (1976), a solution of the Korteweg-de Vries equation in a half-space bounded by a wall, J. Math. Phys., 17, pp. 73—75.

389. G. Mott (1973), Elastic wave propagation in an infinite isotropic solid cylinder, J. Acoust. Soc. Amer., 53, pp. 1129—1135.

390. A. C. Murray (1978), Solutions of the Korteweg-de Vries equation evolving from a «box» and other irregular initial functions, Duke Math. J., 45, pp. 149—181.

391. R. Nakach (1977), Tech Rep't 2, School of Electrical Engineering, Chalmers Univ. Techn., Göteberg, Sweden.

392. A. Nakamura (1979a), A direct method of calculating periodic wave solutions to nonlinear evolution equations I. Exact two-periodic wave solution, J. Phys. Soc. Japan, 47, pp. 1701—1705.

393. — (1979b), Bäcklund transform and conservative laws of the Benjamin — Ono equations, J. Phys. Soc. Japan, 47, pp. 1335—1340.

394. V. V. Nemytskii and V. V. Stepanov (1960), Qualitative Behaviour of Differential Equations, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.

395. G. Neugebauer (1979), Bäcklund transformations of axially symmetric stationary gravitational fields, J. Phys. A, 12, pp. 167—170.

396. A. C. Newell (1974), Nonlinear Wave Motion, American Mathematical Society, Providence, RI.

397. A. C. Newell and L. Redekopp (1977), Breakdown of Zakharov-Shabat theory and soliton creation, Phys. Rev. Lett., 38, pp. 377—380.

398. R. G. Newton (1966), Scattering Theory of Waves and Particles McGraw-Hill, New York.
[Имеется перевод: Р. Ньютон. Теория рассеяния волн и частиц. — М.: Мир, 1969.]

399. — (1979), A new result on the inverse scattering problem in three dimensions, Phys. Rev. Lett., 43, pp. 541—542.

400. Л.П. Нижник (1973). Обратная нестационарная задача рассеяния. — Киев, Наукова думка.

401. С. П. Новиков (1974). Периодическая задача Кортевега-де Фриза. — Функц. анализ и его прилож., т. 8, № 3, с. 54—66.

402. S. P. Novikov and I. M. Krichever (1981), Algebraic geometry and mathematical physics, cited in Proc. Joint US USSR Symposium on Soliton Theory, Kiev, 1979, V. E. Zakharov and S. V. Manakov, eds., North-Holland, Amsterdam.

403. S. Oishi (1979), Relationship between Hirota's method and the inverse spectral method — the Korteweg-de Vries equation's case, J. Phys. Soc. Japan, 47, pp. 1037—1038.

404. D. J. Olbers and K. Herterich (1979), The spectral energy transfer from surface waves to internal waves, J. Fluid Mech., 92, pp. 349—379.

405. M. Olshanetsky and A. Perelomov (1976a), Completey integrabe classical systems connected with semisimple Lie algebras, Lett. Math. Phys., 1, pp. 187—193.

406. — (1976b), Explicit solutions of some completely integrable systems, Lett. Nuovo Cimento, 17, pp. 97—101.

407. — (1976c), Completely integrable Hamiltonian systems connected with semisimple Lie algebras, Invent. Math., 37, pp. 93—108.

408. F. W. Olver (1974), Asymptotics and Special Functions, Academic Press, New York.

409. H. Ono (1975), Algebraic solitary waves in stratified fluids, J. Phys. Soc., Japan, 39, pp. 1082—1091.

410. — (1976), Algebraic soliton of the modified Korteweg-de Vries equation, J. Soc. Japan, 41, pp. 1817—1818.

411. L. Onsager (1949), Statistical hydrodynamics, Il Nuovo cimento, Ser. 9, 6, Suppl. No. 2, pp. 279—287.

412. S. A. Orszag and M. Israeli (1974), Numerical simulation of viscous incompressible flows, Ann. Rev. Fluid Mech., 6, pp. 281—318.

413. A. R. Osborne and T L. Burch (1960), Interval solitons in the Andaman Sea, Science, 258, pp. 451—460.

414. E. Ott and R. N. Sudan (1970), Damping of solitary waves, Phys. Fluids, 13, pp. 1432—1434.

415. S. Oxford (1979), The Hamiltonian of the quantized nonlinear Schrodinger equation, Ph. D. thesis, Univ. of California, Los Angeles.

416. C. K. N. Patel (1970), Investigation of pulse delay in selfinduced transparency, Phys. Rev. A., Ser. 3, 1, pp. 979—982.

417. J. Pedlovsky (1971), Geophysical fluid dynamics, Lectures in Applied Mathematics 13, American Mathematical Society, Providence, RI.

418. B. M. Peek (1958), The Planet Jupiter, Faber and Faber, London.

419. A. S. Petters and J. J. Stoker (1960), Solitary waves in liquids having nonconstant density, Comm. Pure Appl. Math., 13, pp. 115—164.

420. O. M. Phillips (1960), On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude. I. The elementary interactions, J. Fluid Mech., 9, pp. 193—217.

421. — ((1974), Nonlinear dispersive waves, Ann. Rev. Fluid Mech., 6, pp. 93—110.

422. — (1977), The Dynamics of the Upper Ocean, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, London.

423. F. A. E. Pirani (1979), Local Jet Bundle Formulation of Bäcklund Transformations, Reidel, Boston, 1979.

424. W. Pogorzelski (1966), Integral Equations and Their Applications, Pergamon Press, London.

425. G. V. Ramanathan and G. Sandri (1969), Model for the derivation of kinetic theory, J. Math. Phys., 10, pp. 1763—1773.

426. Lord (J. W. Strutt) Rayleigh (1876), On waves, Philos. Mag., Ser. 5, 1, pp. 257—279.

427. C. Rebbi (1979), Solitons, Scientific American, February, pp. 92—116.

428. L. G. Redekopp (1977), On the theory of solitary Rossby waves, J. Fluid Mech., 82, p. 225—745.

429. — (1980), Similarity solutions of two-dimensional wave equations, Stud. Appl. Math., 63, pp. 185—207.

430. L. G. Redekopp and P. D. Weidman (1978), Solitary Rossby waves in zonal shear flows and their interactions, J. Atmos. Sci. 35, pp. 790—804.

431. R. D. Richtmeyer and K. W. Morton (1967), Difference Methods for initial-Value Problems, Interscience, New York.

432. M. H. Rizk and D. R. S. Ko (1978), Interaction between small-scale surface waves and large scale internal waves, Phys. Fluids, 21, pp. 1900—1905.

433. R. Rosales (1978), Exact solutions of some nonlineay evolution equations, Stud. Appl. Math., 59, pp. 117—151.

434. G. G. Rossby (1939), Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere, J. Marine Res., 2, pp. 38—55.

435. S. N. M. Ruÿsenaars (1980), On one-dimensional integrable quantum systems with infinitely many degrees of freedom, Ann. Phys., 128, pp. 335—362.

436. W. Rund (1976), Variational problems and Bäcklund transformations, R. M. Miura, ed., Lecture Notes in Mathematics, 515, Springer-Verlag, New York.

437. J. S. Russell (1838), Report of the committee on waves, Report of the 7th Meeting of British Association for the Advacement of Science, John Murray, London, pp. 417—496.

438. — (1844), Report on waves, Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science, John Murray, London, pp. 311—390.

439. G. J. Salamo, H. M. Gibbs and G. C. Churchill (1974), Effects of degeneracy on self-induced transparency, Phys. Rev. Lett., 33, pp. 273—276.

440. S. Salihoglu (1980), Two-dimensional $O(N)$ nonlinear σ-model and the fifth Painlevé transcendent, Phys. Lett., 89B, p. 367.

441. H. Samelson (1969), Notes on Lie Algebra, Van Nostrand-Reinhold, New York.

442. R. Sasaki (1979a), Geometrization of soliton equations, Phys. Lett., 71A, pp. 390ff.

443. — (1979b), Soliton equations and pseudo-spherical surfaces, Nucl. Phys. B., 154, pp. 343—357.

444. M. Sato, T. Miwa and M. Jimbo (1977), (1978), Studies on holonomic quantum fields, Proc Japan, Ser. A Math. Sci. I, 53, pp. 6—10; II, 53, pp. 147—152; III, 53, pp. 153—158; IV, 53, pp. 183—185; V, 53, pp. 291—

224; VI, 54, pp. 1—5; VII, 54, pp. 36—41 (series continues). See also Holonomic quantum fields, Pub. RIMS, I, 14, pp. 223—267 (series continues).

445. J. Satsuma (1976), N-soliton solution of the two-dimensional Korteweg-deVries equation, J. Phys. Soc. Japan, 40, pp. 286—290.

446. — (1979), private communication.

447. J. Satsuma and M. J. Ablowitz (1979), Two-dimensional lumps in nonlinear dispersive systems, J. Math. Phys., 20, pp. 1496 ff.

448. — (1980), Solutions of an internal wave equation describing a stratified fluid with finite depth, in Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering and Applied Science, R. L. Sternberg, A. J. Kalinowski and J. S. Paradakis, eds. Marcel Dekker, New York.

449. J. Satsuma, M. J. Ablowitz and Y. Kodama (1979), On an internal wave equation describing a stratified fluid with finite depth, Phys. Lett., 73A, pp. 283—286.

450. J. Satsuma and D. J. Kaup (1977), a Bäcklund transformation for a higher order Korteweg-de Vries equation, J. Phys. Soc. Japan, 43, pp. 692—697.

451. J. Satsuma and N. Yajima (1974), Initial value problems of one-dimensional self modulation of nonlinear waves in dispersive media, Supp. Prog. Theoret. Phys., 55, pp. 284—306.

452. A. C. Scott, F. Y. F. Chu and D. W. McLaughlin (1973), The soliton — A new concept in applied science, Proc. IEEE, 61, pp. 1443—1483.

453. H. Segur (1973), The Korteweg-de Vries equation and water waves, solutions of the equation, I, J. Fluid Mech., 59, pp. 721—736.

454. — (1976), Asymptotic solutions and conservation laws for the nonlinear Schrödinger equation, Part II, J. Math. Phys., 17, pp. 714—716.

455. — (1980), Resonant interactions of surface and internalwaves, Phys. Fluids, 23, pp. 2556—2557.

456. H. Segur and M. J. Ablowitz (1976), Asymptotic solutions and conservation laws for the nonlinear Schrödinger equation, Part I., J. Math. Phys., 17, pp. 710—713.

457. — (1981), Asymptotic solutions of nonlinear evolution equations and a Painlevé transcendent, Proc. Joint US-USSR Symposium on Soliton Theory, Kiev, 1979, V. E. Zakharov and S. V. Manakov, eds., North-Holland, Amsterdam, pp. 165—184.

458. H. Segur and J. L. Hammack (1981), Long internal waves of moderate amplitude. I. Solitons, preprint.

459. А. Б. Шабат (1973). Об уравнении Кортевега-де Фриза. ДАН СССР, № 6, **211**, 1310—1313.

460. — (1975). Обратная задача рассеяния для систем дифференциальных уравнений. — Функ. анализ и его прилож., 9, № 3, 75—78.

461. — Report at joint US-USSR Symposium on Soliton Theory, Kiev, V. E. Zakharov and S. V. Manakov, eds., North-Holland, Amsterdam.

462. W. F. Simmons (1969), A. variational method for weak resonant wave interactions, Proc. Roy. Soc. London, A, 309, pp. 551—575.

463. Е. К.. Склянин (1979). Метод обратной задачи рассеяния и нелинейное квантовое уравнение Шрёдингера. — ДАН СССР, т. 244, с. 1337—1341,

464. Е. К. Склянин, Л. Д. Фаддеев (1978). Квантовомеханический подход к вполне интегрируемым системам. — ДАН ССР, 243, с. 1430—1433.

465. R. E. Slusher and H. M. Gibbs (1972), Self-induced transparency in atomic rubidium, Phys. Rev. A, 5, pp. 1634—1659; Erratum, 6, p. 1255.

466. J. J. Stoker (1957), Water Waves, Interscience, New York.

467. G. G. Stokes (1847), On the theory of oscillatory waves, Trans. Camb. Philos. Soc., 8, pp. 441—455.

468. R. Sugaya, M. Sugawa and H. Nomoto (1977), Experimental observation of explosive instability due to a helical electron beam, Phys. Rev. Lett., 39, pp. 27—31.

469. B. Sutherland (1972), Exact results for a quantum manybody problem in one-dimension, II, Phys. Rev., 5A, pp. 1372—1376.

470. T. Taha and M. J. Ablowitz (1981), Numerical simulations, Clarkson College, Potsdam, NY.

471. Л. А. Тахтаджян (1972). Дипломная работа. Ленинградский государственный Университет.

472. — (1981), The quantum inverse problem method and the XYZ Heinsenberg model, Proc. Joint US-USSR Symposium on Soliton Theory, Kiev, 1979, V. E. Zakharov and S. V. Manakov, eds. North-Holland, Amsterdam, pp. 231——245.

473. В. И. Таланов (1965). О самофокусировке волновых лучей в нелинейных средах. — Письма в ЖЭТФ, 2, вып. 5, с. 218—222.

474. S. Tanaka (1972a), On the N-tuple wave solutions of the Korteweg-de Vries equation, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 8, pp. 419—428.

475. — (1972b), Some remarks on the modified Korteweg-de Vries equation, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 8, pp. 429—437.

476. — (1974), Korteweg-de Vries equations: construction of solutions in terms of scattering data, Osaka J. Math., 11, pp. 49—59.

477. — (1975), Korteweg-de Vries equation; asymptotic behaviour of solutions, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 10§ pp. 367—379.

478. T.. Taniuti and C. C. Wei (1968), Reductive perturbation method in nonlinear wave propagation I, J. Phys. Soc. Japan, 24, pp. 941—946.

479. G. I. Taylor (1959), Waves on thin sheets of water II., Proc. Roy. Soc. London, A, 253, pp. 296—312.

480. H. B. Thacker (1978), Polynomial conservation laws in (1 + 1)-dimensional classical and quantum field theory, Phys. Rev. D, 17, pp. 1031—1040.

481. H. B. Thacker and D. Wilkinson (1979), Inverse scattering transform as an operator method in quantum field theory, Phys. Rev. D, 17, pp. 3660—3665..

482. W. Thickstun (1976), A system of particles equivalent to solitons. J. Math. Anal. Appl., 55, pp. 335—346.

483. S. A. Thorpe (1966), On standing internal gravity waves of finite amplitude, J. Fluid Mech., 24, pp. 737—751.

484. M. Toda (1967a), Vibration of a chain with nonlinear interaction, J. Phys. Soc. Japan, 22, pp. 431—436.

485. — (1967b), Wave propagation in anharmonic lattices, J. Phys. Soc. Japan, 23, pp. 501—506.

486. — (1970), Waves in nonlinear lattices, Prog. Theoret. Phys., Suppl. 45, pp. 174—200.

487. — (1971), private communication.

488. K. Ueno (1981), Monodromy preserving deformation and its application to soliton theory, RIMS Kyoto Univ., preprint.

489. N. G. van Kampen (1955), On the theory of stationary waves in plasmas, Physica, 21, pp. 949—963.

490. A. Vlasov (1945), On the kinetic theory of an assembly of particles with a collective interaction, J. Phys. USSR, 19, pp. 25—40.

491. J. von Neumann (1944), Proposal and analysis of a numerical model for the treatment of hydrodynamical shock problems, Nat. Res. Com. Rep. AM—551.

492. M. Wadati (1972), The modified Korteweg-de Vries equation, J. Phys. Soc. Japan, 32, pp. 168ff.

493. M. Wadati, K. Konno and Y. H. Ichicawa (1979), New integrable nonlinear evolution equations, J. Phis. Soc. Japan, 47, pp. 1698 ff.

494. M. Wadati, H. Sanuki and K. Konno (1975), Relationships among inverse method, Bäcklund transformation and an infinite number of conservation laws, Prog. Theoret. Phys., 53, pp. 419—436.

495. M. Wadati and M. Toda (1972), The exact N-soliton of the Korteweg-de Vries equation, J. Phys. Soc. Japan, 32, pp. 1403—1411.

496. H. D. Wahlquist and F. B. Estabrook (1973), Backlund transformation for solutions of the Korteweg-de Vries equation, Phys. Rev. Lett., 23, pp. 1386—1389.

497. — (1975), (1976), Prolongation structures and nonlinear evolution equations, J. Math. Phys., 16, p. 1—7; 17, pp. 1293—1297.

498. O. D. Waters (1967), Oceanographic Atlas of the North Atlantic Ocean, II, Physical Properties, U. S. N. Oceanographic Office, Washington, DC.

499. K. M. Watson, B. J. West and B. I. Cohen (1976), Coupling of surface and internal gravity waves: a mode coupling model, J. Fluid Mech., 77, pp. 185—208.

500. J. V. Wehausen and E. V. Laitone (1960), Surface waves. Handbuch der Physik, vol. 9, Springer-Verlag, Berlin.

501. P. D. Weidman and T. Maxworthy (1978), Experiments on strong interactions between soliatry waves, J. Fluid Mech., 85, pp. 417—431.

502. V. Weisskopf and E. Wigner (1930), Berechnung der Naturlichen Linienbriete auf Grund, Z. Physik, 63, pp. 54—73.

503. M. Wellner (1960), Energy renormalization in ordinary wave mechanics, Phys. Rev., 118, pp. 875—877.

504. B. J. West, J. A. Thomson and K. M. Watson (1974), Statistical mechanics of ocean waves, J. Hydronaut., 9, pp. 25—31.

505. G. B. Whitham (1974), Linear and Nonlinear Waves, Wiley-Interscience, New York. [Имеется перевод: Дж. Уизем. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.]

506. — (1979), Comments on some recent multi-soliton solutions, J. Phys. A. Math., 12, pp. L1—L3.

507. J. Willebrand (1975), Energy transport in a nonlinear and inhomogeneous random gravity wave field, J. Fluid Mech., 70, pp. 113—126.

508. T. T. Wu, B. M. McCoy, C. A. Tracy and E. Barough (1976), Spin-spin correlation functions for the two-dimensional Ising model-exact theory in the scaling region, Phys. Rev. B, 13, pp. 316—374.

509. N. Yajima (1974), Stability of envelope solitons, Prog. Theoret. Phys., 52, pp. 1066 ff.

510. N. Yajima and Y. H. Ichikawa, eds. (1979), Soliton Phenomena in Plasmas, Selected Papers in Physics 73, Physical Society of Japan.

511. N. Yajima and N. Kakutani, eds. (1975), Nonlinear Dispersive Wave Motion, Selected Papers in Physics 59, Physical Society of Japan.

512. N. Yajima and M. Oikawa (1975), A class of exactly solvable nonlinear evolution equations, Prog. Theoret. Phys., 54, pp. 1576—1578.

513. — (1976), Formation and interaction of sonic-Langmuir solitons — inverse scattering method, Prog. Theoret. Phys., 56, pp. 1719—1739.

514. N. Yajima, M. Oikawa and J. Satsuma (1978), Interaction of ionacoustic solitons in three-dimensional space, J. Phys. Soc. Japan, 44, pp. 1711—1714.

515. A. Yariv (1975), Quantum Electronics, 2nd ed., John Wiley, New York.

516. H. C. Yuen and W. Ferguson (1978), Fermi — Pasta — Ulam recurrence in the two-space dimensional nonlinear Schrödinger equation, Phys. Fluid, 21, pp. 2116—2118

517. H. C. Yuen and B. M. Lake (1975), Nonlinear deep water waves theory and experiment, Phys. Fluids, 18, pp. 956—960.

518. — (1980), Instabilities of waves on deep water, Ann. Rev. Fluid Mech., 12, pp. 303—334.

519. N. J. Zabusky (1962), Phenomena associated with the oscillations of a nonlinear model string, Mathematical Models in the Physical Sciences, S. Drobat, ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

520. — (1967), A synergetic approach to problems of nonlinear dispersive wave propagation and interaction, in Proc. Symposium on Nonlinear Partial Differential Equations, W. F. Ames, ed., Academic Press, New York.

521. — (1969), Nonlinear lattice dynamics and energy sharing, J. Phys. Soc. Japan, 26, Suppl., pp. 196 ff.

522. N. J. Zabusky and C. J. Galvin (1971), Shallow water waves, the Korteweg-de Vries equation and solitons, J. Fluids Mech., 47, pp. 811—824.

523. N. J. Zabusky and M. D. Kruskal (1965), Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, Phys. Rev. Lett., 15, pp. 240—243.

524. В. Е. Захаров (1968). Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости. ПМТФ, № 6, вып. 2, с. 86—94.

525. — (1971). Кинетическое уравнение для солитонов. — ЖЭТФ, 60, вып. 3, с. 993—1000.

526. — (1972). Коллапс лэнгмюровских волн. — ЖЭТФ, 62, вып. 5, с. 1745—1759.

527. — (1973). О стохастизации одномерных цепочек нелинейных осцилляторов.. — ЖЭТФ, 65, с. 219—225.

528. — (1975). Неустойчивость и нелинейные колебания солитонов. — Письма в ЖЭТФ, т. 22, с. 364—367.

529. — (1976). Точное решение задачи о параметрическом взаимодействии трехмерных волновых пакетов. — ДАН СССР, т. 228, с. 1314.

530. — (1981), On the Benny equations, Proc. US-USSR Symposium on Soliton Theory, Kiev, 1979, V. E. Zakharov and S. V. Manakov, eds., North-Holland, Amsterdam, pp. 193--202. Physica 3D No. 1, 2.

531. См. [51].

532. В. Е. Захаров, Д. Д. Фаддеев (1971). Уравнение Кортевега-де Фриза — вполне интегрируемая гамильтонова система. — Функц. анализ и его прилож., 5, № 4, с. 18—27.

533. В. Е. Захаров, С. В. Манаков (1973). О резонансном взаимодействии волновых пакетов в нелинейных средах. — Письма в ЖЭТФ, 18, с. 413—416.

534. — (1974). О полной интегрируемости нелинейного уравнения Шрёдингера. — ТМФ, 19, с. 322—332.

535. — (1975). Теория резонансного взаимодействия волновых пакетов в нелинейных средах. — ЖЭТФ, **69**, с. 1654—1673.

536. — (1976). Асимптотическое поведение нелинейных волновых систем, интегрируемых методом обратной задачи. — ЖЭТФ, **71**, с. 203—215.

537. — (1979), Soliton theory, Phys. Rev. (Sov. Scient. Rev.) 1, pp. 133—190.

538. — eds. (1981), Proceedings of the Joint US-USSR Symposium on Soliton Theory, Kiev, 1979, Physica 3D Nos 1 + 2.

539. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский (1980). Теория солитонов. Метод обратной задачи. — М.: Наука.

540. В. Е. Захаров, А.В. Михайлов (1978). Пример нетривиального рассеяния солитонов в двумерной классической теории поля. Письма в ЖЭТФ, 27, № 1, с. 47—51.

541. — (1978). Релятивистки инвариантные двумерные теории поля, интегрируемые методом обратной задачи. — ЖЭТФ, 74, № 6, с. 1953—1973.

542. В. Е. Захаров, С. Л. Мушер, А. М. Рубенчик (1974). О нелинейной стадии возбуждения волн в плазме. — Письма в ЖЭТФ. т. 19, с. 249—251.

543. В. Е. Захаров, А. М. Рубенчик (1973). Неустойчивость волноводов и солитонов в нелинейных средах. — ЖЭТФ, 65, вып. 3, с. 997—1011.

544. В. Е. Захаров, А. Б. Шабат (1971). Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейной среде. — ЖЭТФ, 61,с. 118—134.

545. — (1972). Взаимодействие солитонов в устойчивой среде. — ЖЭТФ, 64, вып. 5, с. 1627—1639.

546. — (1974). Схема интегрирования нелинейных эволюционных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I. — Функц. анализ и его прилож., 6, вып. 3, с. 43—53.

547. — (1979). Интегрирование нелинейных уравнений математичекой физики методом обратной задачи рассеяния. II. — Функц. анализ и его прилож., 13, вып. 3, с. 13—22.

548. V. E. Zakharov and E. I. Shulman (1980), Degenerate dispersion laws, motion invariance and kinetic equations, Physica D, 1, pp. 192—202.

549. В. Е. Захаров, В. С. Сынах (1975). О характере особенности при самофокусировке, ЖЭТФ, т. 68, вып. 3, с. 940—947.

550. J. M. Ziman (1960), Electrons and Phonons, Clarendon Press, Oxford. [Имеется перевод: Дж. Займан. Электроны и фононы. Теория явлений переноса в твердых телах. — ИЛ, 1962.]

Литература, добавленная переводчиком

К главе I

1. Герджиков В. С., Христов Е. X. Об эволюционных уравнениях, решаемых методом обратной задачи рассеяния. I — Болгарский физ. ж., 1980, 7, № 1, 28—41; II. 1980, 7, № 2, 119—133.

2. Kaup D. J., Newell A. C. Soliton equations, singular dispersion relations and moving eigenvalues. — Adv. Math., 1979, 31, 67—100.

3. Герджиков В. С., Иванов М. И. Кулиш П. П. Квадратичный пучок и нелинейные уравнения. — ТМФ, 1980, 44, № 3, 342—357.

4. Gerdjikov V. S., Kulish P. P. The generating operator for the $n \times n$ linear system (1980). Gerdjikov V. S. Inverse problems. Gauge covariant formulation of the generalized Fourier transforms for the soliton equations». — Physica D, 3D, n. 3, 549—564.

5. Kaup D. J. The squared eigenstates of the sine-Gordon eigenvalue problem. — J. Math. Phys., 1984, 25, p. 8, 2467—2471.

6. Буслаев В. С. Использование детерминантного представления решений уравнения Кортевега — де Фриза для исследования их асимптотического поведения при больших временах. — УМН, 1981, т. 36, № 4, с. 217—218.

7. Буслаев В. С., Суханов В. В. Об асимптотическом поведении при $t \to \infty$ решений уравнения $\psi_{xx} + u\psi + \frac{\lambda}{4}\psi = 0$ с потенциалом u, удовлетворяющим уравнению КдФ. — В сб.: Проблемы математической физики, вып. 10, ЛГУ, 1982.

8. Новокшенов В. Ю. Асимптотика при $t \to \infty$ решения задачи Коши для нелинейного уравнения Шрёдингера. — ДАН СССР, 1980, т. 251, № 4, с. 799—801.

9. Новокшенов В. Ю. Асимптотика при $t \to \infty$ решения задачи Коши для двумерного обобщения цепочки Тоды. — Изв. АН СССР, 1984, сер. матем., т. 48, № 2, с. 372—410.

10. Итс А. Р. Асимптотика решений нелинейного уравнения Шрёдингера и изомонодромные деформации систем линейных дифференциальных уравнений. — ДАН СССР, 1981, т. 261, № 1, с. 14—18.

11. Итс А. Р., Петров В. Э. Изомонодромные решения уравнения Sine-Gordon и временная асимптотика его быстроубывающих решений. — ДАН СССР, 1982, т. 265, № 6, с. 1302—1304.

К главе 2

1. Захаров В. Е., Манаков С. В. Точная теория резонансного взаимодействия волновых пакетов в нелинейных средах. — Препринт ИЯФ 74—41, Новосибирск, 1974.

2. Шабат А. Б. Обратная задача рассеяния. — Дифференц. уравнения, т. XV, с. 1824—1834.

3. Kaup D. J. On the Inverse Scattering Problem for Cubic Eigenvalue Problems of the Class $\psi_{xxx} + 6Q\psi_x + 6R\psi = \lambda\psi$ Studies in Applied Mathematics, 1980, 62, p. 189—216.

4. Beals R. The Invers Problems for Ordinary Differential Operators on the Line. — Preprint of the Yale University, 1982,

5. Beals R., Coifman R. R. Scattering and Inverse Scattering for First Order Systems. — Comm. on Pure and Appl. Math., 1984, V. 37, p. 39.

6. Итс А. Р. Обращение гиперэллиптических интегралов и интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений. — Вестник ЛГУ, 1976, сер. матем.-мех.-астр., № 7, вып. 2, с. 39—46.

7. Итс А. Р., Котляров В. П. Явные формулы для решений нелинейного уравнения Шрёдингера. — ДАН СССР, 1976, сер. А., № 11, с. 965—968.

8. Козел В. А., Котляров В. П. Почти периодические решения уравнения $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$. — ДАН УССР, сер. А., № 10, с. 878—881.

9. Matveev V. B. Abelian function and solitons. — Preprint of Wroclaw University N 373.

10. Дубровин Б. А. Матричные конечнозонные операторы. — изд. ВИНИТИ, 1983, Итоги науки и техники, сер. «Современные проблемы математики», т. 23, с. 33—76.

11. Izergin A. G., Korepin V. E. Lattice versions of quantum field theory models in two dimensions. — Nucl. Phys., 1982, B 205 3, p. 401—413,

12. Тарасов В. О., Классический вариант решеточной модели синус-Гордон. — Записки науч. сем. ЛОМИ, т. 120, с. 173—187, 1982.

13. Корепин В. Е., Изергин А. Г. Решеточная модель, связанная с нелинейным уравнением Шрёдингера. — ДАН СССР, 1981, **259**, № 1, с. 76—79.

К главе 3

1. Жибер А. В., Шабат А. Б. ДАН СССР, 1979, **247**, № 5, с. 1103—1105.

2. Ибрагимов Н. Х., Шабат А. Б. Эволюционные уравнения с нетривиальной группой Ли — Бэклунда. — Функц. анализ и его прилож., 1980, т. 14, вып. 4, с. 79—80.

3. Ямилов Р. И. УМН, 1983, **38**, вып. 6, с. 155—156.

4. Михайлов А. В., Шабат А. Б. Условия интегрируемости систем двух уравнений вида $u_t = A(\mathbf{u})(\mathbf{u})_{xx} + \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_x)$. I. ТМФ, 1985, т. 62, № 2, с. 163—185.

5. Sokolov V. V., Shabat A. B. Classification of Integrable Evolution Equations. — Sov. Sci. Rev. C V. 4, p. 221—280.

6. Свинолупов С. И., Соколов В. В. Об эволюционных уравнениях с нетривиальными законами сохранения. — Функц. анализ, 1982, т. 16, вып. 4, с. 86—87.

7. Свинолупов С. И. Список формально интегрируемых уравнений вида $\mathbf{u}_t = h(u)u_3 + f(u_1, u_2, u_3)$. Деп. ВИНИТИ № 2962—83, 6 с. Канд. дисс. УФА, 1985.

8. Свинолупов С. И. Эволюционные уравнения второго порядка, обладающие симметриями. УМН, 1985, т. 40, вып. 5, с. 263—264.

9. Михайлов А. В., Шабат А. Б. Условия интегрируемости систем двух уравнений вида $u_t = A(u)u_{xx} + F(u, u_x)$. II. ТМФ, 1986, **66**, № 1, с. 47—65.

10. Шабат А.Б., Ямилов Р. И. О полном списке интегрируемых систем уравнений вида $iu_t = u_{xx} + f(u, v, u_x, v_x), -iv_t = v_{xx} + g(u, v, u_x, v_x)$. Препринт УФА, 1985.

11. Захаров В. Е. Неустойчивость и нелинейные колебания солитонов. Письма в ЖЭТФ, 1985, т. 22, с. 364.

12. Бурцев С. П. Затухание колебаний солитона в средах с отрицательным законом дисперсии. ЖЭТФ, 1985, т. 88, вып. 2, с. 461—469.

13. Zakharov V. E., Kuznetsov E. A., Rubenchik A. M. (1986). Soliton Stability, p. 505—553 in Solitons, eds. S. E. Trullinger, V. E. Zakharov, V. L. Pokrovskii North Holland P. C.

14. Holm D. D., Marsden J. E., Ratiu T., Weinstein A. Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria. — Phys. Reports, 1985, v. 123, N 182, p. 1—116.

15. Михайлов А. В. Об интегрируемости двумерного обобщения цепочки Тода. Письма в ЖЭТФ, 1979, т. 30, вып. 7, с. 443—448.

16. Dodd R. K., Bullough R. K. Proc. Roy. Soc., 1977, **A352**, p. 48.

К главе 4

1. Башаров А. М., Маймистов А. И. О самоиндуцированной прозрачности в условиях вырождения резонансных энергетических уровней. — ЖЭТФ, 1984, т. 87, вып. 5, с. 1594—1605.

Указатель

Содержание